Mathématiques générales I (MATH2007)

Année académique 2023-2024

Interrogation du 10 novembre 2023
Questionnaire et corrigé

Version 13 novembre 2023

Mathématiques générales I, MATH 2007

Questionnaire de l'interrogation du vendredi 10 novembre 2023

Consignes

- *Compléter le tableau ci-dessous avant de rendre vos copies accompagnées de cette feuille.*
- Sur ***chaque*** feuille, indiquer vos **NOM** (en caractères d'imprimerie), prénom et section.
- Répondre aux différentes questions sur des ***feuilles séparées***.
- ***Justifier toutes vos réponses, SAUF celles du QCM***.
- Les calculatrices, montres connectées (style iWatch), gsm etc ... sont interdits.
- Le Journal de Bord est permis et sera fourni ***sur demande***.

NOM : ....

Prénom : ....

Matricule : ....

SECTION :................................

Signature :

Indiquer une croix dans la colonne correspondante pour les questions ouvertes auxquelles vous ne répondez PAS.

Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5

QCM

Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0
Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

Théorie (3 points)

(1) Si s est un réel strictement négatif, que vaut $\sqrt{s^2\,(1-2s)^2}$?

(a) ☐ $2s^2 - s$
(b) ☐ $-2s^2 + s$
(c) ☐ $2s^2 + s$
(d) ☐ $-2s^2 - s$
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trois vecteurs non nuls. L'expression $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\left((\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}\right)$

(a) ☐ n'a jamais de sens.
(b) ☐ définit toujours un nombre.
(c) ☐ définit toujours un vecteur orthogonal à $\vec{c}$
(d) ☐ définit toujours un vecteur orthogonal à $\vec{a}\wedge\vec{b}$
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Si r et s sont des réels non nuls, l'équation $rx^2 + sy^2 = 1$ est toujours l'équation cartésienne
(a) □ d'une droite.
(b) □ d'une parabole.
(c) □ d'une ellipse.
(d) □ d'une hyperbole.
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices (3 points)

(4) Que vaut $\sin(19\pi/6)$?
(a) □ $-\sqrt{3}/2$
(b) □ $-1/2$
(c) □ $1/2$
(d) □ $\sqrt{3}/2$
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(5) Quelle est la partie imaginaire du conjugué du carré du complexe $z = i(1+i)$?
(a) □ 0
(b) □ 1
(c) □ 2
(d) □ $-2i$
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(6) Soit α un réel de l'intervalle $]3\pi/2, 2\pi[$. Que vaut l'expression suivante ?

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sqrt{\tan^2(\alpha)}$$

(a) □ $\sin^2(\alpha)/\cos(\alpha)$
(b) □ $-\sin^2(\alpha)/\cos(\alpha)$
(c) □ $\sin(\alpha)$
(d) □ $-\sin(\alpha)$
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie (3 points)

Question 1
(1.1) Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs.
(1.2) On se place dans le plan muni d'une base orthonormée. Quelle est l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs ? Justifier votre réponse.

Exercices (11 points)

Question 2 (3 points) ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***
Un tonneau rempli à moitié d'eau pèse 56 kg. Rempli aux deux tiers d'eau, il pèse un centième de tonne de plus. Quelle est la capacité en litres (l) de ce tonneau et quelle est la masse en kilogrammes (kg) du tonneau vide ?

Question 3 (2 points) Résoudre l'inéquation $x \leq 1/x$ en l'inconnue réelle x.

Question 4 (3 points) Déterminer une équation cartésienne de la droite d qui passe par l'intersection des droites d_1 et d_2 respectivement d'équation $2x+y=0$ et $x+2y+2=0$ et qui est orthogonale à d_2. Représenter ensuite d, d_1, d_2 dans un même repère orthonormé.

Question 5 (3 points) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$\cos(2x) - 5\cos(x) = -3.$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, 0]$.

Mathématiques générales I, MATH 2007
Corrigé de l'interrogation du vendredi 10 novembre 2023

QCM

Théorie

(1) Si s est un réel strictement négatif, que vaut $\sqrt{s^2\,(1-2s)^2}$?

(a) ♣ $2s^2 - s$
(b) ☐ $-2s^2 + s$
(c) ☐ $2s^2 + s$
(d) ☐ $-2s^2 - s$
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trois vecteurs non nuls. L'expression $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\left((\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}\right)$

(a) ☐ n'a jamais de sens.
(b) ☐ définit toujours un nombre.
(c) ☐ définit toujours un vecteur orthogonal à $\vec{c}$
(d) ♣ définit toujours un vecteur orthogonal à $\vec{a}\wedge\vec{b}$
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Si r et s sont des réels non nuls, l'équation $rx^2 + sy^2 = 1$ est toujours l'équation cartésienne

(a) ☐ d'une droite.
(b) ☐ d'une parabole.
(c) ☐ d'une ellipse.
(d) ☐ d'une hyperbole.
(e) ♣ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices

(4) Que vaut $\sin(19\pi/6)$?

(a) ☐ $-\sqrt{3}/2$
(b) ♣ $-1/2$
(c) ☐ $1/2$
(d) ☐ $\sqrt{3}/2$
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(5) Quelle est la partie imaginaire du conjugué du carré du complexe $z = i(1+i)$?

(a) ☐ 0
(b) ☐ 1
(c) ♣ 2
(d) ☐ $-2i$
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(6) Soit α un réel de l'intervalle $]3\pi/2, 2\pi[$. Que vaut l'expression suivante ?

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sqrt{\tan^2(\alpha)}$$

(a) ☐ $\sin^2(\alpha)/\cos(\alpha)$
(b) ☐ $-\sin^2(\alpha)/\cos(\alpha)$
(c) ☐ $\sin(\alpha)$
(d) ♣ $-\sin(\alpha)$
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1
(1.1) Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs.
(1.2) On se place dans le plan muni d'une base orthonormée. Quelle est l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs ? Justifier votre réponse.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours.*

Exercices

Question 2 ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***
Un tonneau rempli à moitié d'eau pèse 56 kg. Rempli aux deux tiers d'eau, il pèse un centième de tonne de plus. Quelle est la capacité en litres (l) de ce tonneau et quelle est la masse en kilogrammes (kg) du tonneau vide ?

Exemple de résolution. Soit x la capacité en litres du tonneau et soit y sa masse en kilogrammes. On se rappelle aussi que 1 litre d'eau a une masse de 1 kg.

Cela étant on dit que rempli à moitié d'eau, le tonneau pèse 56 kg ; cela s'écrit

$$y + \frac{x}{2} \; = \; 56.$$

On dit aussi que rempli aux deux tiers il pèse un centième de tonne de plus, c'est-à-dire 10 kilogrammes de plus ; cela s'écrit

$$y + \frac{2x}{3} \; = \; 66.$$

On obtient donc le système d'équations

$$\begin{cases} y + x/2 \; = \; 56 \\ y + 2x/3 \; = \; 66. \end{cases}$$

On a successivement

$$\begin{aligned} \begin{cases} y + x/2 \; = \; 56 \\ y + 2x/3 \; = \; 66 \end{cases} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x/3 - x/2 \; = \; 66 - 56 \\ y + x/2 \; = \; 56 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x/6 \; = \; 10 \\ y + x/2 \; = \; 56 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \; = \; 60 \\ y \; = \; 56 - 30 = 26. \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusion, la masse du tonneau est de 26 kilogrammes et sa capacité est de 60 litres.

Question 3 Résoudre l'inéquation $x \leq 1/x$ en l'inconnue réelle x.

Solution. Comme x est au dénominateur, on ne doit pas considérer le cas $x = 0$.

Cela étant, d'une part si $x > 0$ alors on a les équivalences suivantes

$$x \leq \frac{1}{x} \; \Leftrightarrow \; x^2 \leq 1 \; \Leftrightarrow \; x \in]0, 1].$$

D'autre part si $x < 0$ on a les équivalences suivantes

$$x \leq \frac{1}{x} \; \Leftrightarrow \; x^2 \geq 1 \; \Leftrightarrow \; x \in]-\infty, -1].$$

Les solutions sont donc les réels de l'ensemble

$$]-\infty, -1] \cup]0, 1].$$

<u>Question 4</u> Déterminer une équation cartésienne de la droite d qui passe par l'intersection des droites d_1 et d_2 respectivement d'équation $2x + y = 0$ et $x + 2y + 2 = 0$ et qui est orthogonale à d_2. Représenter ensuite d, d_1, d_2 dans un même repère orthonormé.

Solution. Cherchons le point d'intersection des deux droites, c'est-à-dire résolvons le système

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

On a successivement

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x + 2(-2x) + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -3x = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2/3 \\ y = -4/3; \end{cases} \end{aligned}$$

le point d'intersection a donc pour coordonnées $(2/3, -4/3)$.

Ensuite, comme la droite d est orthogonale à la droite d_2 d'équation cartésienne $x + 2y + 2 = 0$, un vecteur directeur de d a pour composantes $(1, 2)$.

Il s'ensuit que d a pour équation cartésienne

$$\frac{x - 2/3}{1} = \frac{y + 4/3}{2}.$$

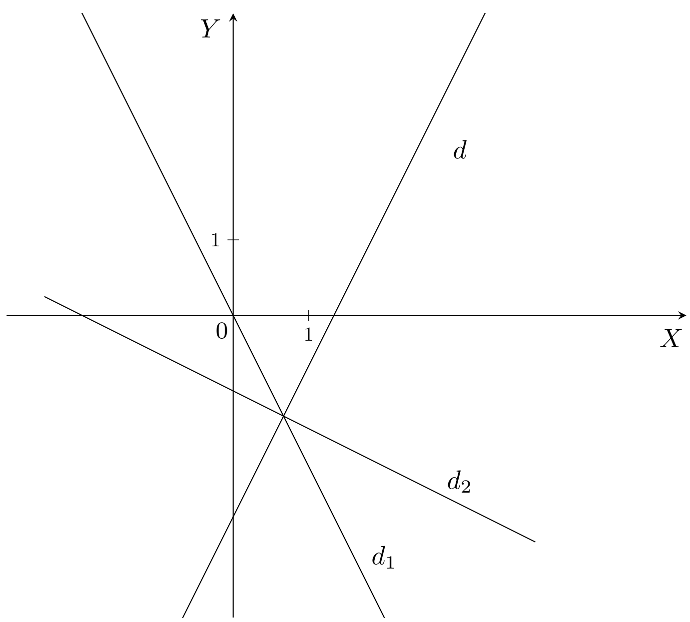
Comme on a

$$\frac{x - 2/3}{1} = \frac{y + 4/3}{2} \Leftrightarrow 2x - \frac{4}{3} = y + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 2x - y - \frac{8}{3} = 0,$$

l'équation de d s'écrit aussi

$$2x - y - \frac{8}{3} = 0.$$

La représentation des droites est la suivante.



<u>Question 5</u> Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$\cos(2x) - 5\cos(x) = -3.$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, 0]$.

Solution. Quel que soit le réel x, on a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ et dès lors

$$\cos(2x) - 5\cos(x) = -3 \;\Leftrightarrow\; 2\cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0.$$

Considérons donc l'équation polynomiale du second degré $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Le réalisant (ou discriminant) est égal à $25 - 16 = 9$ et dès lors les solutions de cette équation sont les réels $(5+3)/4 = 2$ et $(5-3)/4 = 1/2$. Comme le cosinus d'un réel est un réel de l'intervalle $[-1, 1]$ on doit rejeter la solution 2 quand on revient à l'équation du second degré en $\cos(x)$. On obtient ainsi finalement

$$\begin{aligned} 2\cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} : x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}$$

Cela étant, la seule solution qui appartient à l'intervalle $[-\pi, 0]$ est le réel $-\pi/3$.