1, 2, 3...Sciences

Année académique 2020-2021

Exercices de mathématiques

Révisions en vue de l'examen du 4/01/2021 : correction

Version 27 novembre 2020

Exercices divers

1. **(*) Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [\pi, 3\pi]$)**

(a) $3x|x-2| = x-2$ $\qquad$ (b) $\dfrac{|1-x|}{x^2-1} \geq x-1$

(c) $\cos(3x) - \sin(x) = 0$ $\qquad$ (d) $\sin(2x) \leq \sin(x)$

Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :
(a) $S = \{-1/3,\ 2\}$ $\qquad$ (b) $S =]-\infty, -1[\ \cup \{0\} \cup\ ]1, \sqrt{2}]$

(c) $S = \left\{\dfrac{9\pi}{8},\ \dfrac{13\pi}{8},\ \dfrac{7\pi}{4},\ \dfrac{17\pi}{8},\ \dfrac{21\pi}{8},\ \dfrac{11\pi}{4}\right\}$ $\qquad$ (d) $S = \{\pi\} \cup \left[\dfrac{5\pi}{3},\ 2\pi\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{3},\ 3\pi\right]$

2. **(*) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes :**
   (a) $\cos(\ln(e^{-2\pi/3})) + \sin(\operatorname{tg}(3\pi/4))$
   (b) $\arcsin(1 - \cos(7\pi/6)) + \operatorname{arcos}(\cos(4\pi/3))$

Solution. La première expression est définie et vaut $-\dfrac{1}{2} - \sin(1)$; la deuxième n'est pas définie.

3. **(*) Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(-1, 0, a)$, $B(1, 2, -1)$ et $C(4, 1, 2)$ ($a \in \mathbb{R}$). Calculer**
   (a) $3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
   (b) **les composantes de $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$**
   (c) **les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{BC}$.**

Solution. Le produit scalaire vaut $3 - 9a$ et le produit vectoriel est le vecteur de composantes $(5 - a,\ -9 - 3a,\ -8)$.
La projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur de composantes $\left(\dfrac{60-9a}{19}, \dfrac{3a-20}{19}, \dfrac{60-9a}{19}\right)$

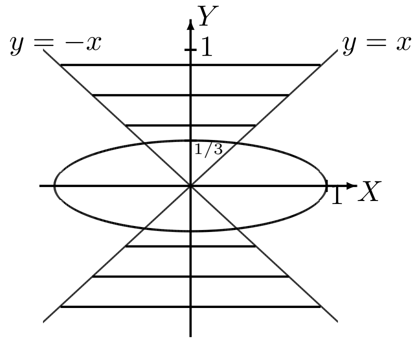
4. **(*) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.**
   (a) $x^2 + 2 = -ix$
   (b) $27 + x^3 = 0$

Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :

(a) $S = \{-2i,\ i\}$ $\qquad$ (b) $S = \{-3,\ \dfrac{3(1 - i\sqrt{3})}{2},\ \dfrac{3(1 + i\sqrt{3})}{2}\}$

5. **Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

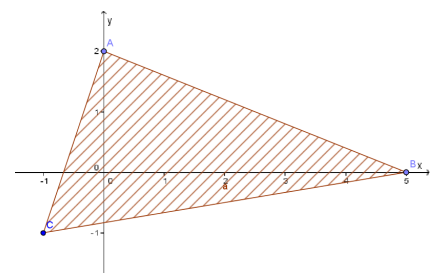
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq x^2 \geq 1 - 9y^2\}.$$



Les points de l'ensemble sont ceux de la partie hachurée.
Les points des bords sont compris dans l'ensemble.

6. **Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant**

   (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
   (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



Solution.
a) Les trois sommets de ce triangle sont les points A, B, C de coordonnées respectives $(0,2),(5,0)$ et $(-1,-1)$. Les droites qui délimitent le triangle ont pour équation $AB \equiv 2x+5y-10=0$, $AC \equiv 3x-y+2=0$, $BC \equiv x-6y-5=0$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

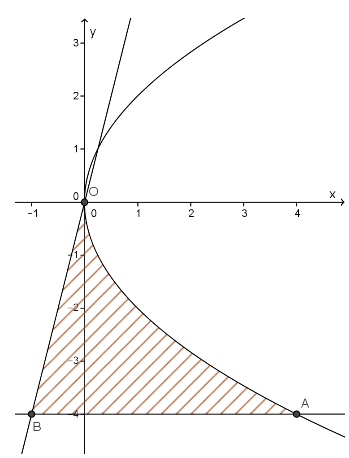
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-1,0],\ y\in\left[\frac{x-5}{6},3x+2\right]\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,5],\ y\in\left[\frac{x-5}{6},\frac{-2x+10}{5}\right]\right\}.$$

b) L'ensemble fermé hachuré est également décrit analytiquement par

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[-1,0],\ x\in\left[\frac{y-2}{3},6y+5\right]\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,2],\ x\in\left[\frac{y-2}{3},\frac{-5y+10}{2}\right]\right\}.$$

7. **Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant**

   (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
   (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



Solution.
a) Les trois points A, B, O sont respectivement de coordonnées $(4,-4),(-1,-4)$ et $(0,0)$.

Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $AB \equiv y = -4$, $BO \equiv 4x - y = 0$. La parabole a pour équation $y^2 = 4x$; dès lors, la courbe délimitant l'ensemble a pour équation $y = -2\sqrt{x}$.
L'ensemble fermé hachuré est donc décrit analytiquement par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-4,4x]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,4],\ y \in [-4,-2\sqrt{x}]\}.$$

b) L'ensemble fermé hachuré est également décrit analytiquement par

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-4,0],\ x \in \left[\frac{y}{4}, \frac{y^2}{4}\right]\right\}.$$

8. **Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et et telle que** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\pi/2)^+$ **,** $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ **et** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = (\pi/2)^-$**.**
Si elles existent et si les données sont suffisantes, déterminer les limites suivantes

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\ln(2x+3)}{|x+1|}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{|1+x|}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcotg}\left(\frac{x^3-1}{-2x}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-3x)-1}{2x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (\ln(-5x-1) - \ln|ex|)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-1}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f\left(\left|\frac{1-x^4}{3+x^2}\right|\right)$

Solution. Les limites peuvent toutes être envisagées sauf la limite (b). La limite (a) n'existe pas. Les autres valent respectivement π^-, $-\dfrac{3}{2}$, $\ln(5)-1$, -6 et $(\pi/2)^-$.

9. **Où la fonction $x \mapsto \arccos(\sqrt{1-x^2})$ est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première.**

Solution. La fonction est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,0[\ \cup\ ]0,1[$; sa dérivée première est la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1,0[\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

10. **On donne les fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivavilité et en calculer la dérivée première.**

(a) $\dfrac{x}{x^2-1}$

(b) $\cos(\sqrt{1-4x^2})$

(c) $\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

(d) $\operatorname{arctg}(\sin(x^2))$

(e) $x\ \pi^x$

(f) x^x

(g) $\ln(|2x+1|+x)$

(h) $(x-1)|x-1|$

Solution. Si A est le domaine de éfinition, B celui de continuité et C celui de dérivation, on a

Fonction	A = B	C	Dérivée
(a) $\dfrac{x}{x^2-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	C = A = B	$\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$
(b) $\cos(\sqrt{1-4x^2})$	$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$	$\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$	$\dfrac{4x\ \sin(\sqrt{1-4x^2})}{\sqrt{1-4x^2}}$
(c) $\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	C = A = B	$\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\cdot\dfrac{1}{(1-x)^2}$
(d) $\operatorname{arctg}(\sin(x^2))$	$\mathbb{R}$	C = A = B	$\dfrac{2x\cos(x^2)}{1+\sin^2(x^2)}$
(e) $x\ .\ \pi^x$	$\mathbb{R}$	C = A = B	$\pi^x(1+x\ln(\pi))$
(f) x^x	$]0,+\infty[$	C = A = B	$x^x(\ln(x)+1)$
(g) $\ln(\lvert 2x+1\rvert+x)$	$]-\infty,-1[\cup\left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$	C = A = B	$\begin{cases}\frac{1}{x+1} & \text{si} \quad x<-1\\ \frac{3}{3x+1} & \text{si} \quad x>-1/3\end{cases}$
(h) $(x-1)\lvert x-1\rvert$	$\mathbb{R}$	C = A = B	$2\lvert x-1\rvert$

11. **On donne la fonction f définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$. Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et calculer la dérivée première des fonctions $g : x \mapsto f(\cos(-x))$ et $h : x \mapsto f(\sqrt{1-4x^2})$.**
Solution. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable sur les intervalles du type $]k\pi,(k+1)\pi[, k\in\mathbb{Z}$; sa dérivée vaut $(Df)(\cos(-x))\ .\ \sin(-x)$.
La fonction h est définie et continue sur $[-1/2,1/2]$; elle est dérivable sur $]-1/2,0[\cup]0,1/2[$; sa dérivée vaut $\frac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}}(Df)(\sqrt{1-4x^2})$.

12. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.**

$$(a)\ \int_{-2}^{-1}\frac{\ln(-3x)}{x}dx \qquad (b)\ \int_{-\infty}^{0} xe^{3x}dx$$
$$(c)\ \int_{-\infty}^{1}\frac{1}{2-x}dx \qquad (d)\ \int_{-4}^{4}\sqrt{x^2}dx$$
$$(e)\ \int_{4}^{5}\frac{2}{x(x^2-6x+9)}dx \qquad (f)\ \int_{-1}^{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-4x+4)^2}}dx$$

Solution. Toutes les fonctions sont intégrables sur l'intervalle considéré sauf la fonction $x\mapsto\frac{1}{2-x}$ qui n'est pas intégrable en $-\infty$ et la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-4x+4)^2}}$ qui n'est pas intégrable en 2. Les intégrales valent respectivement

(a) $-\dfrac{1}{2}\ln 18.\ln 2$ (b) $-\dfrac{1}{9}$ (d) 16 (e) $\dfrac{2}{9}(\ln 5-3\ln 2)+\dfrac{1}{3}$

13. **Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes (f est la fonction inconnue)**

$$a)\ D^2f(x)+f(x)=e^{ix} \qquad b)\ 9D^2f(x)+6Df(x)+f(x)=\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

Solution. a) L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 1$ et ses zéros sont i et $-i$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}, \ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = i$, solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = Ax\, e^{ix}, \ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. Comme

$$Df_P(x) = A(1 + ix)e^{ix} \text{ et } D^2 f_P(x) = A(2i - x)e^{ix},$$

en remplaçant dans l'équation, on a

$$A(2i - x)e^{ix} + Ax\, e^{ix} = e^{ix}$$

et, en simplifiant, on obtient $A = -i/2$.
Ainsi, $f_P(x) = \dfrac{-i}{2} x\, e^{ix}, \ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_2 e^{-ix} + \left(c_1 - \frac{i}{2}x\right) e^{ix}, \ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
b) Les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$(c_1 x + c_2)e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{3}\right), \ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Problèmes élémentaires

1. **La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par**
   (a) $\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{2}$ **si cette voiture est équipée de freins normaux**
   (b) v **si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.**

   Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.

   Solution. La voiture équipée de freins ABS est plus performante pour des vitesses strictement supérieures à 50 km/h.

2. **Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 points comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?**

   Solution. L'étudiant a fourni 63 réponses correctes.