Mathématiques générales (MATH2007)

Année académique 2024-2025

Exercices de mathématiques

Révisions en vue de l'examen du 6/01/2025 : corrigé

Version 2 décembre 2024

$\boxed{\textbf{Exercices divers}}$

1. **(*) Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [\pi, 3\pi]$)**

$(a)\ 3x|x-2| = x-2$ $\qquad$ $(b)\ \dfrac{|1-x|}{x^2-1} \geq x-1$

$(c)\ \cos(3x) - \sin(x) = 0$ $\qquad$ $(d)\ \sin(2x) \leq \sin(x)$

Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :
(a) $S = \{-1/3,\ 2\}$ $\qquad$ (b) $S = \,]-\infty, -1[\, \cup \{0\} \cup \,]1, \sqrt{2}]$

(c) $S = \left\{ \dfrac{9\pi}{8},\ \dfrac{13\pi}{8},\ \dfrac{7\pi}{4},\ \dfrac{17\pi}{8},\ \dfrac{21\pi}{8},\ \dfrac{11\pi}{4} \right\}$ $\qquad$ (d) $S = \{\pi\} \cup \left[\dfrac{5\pi}{3},\ 2\pi\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{3},\ 3\pi\right]$

2. **(*) Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(-1, 0, a)$, $B(1, 2, -1)$ et $C(4, 1, 2)$ ($a \in \mathbb{R}$). Calculer**
   (a) $3\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC}$
   (b) **les composantes de $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$**
   (c) **les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{BC}$.**

Solution. Le produit scalaire vaut $3 - 9a$ et le produit vectoriel est le vecteur de composantes $(5-a,\ -9-3a,\ -8)$.
La projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur de composantes

$$\left(\frac{60-9a}{19}, \frac{3a-20}{19}, \frac{60-9a}{19}\right)$$

3. **(*) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.**
   (a) $x^2 + 2 = -ix$
   (b) $27 + x^3 = 0$

Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :

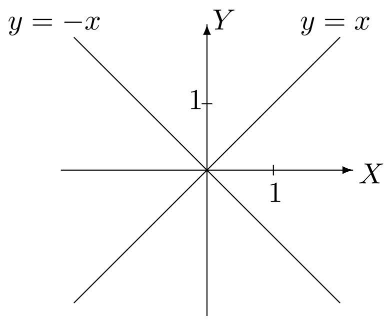
(a) $S = \{-2i,\ i\}$ $\qquad$ (b) $S = \left\{ -3,\ \dfrac{3(1-i\sqrt{3})}{2},\ \dfrac{3(1+i\sqrt{3})}{2} \right\}$

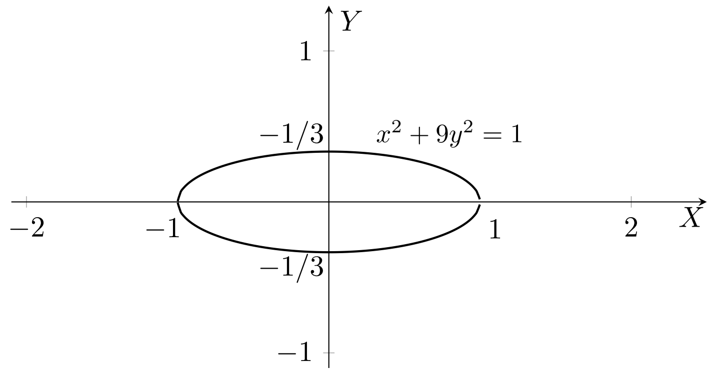
4. **(*) Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes :**

(a) $y^2 = x^2$ $\qquad$ **(b)** $x^2 = 1 - 9y^2$.

Représenter le graphique de ces courbes. Comment s'appellent-elles ?
Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s) éventuel(s) ?
Quelle est leur éventuelle excentricité ?

Solution. (a) L'équation $y^2 = x^2$ est celle des deux droites d'équation $y = -x$ et $y = x$.
(b) L'équation donnée est équivalente à $x^2 + 9y^2 = 1$. C'est l'équation d'une ellipse dont les foyers ont pour coordonnées $(-2\sqrt{2}/3, 0)$ et $(2\sqrt{2}/3, 0)$; son excentricité vaut $2\sqrt{2}/3$.
Voici les représentations graphiques de ces courbes :





5. **Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes :**
   (a) $\cos(\ln(e^{-2\pi/3})) + \sin(\operatorname{tg}(3\pi/4))$
   (b) $\arccos(\cos(4\pi/3))$

   Solution. Les deux expressions sont définies ; la première vaut $-1/2 - \sin(1)$ et la deuxième $2\pi/3$.

6. **Si elles existent et si les données sont suffisantes, déterminer les limites suivantes**

   $(a)\ \displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\ln(2x+3)}{|x+1|}$ $\qquad(b)\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{|1+x|}{\sqrt{1-x^2}}$

   $(c)\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcotg}\left(\frac{x^3-1}{-2x}\right)$ $\qquad(d)\ \displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\exp(-3x)-1}{2x}$

   $(e)\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} (\ln(-5x-1) - \ln|ex|)$ $\qquad(f)\ \displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-1}$

   $(g)\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f\left(\left|\frac{1-x^4}{3+x^2}\right|\right)$

   Solution. Les limites peuvent toutes être envisagées sauf la limite (b). La limite (a) n'existe pas. Les autres valent respectivement π^-, $-3/2$, $\ln(5)-1$, -6 et $(\pi/2)^-$.

7. **On donne les fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivavilité et en calculer la dérivée première.**

   $(a)\ \dfrac{x}{x^2-1}$ $\qquad(b)\ \cos(\sqrt{1-4x^2})$ $\qquad(c)\ \exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

   $(d)\ \operatorname{arctg}(\sin(x^2))$ $\qquad(e)\ x\ \pi^x$ $\qquad(f)\ x^x$

   $(g)\ \ln(|2x+1|+x)$ $\qquad(h)\ (x-1)|x-1|$ $\qquad(i)\ \arccos(\sqrt{1-x^2})$

   Solution. Si A est le domaine de définition, B celui de continuité et C celui de dérivation, on a

Fonction	A = B	C	Dérivée
(a) $\dfrac{x}{x^2-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	C = A = B	$\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

Fonction	A = B	C	Dérivée
(b) $\cos(\sqrt{1-4x^2})$	$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$	$\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$	$\dfrac{4x\ \sin(\sqrt{1-4x^2})}{\sqrt{1-4x^2}}$
(c) $\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	C = A = B	$\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right) \cdot \dfrac{1}{(1-x)^2}$
(d) $\operatorname{arctg}(\sin(x^2))$	$\mathbb{R}$	C = A = B	$\dfrac{2x\cos(x^2)}{1+\sin^2(x^2)}$
(e) $x \, . \, \pi^x$	$\mathbb{R}$	C = A = B	$\pi^x(1 + x\ln(\pi))$
(f) x^x	$]0, +\infty[$	C = A = B	$x^x(\ln(x)+1)$
(g) $\ln(\|2x+1\|+x)$	$]-\infty, -1[\cup \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$	C = A = B	$\begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{3}{3x+1} & \text{si} \quad x > -1/3 \end{cases}$
(h) $(x-1)\|x-1\|$	$\mathbb{R}$	C = A = B	$2\|x-1\|$
(i) $\arccos(\sqrt{1-x^2})$	$[-1, 1]$	$]-1, 0[\cup]0, 1[$	$\begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ si } x \in]-1, 0[\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ si } x \in]0, 1[\end{cases}$

8. **On donne la fonction f définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$. Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et calculer la dérivée première des fonctions**

$$g : x \mapsto f(\cos(-x)) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto f(\sqrt{1-4x^2}).$$

Solution. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}$; elle est dérivable sur les intervalles du type $]k\pi, (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$; sa dérivée est explicitement donnée par $Df(y) \times \sin(-x) = -\sin(x)\, Df(y)$ avec $y = \cos(-x) = \cos(x)$.

La fonction h est définie et continue sur $[-1/2, 1/2]$; elle est dérivable sur $]-1/2, 0[\cup]0, 1/2[$; sa dérivée est explicitement donnée par

$$\frac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}}(Df)(\sqrt{1-4x^2}).$$

9. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.**

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-3x)}{x} dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{3x} dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2-x} dx$ (d) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \sqrt{x^2} dx$

(e) $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{2}{x(x^2-6x+9)} dx$ (f) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-4x+4)^2}} dx$

Solution. Toutes les fonctions sont intégrables sur l'intervalle considéré sauf la fonction $x \mapsto 1/(2-x)$ qui n'est pas intégrable en $-\infty$ et la fonction $x \mapsto 1/\sqrt[3]{(x^2-4x+4)^2}$ qui n'est pas intégrable en 2. Les intégrales valent respectivement

(a) $-\dfrac{1}{2}\ln 18.\ln 2$ (b) $-\dfrac{1}{9}$ (d) 16 (e) $\dfrac{2}{9}(\ln 5 - 3\ln 2) + \dfrac{1}{3}$

10. **Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes (f est la fonction inconnue)**

$$a)\ D^2f(x) + f(x) = e^{ix} \qquad b)\ 9D^2f(x) + 6Df(x) + f(x) = x\, e^{x/3}$$

Solution. a) L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

L'équation homogène associée est $D^2f(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 1$ et ses zéros sont i et $-i$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1e^{ix} + c_2e^{-ix},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = i$, solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = Ax\, e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. Comme

$$Df_P(x) = A(1+ix)e^{ix} \text{ et } D^2f_P(x) = A(2i-x)e^{ix},$$

en remplaçant dans l'équation, on a

$$A(2i-x)e^{ix} + Ax\, e^{ix} = e^{ix}$$

et, en simplifiant, on obtient $A = -i/2$.

Ainsi, $f_P(x) = \dfrac{-i}{2}x\, e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_2e^{-ix} + \left(c_1 - \frac{i}{2}x\right) e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

b) Les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$(c_1x + c_2)\, e^{-x/3} + \frac{x-3}{4}\, e^{x/3},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

(*) **Problèmes élémentaires**

1. **La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par**

   (a) $(v/10)^2 + v/2$ **si cette voiture est équipée de freins normaux**

   (b) v **si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.**

   Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.

   Solution. La voiture équipée de freins ABS est plus performante pour des vitesses strictement supérieures à 50 km/h.

2. **Il y a 4 ans, un père avait le quadruple de l'âge de son fils. Dans 10 ans, son âge n'en sera plus que le double. Quels sont actuellement les âges de chacun ?**

   Solution. Actuellement, le père est âgé de 32 ans et son fils de 11 ans.