LIÈGE université
Sciences

Mathématiques générales I

MATH 2007

Année académique 2022-2023

Corrigé de l'interrogation du vendredi 4 novembre 2022

Version 20 octobre 2022

QUESTIONNAIRE

Théorie

Question 1
(1) Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs.
(2) On se place dans le plan muni d'une base orthonormée. Quelle est l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs ? Justifier votre réponse.

Question 2 QCM Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

(1) Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Parmi les expressions suivantes, laquelle signifie que la fonction f est convexe sur l'intervalle I ?

- ☐ $\forall r, s \in I$, $\exists \theta \in [0,1]$ tel que $f\Big(r + \theta(s-r)\Big) \leq f(r) \ + \ \theta\Big(f(s) - f(r)\Big)$
- ☐ $\exists r, s \in I$ tels que $\forall \theta \in [0,1]$, on a$f\Big(r + \theta(s-r)\Big) \leq f(r) + \theta\Big(f(s) - f(r)\Big)$
- ☐ $\forall r, s \in I$, $\forall \theta \in [0,1]$, on a $f\Big(r + \theta(r-s)\Big) \leq f(r) \ + \ \theta\Big(f(r) - f(s)\Big)$
- ☐ $\forall r, s \in I$ et $\forall \theta \in [0,1]$, on a $f\Big(r + \theta(s-r)\Big) \leq f(r) \ + \ \theta\Big(f(s) - f(r)\Big)$
- ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ quatre vecteurs non nuls. L'expression

$$(\vec{a} \bullet \vec{d})\ \vec{b} \wedge \Big((\vec{a} \wedge \vec{d}) \wedge \vec{c}\Big)$$

- ☐ n'a jamais de sens.
- ☐ définit toujours un vecteur.
- ☐ définit toujours un nombre.
- ☐ n'a de sens que si deux vecteurs sont égaux.
- ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Si $t \in]-3, -1[$, que vaut $\cos\Big(\text{arcotan}(t)\Big)$?

- ☐ $t/\sqrt{t^2-1}$
- ☐ $\sqrt{t^2-1}/t$
- ☐ $t/\sqrt{t^2+1}$
- ☐ L'expression n'a pas de sens.
- ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices

1. Déterminer les solutions réelles x de l'inéquation
$$|3 - 2x| \leq \frac{-2}{x}.$$

2. Résoudre l'équation en l'inconnue réelle x
$$2\cos^2(x) = 2 - \cos(2x).$$
Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $]-\pi, \pi/2]$.

3. ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***

   La moyenne des résultats à un contrôle est 9,8/20. Si on ne tient pas compte de la plus mauvaise cote 5/20 obtenue par un seul étudiant, on obtient une moyenne de 10/20. Combien d'étudiants ont effectué ce contrôle ?

4. $\boxed{\text{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

   Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

   Série A

   (a) L équation cartésienne $x^2 - 4y^2 + 4x = 0$ est celle d'une
   ☐ ellipse dont les foyers sont sur l'axe X ☐ ellipse dont les foyers sont sur l'axe Y
   ☐ hyperbole dont les foyers sont sur l'axe X ☐ hyperbole dont les foyers sont sur l'axe Y
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Parmi les fonctions (de x) définies explicitement ci-dessous, quelle est celle qui est toujours paire sur son domaine de définition ?

   ☐ $\exp(|x|) - a$ ☐ $\sqrt{x} - a$ ☐ $(x-a)^2$ ☐ $|x-a|$
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

   (c) Quelle est la partie imaginaire du nombre complexe z si

   $$z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{-1 + i} \text{ ?}$$

   ☐ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\sqrt{3}$ ☐ $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ☐ $i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Série B

1. L équation cartésienne $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$ est celle d'une
   ☐ ellipse dont les foyers sont sur l'axe X ☐ ellipse dont les foyers sont sur l'axe Y
   ☐ hyperbole dont les foyers sont sur l'axe X ☐ hyperbole dont les foyers sont sur l'axe Y
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Parmi les fonctions (de x) définies explicitement ci-dessous, quelle est celle qui est toujours paire sur son domaine de définition ?
   ☐ $\exp(x) - a$ ☐ $\sqrt{x} - a$ ☐ $-a$ ☐ $|x-a|$
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
3. Quelle est la partie imaginaire du nombre complexe z si

   $$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i} \text{ ?}$$

   ☐ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\sqrt{3}$ ☐ $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ☐ $i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

CORRIGE

Théorie

1. **(1) Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs.**
(2) On se place dans le plan muni d'une base orthonormée. Quelle est l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs ? Justifier votre réponse.
Solution. Voir cours

2. $\boxed{\text{QCM}}$ Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

(1) Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Parmi les expressions suivantes, laquelle signifie que la fonction f est convexe sur l'intervalle I ?

☐ $\forall r, s \in I$, $\exists \theta \in [0,1]$ tel que $f\Big(r+\theta(s-r)\Big) \leq f(r) \ + \ \theta\Big(f(s)-f(r)\Big)$

☐ $\exists r, s \in I$ tels que $\forall \theta \in [0,1]$, on a $f\Big(r+\theta(s-r)\Big) \leq f(r)+\theta\Big(f(s)-f(r)\Big)$

☐ $\forall r, s \in I$, $\forall \theta \in [0,1]$, on a $f\Big(r+\theta(r-s)\Big) \leq f(r) \ + \ \theta\Big(f(r)-f(s)\Big)$

♣ $\forall r, s \in I$ et $\forall \theta \in [0,1]$, on a $f\Big(r+\theta(s-r)\Big) \leq f(r) \ + \ \theta\Big(f(s)-f(r)\Big)$

☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ quatre vecteurs non nuls. L'expression

$$(\vec{a} \bullet \vec{d})\ \vec{b} \wedge \Big((\vec{a} \wedge \vec{d}) \wedge \vec{c}\Big)$$

☐ n'a jamais de sens.

♣ définit toujours un vecteur.

☐ définit toujours un nombre.

☐ n'a de sens que si deux vecteurs sont égaux.

☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Si $t \in]-3,-1[$, que vaut $\cos\Big(\text{arcotan}(t)\Big)$?

☐ $t/\sqrt{t^2-1}$

☐ $\sqrt{t^2-1}/t$

♣ $t/\sqrt{t^2+1}$

☐ L'expression n'a pas de sens.

☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices

1. **Déterminer les solutions réelles x de l'inéquation**

$$|3-2x| \leq \frac{-2}{x}.$$

Solution. D'une part, l'inéquation n'est définie que pour $x \neq 0$; d'autre part, si $x > 0$, l'inéquation n'est jamais vérifiée (puisque le premier membre, positif, ne peut être inférieur au second membre, strictement négatif). Il reste donc à envisager le cas où $x < 0$.

Par définition, on a
$$|3-2x| \;=\; \left\{\begin{array}{ll} 3-2x & \text{si } x \in]-\infty, 3/2] \\ 2x-3 & \text{si } x \in]3/2, +\infty[\end{array}\right. .$$
Comme $x<0$, on a donc $x<3/2$ et l'inéquation s'écrit
$$3-2x \leq \frac{-2}{x}.$$
On a alors les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} 3-2x \leq \frac{-2}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad x(3-2x) \geq -2 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x-2x^2 \geq -2 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x^2+3x+2 \geq 0. \end{aligned}$$
Puisque le discriminant vaut 25, les deux zéros du polynôme $x \mapsto -2x^2+3x+2$ sont $-1/2$ et 2 ; ce polynôme est donc positif pour $-1/2 \leq x \leq 2$.
Comme on ne doit considérer que des réels x strictement négatifs, l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est
$$S = [-1/2, 0[.$$

2. **Résoudre l'équation en l'inconnue réelle x**
$$2\cos^2(x) = 2-\cos(2x).$$
Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $]-\pi, \pi/2]$.
Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$. Comme $2\cos^2(x) = \cos(2x)+1$, on a
$$\begin{aligned} &2\cos^2(x) = 2-\cos(2x) \\ &\quad \Leftrightarrow \quad \cos(2x)+1 = 2-\cos(2x) \\ &\quad \Leftrightarrow \quad 2\cos(2x) = 1 \\ &\quad \Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \frac{1}{2} \\ &\quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{-\pi}{6} + k\pi. \end{aligned}$$
L'équation donnée a donc pour ensemble de solutions
$$S \;=\; \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $]-\pi, \pi/2]$ sont
$$-\frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}.$$

3. **Problème élémentaire : rédiger votre réponse.**
La moyenne des résultats à un contrôle est 9,8/20. Si on ne tient pas compte de la plus mauvaise cote 5/20 obtenue par un seul étudiant, on obtient une moyenne de 10/20. Combien d'étudiants ont effectué ce contrôle ?
Solution. Soit x le nombre d'étudiants qui ont effectué ce contrôle.
D'une part, puisque la moyenne est de 9,8/20 le total des cotes est de $9,8x$.
D'autre part, puisque la moyenne est de 10/20 si on ne tient pas compte de la plus mauvaise cote 5/20 obtenue par un seul étudiant, le total des cotes est de $10(x-1)+5$.

En comparant ces deux expressions du total, on obtient l'équation à une inconnue $9,8x = 10(x-1)+5$; sa résolution est la suivante :

$$\begin{aligned} 9,8x = 10(x-1)+5 &\Leftrightarrow 9,8x - 10x = -10+5 \\ &\Leftrightarrow 0,2x = 5 \\ &\Leftrightarrow x = 25. \end{aligned}$$

Par conséquent, 25 étudiants ont effectué ce contrôle.

4. $\boxed{\text{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

   Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

   Série A

   (a) L équation cartésienne $x^2 - 4y^2 + 4x = 0$ est celle d'une
   ☐ ellipse dont les foyers sont sur l'axe X ☐ ellipse dont les foyers sont sur l'axe Y
   ♣ hyperbole dont les foyers sont sur l'axe X ☐ hyperbole dont les foyers sont sur l'axe Y
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Parmi les fonctions (de x) définies explicitement ci-dessous, quelle est celle qui est toujours paire sur son domaine de définition ?

   ♣ $\exp(|x|) - a$ ☐ $\sqrt{x} - a$ ☐ $(x-a)^2$ ☐ $|x-a|$
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

   (c) Quelle est la partie imaginaire du nombre complexe z si

   $$z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{-1+i} \text{ ?}$$

   ☐ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\sqrt{3}$ ♣ $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ☐ $i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

   Série B

   (a) L équation cartésienne $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$ est celle d'une
   ♣ ellipse dont les foyers sont sur l'axe X ☐ ellipse dont les foyers sont sur l'axe Y
   ☐ hyperbole dont les foyers sont sur l'axe X ☐ hyperbole dont les foyers sont sur l'axe Y
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Parmi les fonctions (de x) définies explicitement ci-dessous, quelle est celle qui est toujours paire sur son domaine de définition ?
   ☐ $\exp(x) - a$ ☐ $\sqrt{x} - a$ ♣ $-a$ ☐ $|x-a|$
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

   (c) Quelle est la partie imaginaire du nombre complexe z si

   $$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i} \text{ ?}$$

   ☐ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\sqrt{3}$ ☐ $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ☐ $i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
   ♣ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.