Mathématiques Générales I (Math2007)
2020-2021

Annexe pour le cours en ligne du 09/11/20 (intégration par variation de primitive)

On a successivement

$$\begin{array}{rcl}
F(b)-F(a) & = & F(x_n)-F(x_0) \\
& = & \Big(F(x_n)-F(x_{n-1})\Big) \ + \ F(x_{n-1})-F(x_0) \\
& = & \Big(F(x_n)-F(x_{n-1})\Big) \ + \ \Big(F(x_{n-1})-F(x_{n-2})\Big) \ + \ F(x_{n-2})-F(x_0) \\
& = & \ldots \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(F(x_k)-F(x_{k-1})\Big)
\end{array}$$

Le résultat d'intégration par variation de primitive reste valable lorsque f est à valeurs complexes. En effet, on a $DF=f$ sur $]a,b[$ c'est-à-dire

$$D(\Re F)(x)+iD(\Im F)(x) \ = \ (\Re f)(x)+i(\Im f)(x) \quad \forall x \in]a,b[.$$

On en déduit donc que (pouvoir justifier)

$$D(\Re F)(x) \ = \ (\Re f)(x) \quad \text{et} \quad D(\Im F)(x) \ = \ (\Im f)(x) \quad \forall x \in]a,b[.$$

Une application du théorème d'intégration par variation de primitive (les fonctions considérées sont cette fois à valeurs réelles et vérifient les hypothèses) donne ainsi

$$\int_a^b (\Re f)(x) \ dx \ = \ (\Re F)(b)-(\Re F)(a)$$

et

$$\int_a^b (\Im f)(x) \ dx \ = \ (\Im F)(b)-(\Im F)(a)$$

car ...(pouvoir justifier). On obtient donc

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx & = & \displaystyle\int_a^b \Big((\Re f)(x)+i(\Im f)(x)\Big)\ dx \\
& = & \displaystyle\int_a^b (\Re f)(x)\ dx \ + \ i\int_a^b (\Im f)(x)\ dx \\
& = & (\Re F)(b)-(\Re F)(a) \ + \ i\ \Big((\Im F)(b)-(\Im F)(a)\Big) \\
& = & (\Re F)(b)+i(\Im F)(b) \ - \ \Big((\Re F)(a)+i(\Im F)(a)\Big) \\
& = & F(b) \ - \ F(a)
\end{array}$$

F. Bastin, 6 novembre 2020 (V1 : 061120)