



Mathématiques générales I (MATH2007)
Année académique 2024-2025

INTERROGATION DU 8 NOVEMBRE 2024
QUESTIONNAIRE ET CORRIGÉ

Mathématiques générales I, MATH 2007
Questionnaire de l'interrogation du vendredi 8 novembre 2024

Consignes

- Compléter le tableau ci-dessous avant de rendre vos copies accompagnées de cette feuille.
- Sur **chaque** feuille, indiquer vos **NOM** (en caractères d'imprimerie), prénom et section.
- Répondre aux différentes questions sur des **feuilles séparées**.
- **Justifier toutes vos réponses, SAUF celles du QCM.**
- Les calculatrices, montres connectées (style iWatch), gsm etc ... sont interdits.
- Le Journal de Bord est permis et sera fourni **sur demande**.

NOM :

Prénom :

Matricule :

SECTION :

Signature :

Indiquer une croix dans la colonne correspondante pour les questions ouvertes auxquelles vous ne répondez PAS.

Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5

QCM

Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

Théorie

- (1) Si s est un réel strictement négatif, que vaut $\sqrt{(s-1)^2 s^2}$?
- (a) ☐ $s - s^2$
 - (b) ☐ $s + s^2$
 - (c) ☐ $-s + s^2$
 - (d) ☐ $-s - s^2$
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (2) Soient $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ trois vecteurs non nuls. L'expression $(\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge ((\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{z})$
- (a) ☐ n'a jamais de sens.
 - (b) ☐ définit toujours un nombre.
 - (c) ☐ définit toujours un vecteur orthogonal à $\vec{z}$.
 - (d) ☐ définit toujours un vecteur orthogonal à $\vec{y} \wedge \vec{x}$.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

- (3) Si r et s sont des réels non nuls, l'équation $rx^2 - sy^2 = 1$ est toujours l'équation cartésienne
- (a) ☐ d'une droite.
 - (b) ☐ d'une parabole.
 - (c) ☐ d'une ellipse.
 - (d) ☐ d'une hyperbole.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices

- (4) Que vaut $\sin(4)$?
- (a) ☐ Il n'existe pas.
 - (b) ☐ $\sqrt{1 - \cos^2(4)}$
 - (c) ☐ $4 \sin^2(2) \cos^2(2)$
 - (d) ☐ $|\cos(4)| \tan(4)$
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (5) Quelle est la partie réelle de l'inverse du complexe $z = i(1 + i)$?
- (a) ☐ 0
 - (b) ☐ 1/2
 - (c) ☐ -1/2
 - (d) ☐ $i/2$
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (6) Soit α un réel de l'intervalle $] \pi/2, \pi[$. Que vaut l'expression suivante ?

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sqrt{\tan^2(\alpha)}$$

- (a) ☐ $\sin^2(\alpha)/\cos(\alpha)$
- (b) ☐ $-\sin^2(\alpha)/\cos(\alpha)$
- (c) ☐ $\cos(\alpha)$
- (d) ☐ $-\cos(\alpha)$
- (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1 On donne des complexes r, s .

- (1.1) Démontrer que l'équation $z^2 + rz + s = 0$ en l'inconnue z possède toujours deux solutions.
- (1.2) Démontrer que lorsque r et s sont réels et que $r^2 - 4s < 0$ alors les solutions sont des complexes conjugués.

Exercices

Question 2 **Problème élémentaire : rédiger votre réponse.**

Dans une armoire, on dispose de deux types de café : un café de type 1 à 11 euros le kilogramme (kg) et un café de type 2 à 20 euros le kilogramme.

On prend 20 kilogrammes de café de type 2 et on demande combien de grammes (g) de café de type 1 on doit prendre pour que le mélange des deux cafés revienne à 16 euros le kilogramme.

Question 3 Résoudre l'inéquation $|1 - 2x| \geq 1/x$ en l'inconnue réelle x .

Question 4 Dans un repère orthonormé, on donne les droites d_1 , d_2 et d_3 dont les équations cartésiennes sont

$$d_1 : 3x + y = 0 \quad d_2 : 3x + 2y = 2 \quad d_3 : x - 2y + 4 = 0.$$

Les droites d_1 et d_2 se coupent au point A , la droite d_2 coupe l'axe des abscisses au point B et la droite d_3 coupe l'axe des ordonnées au point C .

Déterminer

(4.1) les coordonnées cartésiennes des points A, B, C

(4.2) la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CA}$.

Question 5 Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x : $1 - \sin(4x) = 2 \sin^2(x)$. Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Mathématiques générales I, MATH 2007
Corrigé de l'interrogation du vendredi 8 novembre 2024

QCM

Théorie

- (1) Si s est un réel strictement négatif, que vaut $\sqrt{(s-1)^2 s^2}$?
- (a) ☐ $s - s^2$
 - (b) ☐ $s + s^2$
 - (c) ☒ $-s + s^2$
 - (d) ☐ $-s - s^2$
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (2) Soient $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trois vecteurs non nuls. L'expression $(\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge ((\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{z})$
- (a) ☐ n'a jamais de sens.
 - (b) ☐ définit toujours un nombre.
 - (c) ☐ définit toujours un vecteur orthogonal à $\vec{z}$.
 - (d) ☒ définit toujours un vecteur orthogonal à $\vec{y} \wedge \vec{x}$.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (3) Si r et s sont des réels non nuls, l'équation $rx^2 - sy^2 = 1$ est toujours l'équation cartésienne
- (a) ☐ d'une droite.
 - (b) ☐ d'une parabole.
 - (c) ☐ d'une ellipse.
 - (d) ☐ d'une hyperbole.
 - (e) ☒ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices

- (4) Que vaut $\sin(4)$?
- (a) ☐ Il n'existe pas.
 - (b) ☐ $\sqrt{1 - \cos^2(4)}$
 - (c) ☐ $4 \sin^2(2) \cos^2(2)$
 - (d) ☐ $|\cos(4)| \tan(4)$
 - (e) ☒ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (5) Quelle est la partie réelle de l'inverse du complexe $z = i(1 + i)$?
- (a) ☐ 0
 - (b) ☐ $1/2$
 - (c) ☒ $-1/2$
 - (d) ☐ $i/2$
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (6) Soit α un réel de l'intervalle $] \pi/2, \pi[$. Que vaut l'expression suivante ?

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sqrt{\tan^2(\alpha)}$$

- (a) ☒ $\sin^2(\alpha)/\cos(\alpha)$
- (b) ☐ $-\sin^2(\alpha)/\cos(\alpha)$

- (c) ☐ $\cos(\alpha)$
- (d) ☐ $-\cos(\alpha)$
- (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1

On donne des complexes r, s .

(1.1) Démontrer que l'équation $z^2 + rz + s = 0$ en l'inconnue z possède toujours deux solutions.

(1.2) Démontrer que lorsque r et s sont réels et que $r^2 - 4s < 0$ alors les solutions sont des complexes conjugués.

Pour la réponse : voir cours enseigné et syllabus du cours.

Exercices

Question 2 Problème élémentaire : rédiger votre réponse.

Dans une armoire, on dispose de deux types de café : un café de type 1 à 11 euros le kilogramme (kg) et un café de type 2 à 20 euros le kilogramme.

On prend 20 kilogrammes de café de type 2 et on demande combien de grammes (g) de café de type 1 on doit prendre pour que le mélange des deux cafés revienne à 16 euros le kilogramme.

Exemple de résolution. Soit x la masse en kilogrammes de café de type 1 à ajouter à 20 kilogrammes de café de type 2 pour que le mélange des deux cafés revienne à 16 euros le kilogramme. Le prix du mélange de x kilogrammes de café de type 1 à 11 euros le kilogramme et de 20 kilogrammes de café de type 2 à 20 euros le kilogramme s'écrit

$$11x + 20 \times 20.$$

On dit aussi que le mélange des deux cafés reviendra à 16 euros le kilogramme ; le prix s'écrit donc aussi

$$(x + 20) \times 16.$$

En comparant les deux expressions, on obtient l'équation du premier degré

$$11x + 20 \times 20 = (x + 20) \times 16 \Leftrightarrow 11x + 400 = 16x + 320 \Leftrightarrow 5x = 80 \Leftrightarrow x = 16.$$

En conclusion, comme 1 kg équivaut à 1000 g, la masse du café de type 1 à ajouter pour avoir le mélange adéquat est de 16000 grammes.

Question 3 Résoudre l'inéquation $|1 - 2x| \geq 1/x$ en l'inconnue réelle x .

Solution. Comme x est au dénominateur, on ne doit pas considérer le cas $x = 0$.

On a aussi

$$|1 - 2x| = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

Cela étant, si $x < 0$, alors le membre de droite de l'inéquation est négatif et l'inéquation est toujours vraie.

Dès lors, d'une part, pour $x \in]0, 1/2[$ on a les équivalences suivantes

$$|1 - 2x| = 1 - 2x \geq 1/x \Leftrightarrow x - 2x^2 \geq 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 \leq 0.$$

L'inéquation n'est jamais vérifiée puisque le polynôme $x \mapsto 2x^2 - x + 1$ est toujours strictement positif (son discriminant vaut $-7 < 0$).

D'autre part, pour $x \in [1/2, +\infty[$, on a les équivalences suivantes

$$|1 - 2x| = 2x - 1 \geq 1/x \Leftrightarrow 2x^2 - x \geq 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 \geq 0.$$

Le polynôme $x \mapsto 2x^2 - x - 1$ possède les zéros $-1/2$ et 1 et est à valeurs positives si et seulement si $x \in]-\infty, -1/2] \cup [1, +\infty[$. Comme on est ici dans le cas $x \in [1/2, +\infty[$, l'inégalité ci-dessus n'est donc vérifiée que pour les réels de l'intervalle $[1, +\infty[$.

Les solutions de l'inéquation donnée sont donc les réels de l'ensemble

$$]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[.$$

Question 4 Dans un repère orthonormé, on donne les droites d_1 , d_2 et d_3 dont les équations cartésiennes sont

$$d_1 : 3x + y = 0 \quad d_2 : 3x + 2y = 2 \quad d_3 : x - 2y + 4 = 0.$$

Les droites d_1 et d_2 se coupent au point A , la droite d_2 coupe l'axe des abscisses au point B et la droite d_3 coupe l'axe des ordonnées au point C .

Déterminer

(4.1) les coordonnées cartésiennes des points A, B, C .

(4.2) la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CA}$.

Solution. (4.1) Cherchons le point d'intersection A des droites d_1 et d_2 , c'est-à-dire résolvons le système

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + 2y = 2. \end{cases}$$

On a successivement

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -y/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -2/3. \end{cases}$$

Le point A a donc pour coordonnées $(-2/3, 2)$.

Comme l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$, remplaçons y par 0 dans l'équation de d_2 : on trouve que le point B a pour coordonnées $(2/3, 0)$. Enfin, comme l'axe des ordonnées a pour équation $x = 0$, remplaçons x par 0 dans l'équation de d_3 : on trouve que le point C a pour coordonnées $(0, 2)$.

(4.2) Vu ce qui précède, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont respectivement $(4/3, -2)$ et $(-2/3, 0)$. Il s'ensuit que produit scalaire demandé vaut

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CA} = \frac{4}{3} \times \frac{-2}{3} = -\frac{8}{9}.$$

Question 5 Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x : $1 - \sin(4x) = 2 \sin^2(x)$. Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Solution. Quel que soit le réel x , on a $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$ et $\sin(4x) = 2 \sin(2x) \cos(2x)$; dès lors, on a successivement

$$\begin{aligned} 1 - \sin(4x) &= 2 \sin^2(x) \\ \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2(x) &= \sin(4x) \\ \Leftrightarrow \cos(2x) &= 2 \sin(2x) \cos(2x) \\ \Leftrightarrow \cos(2x) &= 0 \text{ OU } \sin(2x) = 1/2 \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2x &= \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ OU } \left(\exists k \in \mathbb{Z} : 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right) \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x &= \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ OU } \left(\exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \right). \end{aligned}$$

Dès lors, l'équation de départ a pour ensemble de solutions

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont les réels

$$-\frac{11\pi}{12}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12} \text{ et } \frac{3\pi}{4}.$$