1, 2, 3...Sciences

Année académique 2019-2020

Exercices de mathématique

Exercices récapitulatifs : correction

Version 22 novembre 2019

Exercices divers

1. **(*) Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [2\pi, 3\pi]$)**

   (a) $2x(x-1) = |x-1|$ (c) $\sin(2x)\cos(x) = \sin(x)$

   (b) $\dfrac{|2-x|}{x^2-4} \geq x-2$ (d) $\cos(2x) \leq \cos(x)$

   Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :

   (a) $S = \{1,\ -1/2\}$ (c) $S = \left\{2\pi,\ 3\pi,\ \dfrac{9\pi}{4},\ \dfrac{11\pi}{4}\right\}$

   (b) $S =]-\infty, -2[\ \cup\ [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup\ ]2, \sqrt{5}]$ (d) $S = \left[2\pi,\ \dfrac{8\pi}{3}\right]$

2. **(*) Si c'est possible, simplifier au maximum les expressions suivantes :**

   (a) $\sin(\ln(e^{-\pi/6})) + \cos(\text{tg }(-\pi/3))$

   (b) $\text{arcos}(1 - \sin(5\pi/6)) + \arcsin(\sin(7\pi/6))$

   Solution. La première expression vaut $-\dfrac{1}{2} + \cos(\sqrt{3})$ et la deuxième vaut $\frac{\pi}{6}$.

3. **(*) Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(1,-1,3)$, $B(-1,2,1)$ et $C(3,2,-1)$. Calculer**

   (a) $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

   (b) **les composantes de $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$**

   (c) les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{BC}$ sur $\overrightarrow{AC}$.

   Solution. Le produit scalaire vaut -8, les composantes du produit vectoriel sont $(-6,\ -12,\ -12)$ et les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{BC}$ sur $\overrightarrow{AC}$ sont $\dfrac{16}{29}(2,\ 3,\ -4)$.

4. **(*) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.**

   (a) $x^2 + 3 = 2ix$ (b) $8 - x^3 = 0$

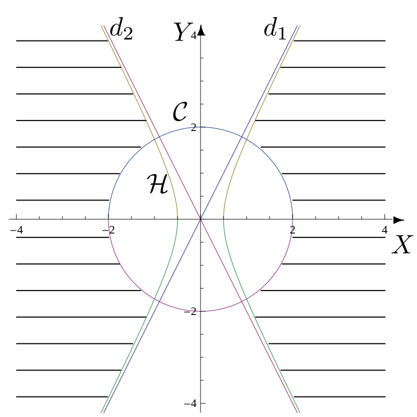
   Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :

   (a) $S = \{-i,\ 3i\}$ (b) $S = \{2,\ -1 - i\sqrt{3},\ -1 + i\sqrt{3}\}$

5. **Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

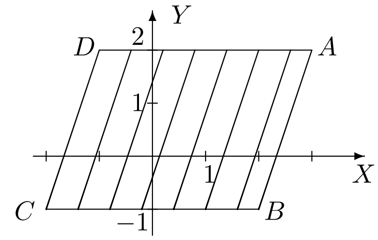
   $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 - 1 \geq y^2 \geq 4 - x^2\}.$$

   Solution. On note $d_1 : y = 2x,\ d_2 : y = -2x,\ \mathcal{C} : x^2 + y^2 = 4$ et $\mathcal{H} : 4x^2 - y^2 = 1$.



   Les points des bords sont compris dans l'ensemble.

6. **Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré ci-contre**
   (a) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
   (b) en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses



Solution. Les sommets du parallélogramme étant les points A(3,2), B(2,-1), C(-2,-1) et D(-1,2), les bords sont les droites d'équation $AB: y = 3x - 7 \Leftrightarrow x = \frac{y+7}{3}$, $BC: y = -1$, $CD: y = 3x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{y-5}{3}$ et $DA: y = 2$.

L'ensemble hachuré est donc décrit par

(a) $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,-1],\ y \in [-1, 3x+5]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,2],\ y \in [-1,2]\}$$
$$\cup\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [2,3],\ y \in [3x-7, 2]\}$$

(b) $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,2],\ x \in \left[\tfrac{y-5}{3}, \tfrac{y+7}{3}\right]\}$$

7. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{x-3}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{|1-x|}{\sqrt{1+x^2}}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\exp(2x)-1}{x}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (\ln(2x+5) - \ln(2x))$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln(2x+5) - \ln(2x))$

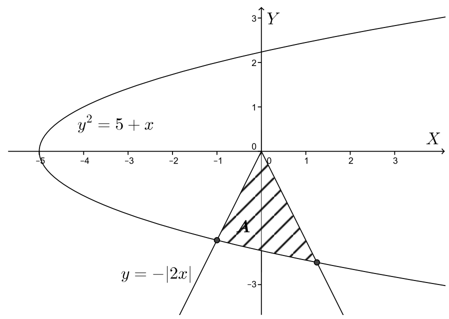
Solution. Les limites peuvent toutes être envisagées sauf $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\ln(2x+5) - \ln(2x))$ puisque le domaine de définition de la fonction est minoré.
Elles valent respectivement (par ordre alphabétique) 1, 1, $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$, 2 et 0^+.

8. **Où la fonction $x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-4x^2})$ est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première.**

Solution. La fonction est définie sur $[-1/2, 1/2]$ et dérivable sur $]-1/2, 0[\ \cup\ ]0, 1/2[$; sa dérivée première est la fonction
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}} & \text{si } x \in]-1/2, 0[\\ \dfrac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} & \text{si } x \in]0, 1/2[\end{cases}$$

9. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -|2x| \geq y \text{ et } y^2 \leq 5 + x\}.$$
Donner aussi une représentation graphique de l'ensemble.

Solution. Voici une représentation graphique de l'ensemble :



Les abscisses des points d'intersection des courbes s'obtiennent à partir du système d'équations $\begin{cases} y^2 = 5 + x \\ y = -|2x| \end{cases}$. On trouve -1 et $\frac{5}{4}$.

Les fonction $x \mapsto 2x - (-\sqrt{5+x})$ et $x \mapsto -2x - (-\sqrt{5+x})$ sont continues sur $[-5, +\infty[$ donc respectivement sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 5/4]$, fermés bornés. Ells y sont donc intégrables. Dès lors, l'aire recherchée est donnée par

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} (2x + \sqrt{5+x})\ dx + \int_{0}^{5/4} (-2x + \sqrt{5+x})\ dx \\ &= \left[x^2 + \frac{2}{3}(5+x)\sqrt{5+x}\right]_{-1}^{0} + \left[-x^2 + \frac{2}{3}(5+x)\sqrt{5+x}\right]_{0}^{5/4} \\ &= \frac{121}{48}. \end{aligned}$$

10. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.**

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(4x)}{x}\ dx$ (b) $\int_{-\infty}^{0} x\, e^{2x}\ dx$ (c) $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{2+x}\ dx$

(d) $\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\ dx$ (e) $\displaystyle\int_4^5 \frac{2}{x(x^2-4x+4)}\ dx$

Solution. Toutes les fonctions sont intégrables sur l'intervalle considéré sauf la fonction $x \mapsto \frac{1}{2+x}$ qui n'est ni intégrable en $+\infty$, ni intégrable en -2. Les intégrales valent respectivement

(a) $\dfrac{1}{2} + 2\ln 2$ (b) $-\dfrac{1}{4}$ (d) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (e) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{6}\right) + \dfrac{1}{6}$

11. **Résoudre l'équation suivante en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

$$D^2 f(x) + f(x) = x + \sin(x) + \frac{1}{\cos(x)}$$

Solution. Les solutions sont les fonctions

$$f(x) = (C_1 + \ln(|\cos(x)|))\cos(x) + (C_2 + x)\sin(x) + x - \frac{x}{2}\cos(x),\ \ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

C_1 et C_2 étant des constantes complexes arbitraires.

(*) Problèmes élémentaires

1. **La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par**
   (a) $\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{2}$ **si cette voiture est équipée de freins normaux**
   (b) v **si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.**

   Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.

   Solution. La voiture équipée de freins ABS est plus performante pour des vitesses strictement supérieures à 50 km/h.

2. **Un homme se promenant sur une route vit venir à lui d'autres hommes et il leur dit "J'aurais aimé que vous soyez deux fois autant que vous êtes, plus la moitié de la moitié de ce double, plus la moitié de ce dernier nombre. Ainsi avec moi vous seriez 100."**
   Qu'il dise celui qui le peut, combien étaient les hommes qu'il a vu venir à lui. (Alcuin, 8 ème siècle)

   Solution. L'homme qui se promène a vu venir à lui 36 hommes.

QCM

1. Si f est définie sur $\mathbb{R}$, le graphique de $F(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ est
   (a) le symétrique du graphique de f par rapport à la première bissectrice
   (b) le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe X
   ♣ le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe Y
   (d) le symétrique du graphique de f par rapport à l'origine
   (e) aucune réponse correcte
2. Dans le plan muni d'un repère, une droite a toujours une équation cartésienne du type $y = mx + p$, $(m, p \in \mathbb{R})$
   (a) vrai
   ♣ faux
3. Etant donné deux vecteurs non nuls, tout autre vecteur du plan peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire de ceux-ci.
   (a) vrai
   ♣ faux
4. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante
   (a) vrai
   ♣ faux
5. Le domaine de la fonction donnée par $\cos(\cos x)$ est l'intervalle [-1,1]
   (a) vrai
   ♣ faux
6. Le cosinus du carré d'un nombre réel
   (a) est égal au carré du cosinus du réel
   (b) est égal au double du cosinus du réel
   (c) est égal au double du produit du sinus et du cosinus du réel
   ♣ aucune des réponses précédentes n'est correcte