LIÈGE université
Sciences

Année académique 2021-2022

Mathématique et physique : 1er bloc

Chimie - Géologie - Informatique

Test du 16-09-21

Correction

QUESTIONNAIRE

Problèmes élémentaires (A rédiger sur une **feuille** numérotée **1** avec **NOM Prénom** et **Section**)

Rédiger *une solution des problèmes simples suivants.*

Mathématique :

1. On mélange 15 cl d'une solution ayant une concentration d'éthanol de 20% avec 1 dl d'une solution ayant une concentration d'éthanol de 25%. Quelle est la concentration d'éthanol du mélange ?
2. Un étudiant participe à un examen avec des questions à choix multiples. Il répond à 80 questions. Chaque bonne réponse lui rapporte 4 points, mais à chaque mauvaise réponse, il perd 1 point. Il obtient un score final de 240 points. Quel est le nombre de bonnes réponses de l'étudiant ?

Physique :

3. Quelle distance (en mètres) parcourt un automobiliste roulant à la vitesse constante de 90 km/h pendant 9 secondes ? S'il parcourt la même distance en 5 secondes, quelle est alors sa vitesse moyenne (en m/s) ?

Transcodage (A rédiger sur une **feuille** numérotée **2** avec **NOM Prénom** et **Section**)

1. Si x est un réel et que $|x|$ est sa valeur absolue, on a

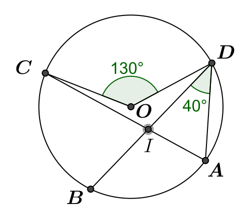
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

Transcoder cette définition (l'exprimer en français). (**ATTENTION** : **ne pas se limiter à une lecture de symboles**. Par exemple, on exprime ≪ $a+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ ≫ par ≪ la somme des deux réels a, b ≫ et non ≪ a plus b avec a, b appartenant à $\mathbb{R}$ ≫).

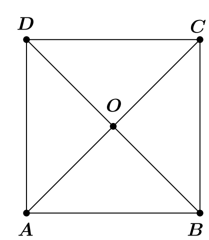
2. Exprimer en **symboles mathématiques** la phrase entre guillemets :
≪ L'exponentielle de l'opposé d'un réel vaut l'inverse de l'exponentielle de ce réel. ≫
(L'exponentielle du réel x se note $\exp(x)$)

Représentation graphique (A rédiger **également** sur la **feuille** numérotée **2**)

1. Soient A, B, C et D quatre points d'un même cercle de centre O, tels que les droites AC et BD sont sécantes au point I. On a aussi $\widehat{ADB} = 40°$ et $\widehat{COD} = 130°$.
Calculer la mesure de chaque angle du triangle BIC. Justifier la démarche.



2. La figure suivante représente un carré $ABCD$ dont les côtés mesurent 8 cm ; ses diagonales sont sécantes au point O. Quelle est la valeur numérique du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{OA}$? Justifier la démarche.



3. Dans un **même** repère orthonormé, représenter avec précision les courbes dont voici les équations en accompagnant le graphique du numéro de l'équation.
(1) $x - 1 = 0$ (2) $y^2 - 4 = 0$ (3) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (4) $x^2 + y - 1 = 0$

$\boxed{\text{Techniques de calcul}}$ (A rédiger sur une **feuille** numérotée **3** avec **NOM Prénom** et **Section**)

1. Résoudre (x est une inconnue réelle)

   (a) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{6} - \dfrac{2-x}{2} = 0$ (b) $3x^2 - 3 = 2x$ (c) $\dfrac{1}{x-1} \geq \dfrac{1}{x^2-1}$.

2. Résoudre (x est une inconnue réelle)

   $$\sin(2x) - 2\cos(x) = 0.$$

   Donner les solutions qui appartiennent à $[0, 2\pi[$.

$\boxed{\text{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède.

1. Laquelle des fonctions suivantes possède un graphique intersectant l'axe des abscisses ?

   □ $x \mapsto e^{-x}$ □ $x \mapsto \dfrac{1}{x-6}$ □ $x \mapsto |x-2|+2$ □ $x \mapsto \sqrt{-x-1}$

   □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

2. Le 12 juin, le prix d'un vêtement a augmenté de 20% pour diminuer le 2 juillet de 20%. Quelle a été l'évolution du prix du vêtement entre le 12 juin matin et le 2 juillet soir ?

   □ -20% □ -4% □ 0% □ 4% □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

3. Les nombres strictement positifs V, d, D, L satisfont la relation

   $$V = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{4}\right)^2 L.$$

   Comment D s'exprime-t-il nécessairement en fonction de d, V et L ?

   □ $d - 8\sqrt{\frac{V}{\pi L}}$ □ $d - 8\sqrt{\frac{\pi L}{V}}$ □ $-d + 8\sqrt{\frac{\pi L}{V}}$ □ $-d + 8\sqrt{\frac{V}{\pi L}}$

   □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

4. Parmi les expressions suivantes, quelle est celle qui est égale à $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$, quels que soient les nombres a, b, c strictement positifs ?

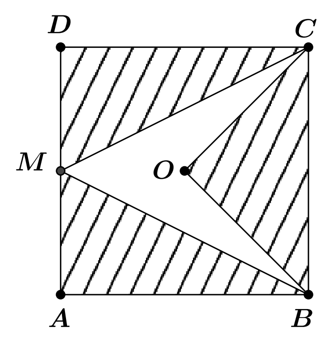
   □ $\dfrac{abc}{ab+ac+bc}$ □ $\dfrac{ab+ac+bc}{abc}$ □ $\dfrac{1}{a+b+c}$ □ $\dfrac{a+b+c}{abc}$

   □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

5. Quel est le rapport de l'aire hachurée à celle du carré $ABCD$ si M est le milieu du segment $[AD]$ et O le centre du carré ?

   □ 2/3 □ 3/4 □ 5/6 □ 7/8

   □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.



CORRIGE

Problèmes élémentaires

Rédiger une solution des problèmes simples suivants.

Mathématique :
1. On mélange 15 cl d'une solution ayant une concentration d'éthanol de 20% avec 1 dl d'une solution ayant une concentration d'éthanol de 25%. Quelle est la concentration d'éthanol du mélange ?

Solution. Initialement, dans les 15 cl de la première solution, on a $\frac{20}{100}\ .15 = 3\ cl$ d'éthanol.
Dans la solution ajoutée de 1 dl, c'est-à-dire de 10 cl, on a $\frac{25}{100}\ .10 = 2,5\ cl$ d'éthanol.
Par conséquent, dans le mélange de $15 + 10 = 25\ cl$, il y a $3 + 2,5 = 5,5\ cl$ d'éthanol, ce qui correspond à une concentration de $5,5\ .\frac{100}{25} = 5,5\ .4 = 22$ %.

2) Un étudiant participe à un examen avec des questions à choix multiples. Il répond à 80 questions. Chaque bonne réponse lui rapporte 4 points, mais à chaque mauvaise réponse, il perd 1 point. Il obtient un score final de 240 points. Quel est le nombre de bonnes réponses de l'étudiant ?

Solution. Soit $x(\in \mathbb{N}_0)$ le nombre de bonnes réponses de l'étudiant. Comme il répond à 80 questions, le nombre de mauvaises réponses vaut $80 - x$.
Comme chaque bonne réponse lui rapporte 4 points et que chaque mauvaise réponse lui fait perdre 1 point, et qu'il obtient un score final de 240 points, on a la succession d'égalités équivalentes suivantes

$$4x - (80 - x) = 240 \Leftrightarrow 5x - 80 = 240 \Leftrightarrow 5x = 320 \Leftrightarrow x = 64.$$

Dès lors, l'étudiant a répondu correctement à 64 questions.

Physique :
3) Quelle distance (en mètres) parcourt un automobiliste roulant à la vitesse constante de 90 km/h pendant 9 secondes ? S'il parcourt la même distance en 5 secondes, quelle est alors sa vitesse moyenne (en m/s) ?

Solution. Une vitesse de 90 km/h vaut aussi $\frac{90000}{3600}\ m/s = 25\ m/s$.
Par conséquent, l'automobiliste roulant à la vitesse constante de 90 km/h durant 9 secondes, parcourt une distance de $25 \times 9 = 225$ mètres.
S'il parcourt 225 mètres en 5 secondes, sa vitesse moyenne est alors de $\frac{225}{5}\ m/s$ c'est-à-dire de 45 m/s.

Transcodage

1. **Si x est un réel et que $|x|$ est sa valeur absolue, on a**

$$|x| = \begin{cases} x & \textbf{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \textbf{si} \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

   Transcoder cette définition (l'exprimer en français). (ATTENTION : ne pas se limiter à une lecture de symboles. Par exemple, on exprime « $a + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ » par « la somme des deux réels a, b » et non « a plus b avec a, b appartenant à $\mathbb{R}$ »).

   Solution. La valeur absolue d'un réel est ce réel s'il est positif et son opposé s'il est négatif.

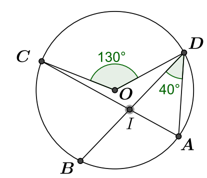
2. **Exprimer en symboles mathématiques la phrase entre guillemets :**
   « L'exponentielle de l'opposé d'un réel vaut l'inverse de l'exponentielle de ce réel. »
   (L'exponentielle du réel x se note $\exp(x)$)

   Solution.

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Représentation graphique

1. **Soient A, B, C et D quatre points d'un même cercle de centre O, tels que les droites AC et BD sont sécantes au point I. On a aussi $\widehat{ADB} = 40°$ et $\widehat{COD} = 130°$.**
   Calculer la mesure de chaque angle du triangle BIC. Justifier la démarche.



Solution.

Dans le cercle $ABCD$, $\widehat{COD}$ est un angle au centre interceptant le même arc $\widehat{CD}$ que l'angle inscrit $\widehat{DBC}$. Or, dans un cercle, l'amplitude d'un angle inscrit est égale à la moitié de l'amplitude de l'angle au centre interceptant le même arc. Donc, comme $\widehat{COD} = 130°$, on a

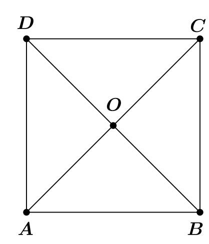
$$\widehat{IBC} = \widehat{DBC} = \frac{\widehat{COD}}{2} = \frac{130°}{2} = 65°.$$

Dans le même cercle, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc $\widehat{BA}$; ils ont donc la même amplitude. On a donc

$$\widehat{ICB} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 40°.$$

Enfin, dans le triangle BIC, on a

$$\begin{aligned} & \widehat{BIC} + \widehat{ICB} + \widehat{IBC} = 180° \\ \Leftrightarrow \quad & \widehat{BIC} + 40° + 65° = 180° \\ \Leftrightarrow \quad & \widehat{BIC} = 180° - 105° \\ \Leftrightarrow \quad & \widehat{BIC} = 75°. \end{aligned}$$



2. **La figure suivante représente un carré $ABCD$ dont les côtés mesurent 8 cm ; ses diagonales sont sécantes au point O. Quelle est la valeur numérique du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{OA}$? Justifier la démarche.**

Solution.

Puisque les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, le triangle AOB est rectangle isocèle ; les angles à la base ont une amplitude de $\pi/4$.
Puisque les côtés du carré mesurent 8 cm, ses diagonales mesurent $\sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$ cm. Par conséquent, $\|\overrightarrow{AO}\| = 4\sqrt{2}$.

Enfin, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont opposés.
Par conséquent, on a

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AO} = -\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AO}\|\times\cos(\widehat{OAB}) = -8\times 4\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -32\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -32.$$

3. **Dans un même repère orthonormé, représenter avec précision les courbes dont voici les équations en accompagnant le graphique du numéro de l'équation.**

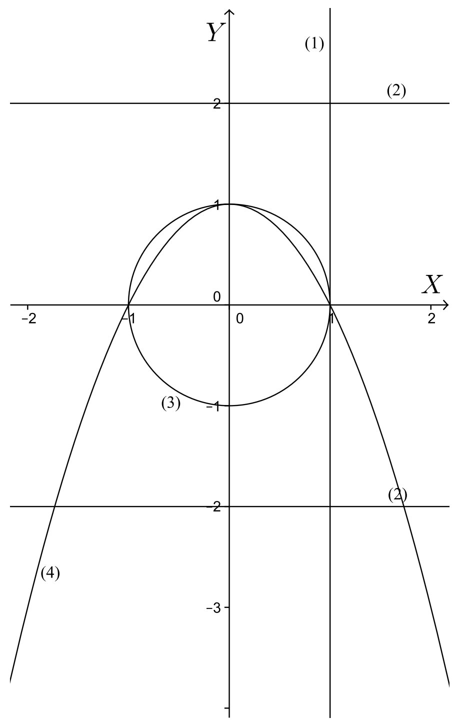
Solution.

(1) $x - 1 = 0$

(2) $y^2 - 4 = 0$

(3) $x^2 + y^2 - 1 = 0$

(4) $x^2 + y - 1 = 0$



Techniques de calcul

1. **Résoudre (x est une inconnue réelle)**

(a) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{6} - \dfrac{2-x}{2} = 0$ **(b)** $3x^2 - 3 = 2x$ **(c)** $\dfrac{1}{x-1} \geq \dfrac{1}{x^2-1}$.

Solution.

1. (a) On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} + \frac{x}{6} - \frac{2-x}{2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2 + x - 3(2-x)}{6} = 0\\ &\Leftrightarrow \quad x + 3x = 6 - 2\\ &\Leftrightarrow \quad 4x = 4\\ &\Leftrightarrow \quad x = 1.\end{aligned}$$

Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $\{1\}$.

(b) On a

$$3x^2 - 3 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Comme le discriminant (réalisant) de cette équation vaut $\Delta = 4-4\times 3\times(-3) = 4\times(1+9) = 4\times 10$, les solutions sont

$$\frac{2-2\sqrt{10}}{6} \quad \text{et} \quad \frac{2+2\sqrt{10}}{6}.$$

Dès lors, après simplifications, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \left\{\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}, \dfrac{1+\sqrt{10}}{3}\right\}$.

(c) Puisque $x^2-1 = (x-1)(x+1)$, l'inéquation n'est définie que pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x^2-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)-1}{x^2-1} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x}{x^2-1} \geq 0.
\end{aligned}$$

En étudiant simultanément les signes des numérateur et dénominateur du premier membre, on a $x \in \;]-1,0] \cup]1,+\infty[$.
Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $]-1,0] \cup]1,+\infty[$.

2. **Résoudre (x est une inconnue réelle)**

$$\sin(2x) - 2\cos(x) = 0.$$

Donner les solutions qui appartiennent à $[0, 2\pi[$.

$\boxed{\textbf{\textit{Solution.}}}$ L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Puisque $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\sin(2x) - 2\cos(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos(x)(\sin(x)-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \;\; \text{OU} \;\; \sin(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi.
\end{aligned}$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$.

$\boxed{\text{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle(s) qui est (sont) correcte(s) et colorier complètement la case qui la précède.

1. Laquelle des fonctions suivantes possède un graphique intersectant l'axe des abscisses ?
   □ $x \mapsto e^{-x}$ □ $x \mapsto \dfrac{1}{x-6}$ □ $x \mapsto |x-2|+2$ ♣ $x \mapsto \sqrt{-x-1}$
   □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

2. Le 12 juin, le prix d'un vêtement a augmenté de 20% pour diminuer le 2 juillet de 20%. Quelle a été l'évolution du prix du vêtement entre le 12 juin matin et le 2 juillet soir ?
   □ -20% ♣ -4% □ 0% □ 4% □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

3. Les nombres strictement positifs V, d, D, L satisfont la relation

$$V = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{4}\right)^2 L.$$

Comment D s'exprime-t-il nécessairement en fonction de d, V et L ?

☐ $d - 8\sqrt{\frac{V}{\pi L}}$ ☐ $d - 8\sqrt{\frac{\pi L}{V}}$ ☐ $-d + 8\sqrt{\frac{\pi L}{V}}$ ♣ $-d + 8\sqrt{\frac{V}{\pi L}}$

☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

4. Parmi les expressions suivantes, quelle est celle qui est égale à $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$, quels que soient les nombres a, b, c strictement positifs ?

☐ $\dfrac{abc}{ab + ac + bc}$ ♣ $\dfrac{ab + ac + bc}{abc}$ ☐ $\dfrac{1}{a + b + c}$ ☐ $\dfrac{a + b + c}{abc}$

☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

5. Quel est le rapport de l'aire hachurée à celle du carré $ABCD$ si M est le milieu du segment $[AD]$ et O le centre du carré ?

☐ 2/3 ♣ 3/4 ☐ 5/6 ☐ 7/8

☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.