Mathématiques générales

Année académique 2021-2022

Corrigé de l'interrogation du vendredi 5 novembre 2021

Version 3 novembre 2021

QUESTIONNAIRE

Théorie

1. Si b et c sont des réels vérifiant l'inégalité $b^2 - 4c > 0$, démontrer que l'équation $x^2 + bx + c = 0$ (où x désigne l'inconnue réelle) possède exactement deux solutions.
(Attention, *démontrer* ne signifie PAS *vérifier* !)

2. QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,5 ; pas de réponse : 0)

   Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

   (a) Dans l'espace, le produit scalaire d'un vecteur non nul et de sa projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par un autre vecteur non nul n'est jamais nul.
   □ VRAI □ FAUX

   (b) La demi-différence entre un nombre complexe non nul et son conjugué vaut la partie imaginaire de ce nombre complexe.
   □ VRAI □ FAUX

   (c) Pour que deux réels non nuls aient la même valeur absolue, il est suffisant que ces réels soient égaux.
   □ VRAI □ FAUX

Exercices

1. Résoudre l'équation
$$-2\sin^2(2x) = \cos(2x) - 2.$$
Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$.

2. Dans un repère orthonormé, représenter les ensembles décrits par les équations suivantes **sur des graphiques différents**. Préciser chaque fois le nom de l'ensemble représenté. Dans le cas (b), préciser l'excentricité, les coordonnées du (des) foyer(s) et l'équation des éventuelles asymptotes.

Série A	(a) $4y^2 = 16 - x^2$	(b) $4y^2 = 36 + 9x^2$
Série B	(a) $2y^2 + x = 2$	(b) $4y^2 = 36 + 9x^2$

3. ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***

   Un enfant collectionne des cartes et en possède déjà 100. Sur chaque carte figurent soit 2 étoiles, soit 3 étoiles. Il a compté en tout 256 étoiles.
   Si les cartes avec 2 étoiles coûtent 1,5 euros et celles avec 3 étoiles coûtent 2 euros, quel montant l'enfant a-t-il déjà dépensé ?

4. QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

   Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

Série A

(a) Que vaut l'expression $\ln\left(e^{-\pi}\right) + \operatorname{arcos}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right)$ après simplification ?

☐ $\frac{-7\pi}{5}$ ☐ $\frac{-3\pi}{5}$ ☐ $\frac{-2\pi}{5}$ ☐ $\frac{2\pi}{5}$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(b) De quelle équation le complexe $\frac{1}{i}$ est-il solution ?

☐ $z^6 + 8i = 0$ ☐ $z^4 - 1 = 0$ ☐ $z^3 - z^2 = 0$ ☐ $z^2 - 2z + 2 = 0$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(c) Si r est un réel strictement négatif, alors $|r| + 1$ vaut

☐ $r - 1$ ☐ $-r - 1$ ☐ $1 - r$ ☐ $1 + r$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Série B

(a) Que vaut l'expression $\ln(e^{\pi}) - \operatorname{arcos}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right)$ après simplification ?

☐ $\frac{-2\pi}{5}$ ☐ $\frac{2\pi}{5}$ ☐ $\frac{3\pi}{5}$ ☐ $\frac{7\pi}{5}$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(b) De quelle équation le complexe $1 - i$ est-il solution ?

☐ $z^6 + 8i = 0$ ☐ $z^4 - 1 = 0$ ☐ $z^3 - z^2 = 0$ ☐ $z^2 - 2z + 2 = 0$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(c) Si r est un réel strictement négatif, alors $|r| - 2$ vaut

☐ $r - 2$ ☐ $-r - 2$ ☐ $2 - r$ ☐ $2 + r$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

CORRIGE

Théorie

1. **Si b et c sont des réels vérifiant l'inégalité $b^2 - 4c > 0$, démontrer que l'équation $x^2 + bx + c = 0$ (où x désigne l'inconnue réelle) possède exactement deux solutions. (Attention, *démontrer* ne signifie PAS *vérifier* !)**

   Solution. Voir cours

2. QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,5 ; pas de réponse : 0)

   Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

   (a) Dans l'espace, le produit scalaire d'un vecteur non nul et de sa projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par un autre vecteur non nul n'est jamais nul.

   □ VRAI ♣ FAUX

   (b) La demi-différence entre un nombre complexe non nul et son conjugué vaut la partie imaginaire de ce nombre complexe.

   □ VRAI ♣ FAUX

   (c) Pour que deux réels non nuls aient la même valeur absolue, il est suffisant que ces réels soient égaux.

   ♣ VRAI □ FAUX

Exercices

1. **Résoudre l'équation**

$$-2\sin^2(2x) = \cos(2x) - 2.$$

Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$.

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$. Comme $1 - \sin^2(2x) = \cos^2(2x)$, on a

$$\begin{aligned}
&-2\sin^2(2x) = \cos(2x) - 2\\
&\Leftrightarrow \quad 2 - 2\sin^2(2x) - \cos(2x) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 2(1 - \sin^2(2x)) - \cos(2x) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos^2(2x) - \cos(2x) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \cos(2x)(2\cos(2x) - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \cos(2x) = 0 \text{ ou } \cos(2x) = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } \ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{-\pi}{6} + k\pi.
\end{aligned}$$

L'équation donnée a donc pour ensemble de solutions

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ sont

$$\frac{7\pi}{6},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4},\ \frac{11\pi}{6}.$$

2. **Dans un repère orthonormé, représenter les ensembles décrits par les équations suivantes sur des graphiques différents. Préciser chaque fois le nom de l'ensemble représenté. Dans le cas (b), préciser l'excentricité, les coordonnées du (des) foyer(s) et l'équation des éventuelles asymptotes.**

(a SERIE A) $4y^2 = 16 - x^2$ **(a SERIE B)** $2y^2 + x = 2$ **(b)** $4y^2 = 36 + 9x^2$

Solution. Puisque

$$4y^2 = 16 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1,$$

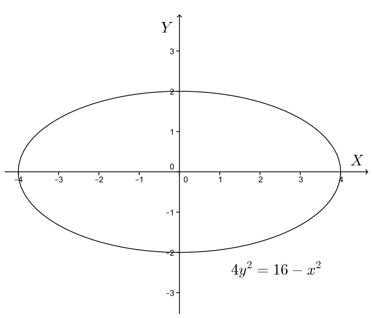
l'équation (a SERIE A) est celle d'une ellipse qui intersecte l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-4, 0)$ et $(4, 0)$ et l'axe des ordonnées aux points de coordonnées $(0, 2)$ et $(0, -2)$.
Autre méthode *: l'équation $x^2 + 4y^2 = 16$ est celle d'une ellipse dont les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ sont obtenues en remplaçant y par 0 dans l'équation ci-dessus et celles des points d'intersection avec l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ sont obtenues en remplaçant x par 0 dans cette même équation. Le passage par l'équation canonique n'est donc pas indispensable.*

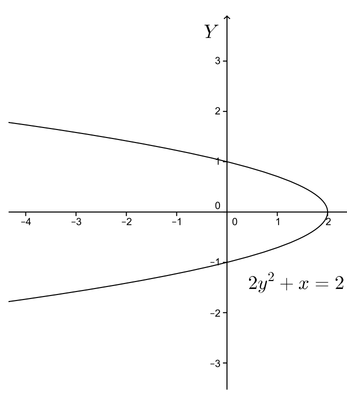
L'équation (a SERIE B) $2y^2 + x = 2$ est celle d'une parabole qui intersecte l'axe des abscisses au point de coordonnées $(2, 0)$ et l'axe des ordonnées aux points de coordonnées $(0, 1)$ et $(0 - 1)$.

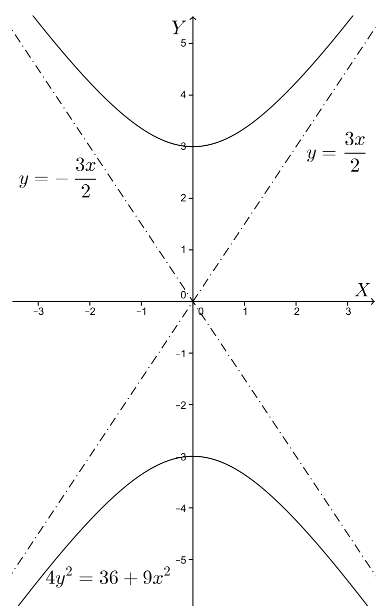
Puisque

$$4y^2 = 36 + 9x^2 \Leftrightarrow -9x^2 + 4y^2 = 36 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

l'équation (b) est celle d'une hyperbole qui intersecte l'axe des ordonnées aux points de coordonnées $(0, 3)$ et $(0, -3)$.
Autre méthode *: l'équation $-9x^2 + 4y^2 = 36$ est celle d'une hyperbole dont les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ sont obtenues en remplaçant x par 0 dans cette équation.*
Dès lors, puisque $4 + 9 = 13$, les foyers ont pour coordonnées $\left(0, -\sqrt{13}\right)$ et $\left(0, \sqrt{13}\right)$, l'excentricité vaut $e = \sqrt{13}/3$ et les asymptotes sont les droites d'équation $y = -3x/2$ et $y = 3x/2$.
Voici la représentation graphique de ces ensembles :







3. **Problème élémentaire : <u>rédiger</u> votre réponse.**

Un enfant collectionne des cartes et en possède déjà 100. Sur chaque carte figurent soit 2 étoiles, soit 3 étoiles. Il a compté en tout 256 étoiles.

Si les cartes avec 2 étoiles coûtent 1,5 euros et celles avec 3 étoiles coûtent 2 euros, quel montant l'enfant a-t-il déjà dépensé ?

Solution. Soient x le nombre de cartes à deux étoiles et y le nombre de cartes à trois étoiles.
Puisque l'enfant possède 100 cartes, on a $x+y=100$.
Comme il a en tout 256 étoiles, on a $2x+3y=256$.
Il faut donc résoudre le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 2x+3y=256 \end{cases}.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y=100 \\ 2x+3y=256 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y=100-x \\ 2x+300-3x=256 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y=100-x \\ x=300-256 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=44 \\ y=56 \end{cases}. \end{aligned}$$

Puisque les cartes avec 2 étoiles coûtent 1,5 euros et celles avec 3 étoiles coûtent 2 euros, l'enfant a déjà dépensé $\frac{3}{2}\times 44+2\times 56$, c'est-à-dire 178 euros.

4. $\boxed{\text{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

Série A

(a) Que vaut l'expression suivante après simplification ? $\ln\left(e^{-\pi}\right)+\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right)$

☐ $\frac{-7\pi}{5}$ ☐ $\frac{-3\pi}{5}$ ♣ $\frac{-2\pi}{5}$ ☐ $\frac{2\pi}{5}$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(b) De quelle équation le complexe $\frac{1}{i}$ est-il solution ?

☐ $z^6+8i=0$ ♣ $z^4-1=0$ ☐ $z^3-z^2=0$ ☐ $z^2-2z+2=0$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(c) Si r est un réel strictement négatif, alors $|r|+1$ vaut

☐ $r-1$ ☐ $-r-1$ ♣ $1-r$ ☐ $1+r$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Série B

(a) Que vaut l'expression suivante après simplification ? $\ln\left(e^{\pi}\right)-\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right)$

☐ $\frac{-2\pi}{5}$ ♣ $\frac{2\pi}{5}$ ☐ $\frac{3\pi}{5}$ ☐ $\frac{7\pi}{5}$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(b) De quelle équation le complexe $1 - i$ est-il solution ?

☐ $z^6 + 8i = 0$ ☐ $z^4 - 1 = 0$ ☐ $z^3 - z^2 = 0$ ♣ $z^2 - 2z + 2 = 0$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(c) Si r est un réel strictement négatif, alors $|r| - 2$ vaut

☐ $r - 2$ ♣ $-r - 2$ ☐ $2 - r$ ☐ $2 + r$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.