Mathématiques Générales I (Math2007)
2020-2021

Annexe pour le cours en ligne du 13/11/20

<u>Remarque</u> : il est important (car erreur très fréquemment commise) de se rappeler qu'une fonction constante non nulle n'est pas intégrable en l'infini. Cela se déduit directement de la définition [1] : si $f(x) = c$ pour tout $x \in [r, +\infty[$ (analogue bien sûr en $-\infty$), on a

$$\int_r^t |c|\, dx \ = \ |c|\,(t - r) \quad \forall t \geq r$$

donc

$$\lim_{t \to +\infty} \int_r^t |c|\, dx \ = \ +\infty$$

puisque $c \neq 0$.

<u>Propriété pratique pour vérifier la non-intégrabilité en l'infini</u>
Traitons le cas de $+\infty$; celui de $-\infty$ est tout à fait semblable.

Soit f une fonction continue sur un intervalle du type $[r, +\infty[$. Si la fonction admet une limite en $+\infty$ et y est intégrable, alors la limite est nécessairement nulle.

En effet, supposons que la limite ne soit pas nulle.

Si elle est infinie, alors il existe $R > 0$ tel que

$$|f(x)| \geq 1 \quad \forall x \geq R.$$

Comme toute constante non nulle n'est pas intégrable sur les ensembles non bornés, le critère de comparaison donne la non intégrabilité de f en $+\infty$, ce qui contredit l'hypothèse.

Si elle est finie et non nulle, notons l cette limite. Il existe donc $R > 0$ tel que $|f(x) - l| \leq |l|/2$ pour tout $x \geq R$. Comme on a $\big||a| - |b|\big| \ \leq \ \big|a - b\big|$ pour tous réels (et même complexes) a, b, on obtient

$$|l| - |f(x)| \ \leq \ \big||f(x)| - |l|\big| \ \leq \ |f(x) - l| \ \leq \ \frac{|l|}{2} \quad \forall x \geq R.$$

A partir des inégalités

$$|l| - |f(x)| \ \leq \ \frac{|l|}{2} \quad \forall x \geq R$$

on a alors

$$|l| - \frac{|l|}{2} = \frac{|l|}{2} \ \leq \ |f(x)| \quad \forall x \geq R$$

et on conclut exactement comme dans le cas précédent.

1. et s'interprète aisément via un graphique vu l'interprétation de l'intégrale

Intégration par changement de variables

Voir aussi notes du syllabus.

• Soit g une fonction qui appartient à $C_1(]a,b[)$, à valeurs réelles et dont la dérivée est à valeurs strictement positives. On sait alors (pouvoir justifier) que les limites

$$a' = \lim_{x\to a^+} g(x) \quad \text{et} \quad b' = \lim_{x\to b^-} g(x)$$

existent, sont telles que $a' < b'$ et

$$a' \ < \ g(x) \ < \ b' \quad \forall x \in]a,b[$$

(+convention dans le cas où on manipule l'infini). Alors, si f est une fonction définie sur $]a',b'[$, la fonction de fonction fog est définie sur $]a,b[$ (car...) et on a (résultat admis) : la fonction f est intégrable sur $]a',b'[$ si et seulement si la fonction $fog\ Dg$ est intégrable sur $]a,b[$ et dans ce cas, on a

$$\int_{a'}^{b'} f(x')\ dx' \ = \ \int_a^b (fog)(x)\ Dg(x)\ dx \ = \ \int_a^b (fog)(x)\ \ |Dg(x)|\ \ dx.$$

• Soit g une fonction qui appartient à $C_1(]a,b[)$, à valeurs réelles et dont la dérivée est à valeurs strictement négatives. On sait alors (pouvoir justifier) que les limites

$$a' = \lim_{x\to a^+} g(x) \quad \text{et} \quad b' = \lim_{x\to b^-} g(x)$$

existent, sont telles que $a' > b'$ et

$$b' \ < \ g(x) \ < \ a' \quad \forall x \in]a,b[$$

(+convention dans le cas où on manipule l'infini). Alors, si f est une fonction définie sur $]b',a'[$, la fonction de fonction fog est définie sur $]a,b[$ (car...) et on a (résultat admis) : la fonction f est intégrable sur $]b',a'[$ si et seulement si la fonction $fog\ Dg$ est intégrable sur $]a,b[$ et dans ce cas, on a

$$\int_{a'}^{b'} f(x')\ dx' \ = \ \int_a^b (fog)(x)\ Dg(x)\ dx \ = \ -\int_a^b (fog)(x)\ \ |Dg(x)|\ \ dx$$

ou encore

$$\int_{b'}^{a'} f(x')\ dx' \ = \ \int_a^b (fog)(x)\ \ |Dg(x)|\ \ dx.$$

Exemple Voir aussi syllabus, répétitions et livre d'exercices.

Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$. Celle-ci est continue sur $]0, +\infty[$. Etudions son intégrabilité [2].

• Méthode qui utilise la définition.
Examinons l'intégrabilité en 0. Quel que soit $t \in]0, 1]$, si F est une primitive de f, on a

$$\int_t^1 |\ln(x)|\ dx \ = \ -\int_t^1 \ln(x)\ dx \ = \ F(t) - F(1).$$

En guise de primitive de f on peut prendre $F(x) = x\ln(x) - x,\ x \in]0, +\infty[$. On obtient dès lors

$$\int_t^1 |\ln(x)|\ dx \ = \ -\int_t^1 \ln(x)\ dx \ = \ t\ln(t) - t + 1.$$

Comme $\lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$ (car ...) et comme $\lim_{t\to 0^+} t = 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 |\ln(x)|\ dx \ = \ 1$$

donc f est bien intégrable en 0^+. On a même

$$\int_0^1 \ln(x)\ dx \ = \ \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln(x)\ dx \ = \ -\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 |\ln(x)|\ dx \ = \ -1$$

Examinons maintenant l'intégrabilité en $+\infty$. Avec les mêmes notations que dans ce qui précède, quel que soit $t > 1$, on a

$$\int_1^t |\ln(x)|\ dx \ = \ \int_1^t \ln(x)\ dx \ = \ F(t) - F(1) \ = \ t\ln(t) - t + 1.$$

Ici, on a

$$\lim_{t\to +\infty} \int_1^t |\ln(x)|\ dx \ = \ \lim_{t\to +\infty} (t\ln(t) - t + 1) \ = \ +\infty$$

(pouvoir justifier) donc la fonction ln n'est pas intégrable en $+\infty$.

• Méthode qui utilise les « critères »
Examinons l'intégrabilité en 0. On a

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}\,|\ln(x)|\right) = -\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}\ \ln(x)\right) = 0$$

(pouvoir justifier) ; donc puisque $1/2 \ < \ 1$, on obtient l'intégrabilité en 0.
Examinons maintenant l'intégrabilité en $+\infty$. On a

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) \ = \ +\infty;$$

la fonction n'est donc pas intégrable en $+\infty$.

F. Bastin, 11 novembre 2020 (V1 : 101120)

2. L'interprétation graphique de l'intégrabilité laisse penser que f n'est pas intégrale à l'infini, ce qui est bien le cas comme on va le prouver. Par contre, le graphique ne permet pas de répondre à priori à l'intégrabilité ou non en 0