Année académique 2020-2021

Mathématique et physique : 1er bloc

Chimie - Géologie - Informatique

Test du 16-09-20

Correction

QUESTIONNAIRE

Problèmes élémentaires

Rédiger *une solution des problèmes simples suivants.*

Mathématique :

1. Une citerne cylindrique a une base circulaire de 4 m de rayon. Lors d'un orage, le niveau de son eau s'élève de 1 cm. A combien de litres par m^2 cela correspond-il ?

2. Si le réel exprimant le périmètre d'un carré évalué en mm est égal au réel exprimant sa surface évaluée en cm^2, que vaut la longueur d'un de ses côtés (en **mètres**) ?

Physique :

3. Sur Terre, en négligeant les frottements de l'air, donner une approximation, en nombre entier de secondes, du temps de chute d'un corps lâché d'une altitude de 80 m (considérer que l'accélération de la pesanteur est égale à 10 m/s^2).

Transcodage

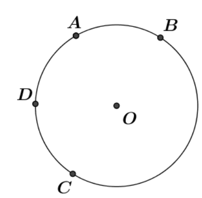
1. Exprimer en **français** la définition ci-dessous (**ATTENTION** : **ne pas se limiter à une lecture de symboles**. Par exemple, on exprime « $a+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ » par « la somme de deux réels » et non « a plus b avec a, b appartenant à $\mathbb{R}$ ») :

$$m\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (m-1) \times m,\ m \in \mathbb{N}_0 \quad (m\,! \text{ se lit « factorielle de } m \text{ »})$$

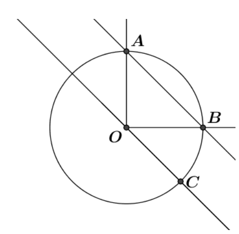
2. Exprimer en **symboles mathématiques** la phrase entre guillemets :
« Le logarithme d'un produit de deux réels strictement positifs vaut la somme des logarithmes de chacun de ces réels. »(Le logarithme du réel x se note $\ln(x)$)

Représentation graphique

1. Soient A, B, C et D quatre points d'un même cercle de centre O, tels que DO est parallèle à AB et C est le symétrique de A par rapport à DO.
Si l'amplitude de l'angle $\widehat{OAB}$ vaut θ radians, que valent les amplitudes des angles suivants : $\widehat{DOA}$, $\widehat{AOB}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{AOC}$? Justifier la démarche.



2. La figure suivante représente un cercle de rayon 2 centré en O, deux demi-droites OA et OB perpendiculaires et les droites AB et OC parallèles. Quelle est la valeur numérique du produit scalaire $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC}$?



3. Dans un **même** repère orthonormé, représenter avec précision les courbes dont voici les équations en accompagnant le graphique du numéro de l'équation.
(1) $y-1=0$ (2) $y-1=x^2$ (3) $x^2+y^2-1=0$ (4) $x^2=1$

$\boxed{\text{Techniques de calcul}}$

1. Résoudre (x est une inconnue réelle)

   (a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{9}-\dfrac{1-x}{3}=0$ (b) $2x^2=3x-2$ (c) $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x^2}$.

2. Résoudre (x est une inconnue réelle)

$$2\cos^2(x)-3\cos(x)-2=0.$$

   Donner les solutions qui appartiennent à $[0,2\pi[$.

$\boxed{\text{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle(s)** qui est (sont) correcte(s) et colorier **complètement** la case qui la précède.

1. Laquelle des fonctions suivantes possède un graphique intersectant l'axe des ordonnées ?

   ☐ $x\mapsto -1$ ☐ $x\mapsto \dfrac{x^2-x}{x}$ ☐ $x\mapsto \sqrt{-3x-1}$ ☐ $x\mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$

   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

2. Si on achète un article soldé de 30%, cela signifie que, pour connaître son prix de départ, le prix soldé doit être

   ☐ multiplié par 0,3. ☐ multiplié par 0,7. ☐ divisé par 0,3. ☐ divisé par 0,7.
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

3. Les quatre septièmes du volume d'un récipient sont remplis d'eau. On retire alors une quantité d'eau égale aux deux tiers de ce volume d'eau. Au total, quelle est la part du volume du récipient remplie d'eau ?

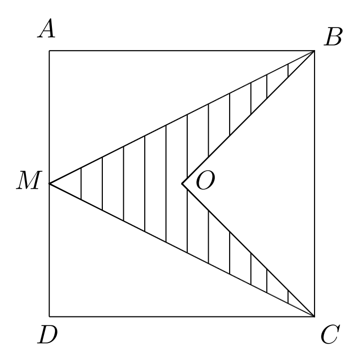
   ☐ 4/21 ☐ 8/21 ☐ 17/21 ☐ 20/21 ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

4. On considère un cylindre circulaire droit en cuivre de hauteur H et de rayon R. Si $\rho_c=\frac{m}{V}$ est la masse volumique du cuivre, alors le rayon du cylindre en fonction de H, m et ρ_c vaut

   ☐ $R=\sqrt{\dfrac{\rho_c}{\pi m H}}$ ☐ $R=\sqrt{\dfrac{m}{\pi\rho_c H}}$ ☐ $R=\sqrt{\dfrac{\pi\rho_c H}{m}}$ ☐ $R=\sqrt{\dfrac{\pi\rho_c}{mH}}$ ☐ $R=\sqrt{\dfrac{mH}{\pi\rho_c}}$

5. Quel est le rapport de l'aire hachurée à celle du carré $ABCD$ si M est le milieu du segment $[AD]$ et O le centre du carré ?

   ☐ 1/3 ☐ 1/4 ☐ 1/5
   ☐ 2/5 ☐ 3/8



CORRIGE

Problèmes élémentaires

Rédiger une solution des problèmes simples suivants.

Mathématique :
1) Une citerne cylindrique a une base circulaire de 4 m de rayon. Lors d'un orage, le niveau de son eau s'élève de 1 cm. A combien de litres par m^2 cela correspond-il ?

Solution. Lors de l'orage, le volume a augmenté de $4^2\pi \times\ 10^{-2}\ m^3$, c'est-à-dire 160 π dm^3. Ce volume correspond à une capacité de 160 π litres.
Comme l'aire de la base de la citerne est égale à 16 π m^2, on en déduit qu'il a plu 10 ℓ/m^2.

2) Si le réel exprimant le périmètre d'un carré évalué en mm est égal au réel exprimant sa surface évaluée en cm^2, que vaut la longueur d'un de ses côtés (en mètres) ?

Solution. Soit $x > 0$ la longueur en mètres d'un côté du carré.
Le périmètre évalué en mm vaut donc $4 \times 10^3 x\ mm$ et la surface évaluée en cm^2 vaut $10^4\ x^2\ cm^2$.
Puisque ces réels sont égaux, on a l'égalité

$$4\ \times 10^3 x = 10^4 x^2 \Leftrightarrow 10^3 x(10x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ x = 0,4.$$

Dès lors, la longueur d'un côté du carré est 0,4 m.

Physique :
3) Sur Terre, en négligeant les frottements de l'air, donner une approximation, en nombre entier de secondes, du temps de chute d'un corps lâché d'une altitude de $80\,\mathrm{m}$ (considérer que l'accélération de la pesanteur est égale à $10\ m/s^2$).

Solution. Si $t \in \mathbb{N}_0$ est le temps de chute du corps exprimé en secondes, on a $80 = \frac{1}{2}gt^2$, g étant l'accélération due à la pesanteur à la surface de la Terre.
En prenant g égal à 10 m/s^2, on a alors $16 = t^2 \Leftrightarrow t = 4$ puisque $t > 0$. Ainsi, un corps lâché à 80 m met approximativement 4 secondes avant de toucher le sol.

Transcodage

1. **Exprimer en français la propriété ci-dessous (ATTENTION : ne pas se limiter à une lecture de symboles. Par exemple, on exprime ≪ $a+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ ≫ par ≪ la somme de deux réels ≫ et non ≪ a plus b avec a, b appartenant à $\mathbb{R}$ ≫) :**

$$m\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (m-1) \times m,\ m \in \mathbb{N}_0 \quad (m\,! \text{ se lit ≪ factorielle de } m \text{ ≫})$$

Solution. La factorielle d'un naturel non nul m est le produit des m premiers naturels non nuls.

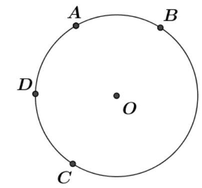
2. **Exprimer en symboles mathématiques la phrase entre guillemets :**
≪ Le logarithme d'un produit de deux réels strictement positifs vaut la somme des logarithmes de chacun de ces réels. ≫(Le logarithme du réel x se note $\ln(x)$)

Solution.

$$\ln(ab) = \ln(a)\ +\ \ln(b),\ \forall a, b \in]0, +\infty[.$$

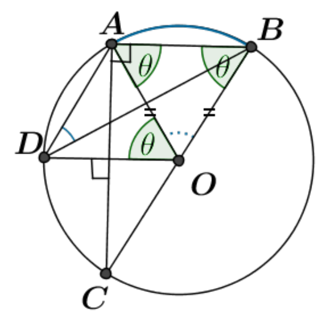
Représentation graphique

1. **Soient A, B, C et D quatre points d'un même cercle de centre O, tels que DO est parallèle à AB et C est le symétrique de A par rapport à DO.**
Si l'amplitude de l'angle $\widehat{OAB}$ vaut θ radians, que valent les amplitudes des angles suivants : $\widehat{DOA}$, $\widehat{AOB}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{AOC}$? Justifier la démarche.



Solution.

L'amplitude de l'angle $\widehat{DOA}$ vaut θ.
(les angles $\widehat{DOA}$ et $\widehat{OAB}$ sont alternes internes)

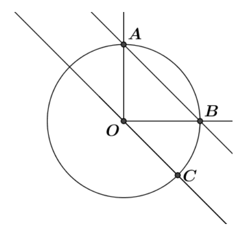


L'amplitude de l'angle $\widehat{AOB}$ vaut $\pi - 2\theta$.
(l'angle $\widehat{AOB}$ est angle au sommet du triangle AOB isocèle)

L'amplitude de l'angle $\widehat{ADB}$ vaut $\pi/2 - \theta$.
(l'angle $\widehat{ADB}$ est un angle inscrit dans le cercle et qui intercepte le même arc que l'angle au centre de ce cercle $\widehat{AOB}$)

L'amplitude de l'angle $\widehat{AOC}$ vaut 2θ.
(les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ sont supplémentaires puisque ABC est un triangle rectangle en A)

2. **La figure suivante représente un cercle de rayon 2 centré en O, deux demi-droites OA et OB perpendiculaires et les droites AB et OC parallèles. Quelle est la valeur numérique du produit scalaire $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC}$?**



Solution.

Puisque le triangle AOB est isocèle rectangle, les angles à la base ont une amplitude de $\pi/4$. Comme les droites AB et OC sont parallèles, les angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{BOC}$ sont alternes internes et ont donc la même amplitude. Par conséquent, on a

$$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OC}\| \times \cos(\widehat{AOC}) = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 4 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -4\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}.$$

3. **Dans un même repère orthonormé, représenter avec précision les courbes dont voici les équations en accompagnant le graphique du numéro de l'équation.**

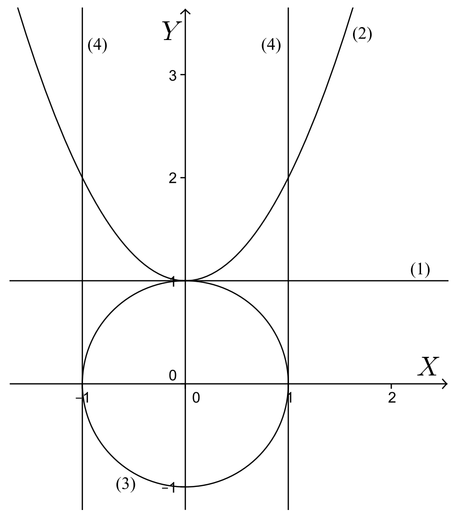
Solution.

(1) $y - 1 = 0$

(2) $y - 1 = x^2$

(3) $x^2 + y^2 - 1 = 0$

(4) $x^2 = 1$



Techniques de calcul

1. Résoudre (x est une inconnue réelle)

(a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{9} - \dfrac{1-x}{3} = 0$ **(b)** $2x^2 = 3x - 2$ **(c)** $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x^2}$.

Solution.

1. (a) On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{x}{9} - \frac{1-x}{3} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{9 + 2x - (6 - 6x)}{18} = 0\\ &\Leftrightarrow \quad 2x + 6x = 6 - 9\\ &\Leftrightarrow \quad 8x = -3\\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $\left\{-\dfrac{3}{8}\right\}$.

(b) On a

$$2x^2 = 3x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x + 2 = 0$$

Comme le discriminant (réalisant) de cette équation vaut $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 2 = -7$ et est donc négatif, il n'y a pas de solution réelle.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble vide ϕ.

(c) L'inéquation n'est définie que pour $x \neq 0$.
Comme $x^2 > 0$, on peut multiplier les deux membres de l'inégalité donnée par x^2 ; on obtient alors $x < 1$. Vu la condition sur x, l'ensemble des solutions est l'ensemble $]-\infty, 0[\, \cup \,]0, 1[$.

On peut également procéder en envisageant différents cas.
Si $x < 0$, l'inéquation est toujours vérifiée (puisque $\frac{1}{x} < 0$ et $\frac{1}{x^2} > 0$).
Si $x > 0$, l'inéquation donnée est équivalente à

$$x^2 < x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x < 0.$$

En étudiant le signe de ce polynôme du second degré, on a $x \in \,]0, 1[$

Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $]-\infty, 0[\cup]0,1[$.

2. **Résoudre (x est une inconnue réelle)**

$$2\cos^2(x) - 3\cos(x) - 2 = 0.$$

Donner les solutions qui appartiennent à $[0, 2\pi[$**.**

Solution.

Cette équation, définie sur $\mathbb{R}$, est une équation du second degré en $\cos(x)$.
Si on pose $\cos(x) = y$, on obtient l'équation du second degré $2y^2 - 3y - 2 = 0$. Comme son discriminant vaut $\Delta = 9 + 4 \times 2 \times 2 = 9 + 16 = 25$, ses deux solutions sont

$$y = \frac{3+5}{4} \text{ et } y = \frac{3-5}{4}$$

c'est-à-dire 2 et -1/2.
Il faut donc résoudre deux équations en $\cos(x)$:
$\cos(x) = 2$ qui est impossible
$\cos(x) = -1/2$ qui est équivalente à $\exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.
Les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$.

QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle(s) qui est (sont) correcte(s) et colorier complètement la case qui la précède.

1. Laquelle des fonctions suivantes possède un graphique intersectant l'axe des ordonnées ?

   ♣ $x \mapsto -1$ ☐ $x \mapsto \dfrac{x^2 - x}{x}$ ☐ $x \mapsto \sqrt{-3x-1}$ ♣ $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$

   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

2. Si on achète un article soldé de 30%, cela signifie que, pour connaître son prix de départ, le prix soldé doit être

   ☐ multiplié par 0,3. ☐ multiplié par 0,7. ☐ divisé par 0,3. ♣ divisé par 0,7.
   ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

3. Les quatre septièmes du volume d'un récipient sont remplis d'eau. On retire alors une quantité d'eau égale aux deux tiers de ce volume d'eau. Au total, quelle est la part du volume du récipient remplie d'eau ?

   ♣ 4/21 ☐ 8/21 ☐ 17/21 ☐ 20/21 ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

4. On considère un cylindre circulaire droit en cuivre de hauteur H et de rayon R. Si $\rho_c = \frac{m}{V}$ est la masse volumique du cuivre, alors le rayon du cylindre en fonction de H, m et ρ_c vaut

   ☐ $R = \sqrt{\dfrac{\rho_c}{\pi m H}}$ ♣ $R = \sqrt{\dfrac{m}{\pi \rho_c H}}$ ☐ $R = \sqrt{\dfrac{\pi \rho_c H}{m}}$ ☐ $R = \sqrt{\dfrac{\pi \rho_c}{m H}}$ ☐ $R = \sqrt{\dfrac{m H}{\pi \rho_c}}$

5. Quel est le rapport de l'aire hachurée à celle du carré $ABCD$ si M est le milieu du segment $[AD]$ et O le centre du carré ?

   ☐ 1/3 ♣ 1/4 ☐ 1/5
   ☐ 2/5 ☐ 3/8