



**LIÈGE université**  
**Sciences**

Année académique 2020-2021

---

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES  
RÉVISIONS EN VUE DE L'INTERROGATION DU 6/11/2020 :  
CORRECTION

---

Version 7 octobre 2020

## I. Problème élémentaire

1. Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente de  $1/15$ . Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir  $4,96 \text{ m}^3$  de glace ?

*Solution.* On doit prendre 4 650 litres d'eau pour obtenir  $4,96 \text{ m}^3$  de glace.

2. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient un point. S'il ne répond pas, il a 0 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il ne répond pas à 8 questions et qu'il obtient 48,25 comme cote finale, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?

*Solution.* L'étudiant a donné 57 réponses correctes.

3. Un tonneau rempli aux trois cinquièmes d'eau pèse 215 kg. Rempli aux trois quarts d'eau, il pèse 248 kg. Quelle est la capacité en hectolitres de ce tonneau ?

*Solution.* La capacité du tonneau est égale à 2,2 hl.

## Manipulations de réels

Résoudre les équations et inéquations suivantes ( $x$  est une inconnue réelle)

- $|x^2 - 4| = 3x$
- $|x^2 - 4| = |3x|$
- $x^2 - 9 \leq 3x|x - 3|$
- $x \leq 27x^4$
- $|x - 4| \geq |x + 4|$
- $(4 - x)^2 \leq x - 4$
- $x|x^2 - 16| \leq 3|x - 4|$
- $\frac{9|4 - x|}{x^2 - 16} \leq |x - 4|$
- $|x^2 - 16| \geq 9$
- $\frac{1}{|5x + 2|} > 7$

*Solution.* Si  $S$  est l'ensemble des solutions, on a

- |  |   |
|--|---|
| 1. $S = \{1, 4\}$  | 5. $S = ] - \infty, 0]$   |
| 2. $S = \{-4, 4, -1, 1\}$                                      | 6. $S = [4, 5]$   |
| 3. $S = \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right[$                    | 7. $S = ] - \infty, -2 + \sqrt{7}] \cup \{4\}$  |
| 4. $S = ] - \infty, 0] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ | 8. $S = ] - \infty, -5] \cup ] - 4, 4[ \cup [5, +\infty[$                                 |
|  | 9. $S = ] - \infty, -5] \cup [-\sqrt{7}, \sqrt{7}] \cup [5, +\infty[$                     |
|  | 10. $S = \left]-\frac{3}{7}, -\frac{13}{35}\right[ \setminus \left\{-\frac{2}{5}\right\}$ |

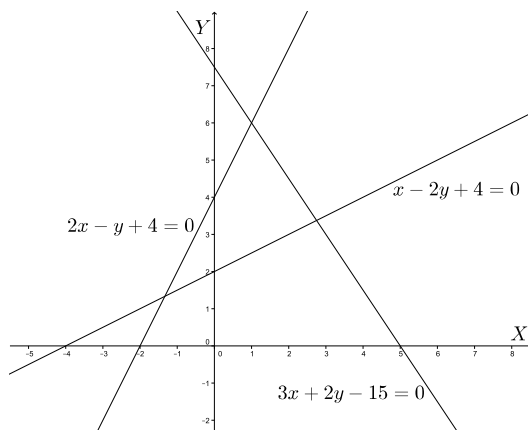
## Calcul vectoriel et droites

1. Dans un repère orthonormé, on donne les droites  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  dont les équations cartésiennes sont

$$d_1 : 2x - y + 4 = 0 \quad d_2 : 3x + 2y - 15 = 0 \quad d_3 : x - 2y + 4 = 0.$$

- (a) Représenter ces 3 droites.  
(b) Les droites  $d_1$  et  $d_2$  se coupent au point  $A$ . Déterminer l'équation cartésienne de la droite  $d$  passant par  $A$  et orthogonale à  $d_3$ .  
(c) Donner des équations paramétriques de  $d_3$ .  
(d) Déterminer les coordonnées du point  $B$  d'intersection de la droite  $d_2$  avec l'axe des abscisses.  
(e) Le point  $C$  de coordonnées  $(3, 4)$  appartient-il à  $d_1$  ? à  $d_2$  ? à  $d_3$  ?  
(f) Déterminer le produit scalaire  $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC}$ .  
(g) Déterminer les composantes de la projection orthogonale de  $\overrightarrow{AB}$  sur  $d_1$ .

*Solution.* (a)



(b) En résolvant le système formé par les équations cartésiennes de  $d_1$  et  $d_2$ , on obtient les coordonnées cartésiennes  $(1, 6)$  de  $A$ . Comme le coefficient angulaire de  $d_3$  vaut  $1/2$  le coefficient angulaire de toute droite orthogonale à  $d_3$  vaut  $-2$ . Dès lors, l'équation cartésienne demandée est  $2x + y - 8 = 0$ .

(c) Un vecteur directeur de  $d_3$  a pour composantes  $(2, 1)$  et un point de  $d_3$  a pour coordonnées  $(-4, 0)$ . Dès lors,  $d_3$  a, par exemple, pour équations paramétriques cartésiennes

$$\begin{cases} x = -4 + 2r \\ y = r \end{cases}, r \in \mathbb{R}.$$

(d) En résolvant le système formé par les équations cartésiennes de  $d_2$  et de l'axe des abscisses, on obtient les coordonnées cartésiennes  $(5, 0)$  de  $B$ .

(e) En remplaçant  $x$  par 3 et  $y$  par 4 dans les équations des 3 droites, on constate qu'aucune des 3 équations n'est vérifiée. Dès lors, le point  $C$  n'appartient à aucune des droites.

(f) Les composantes de  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont respectivement  $(2, -2)$  et  $(-2, 4)$ . Dès lors, le produit scalaire de ces 2 vecteurs vaut  $-12$ .

(g) Un vecteur directeur  $\vec{v}$  de  $d_1$  a pour composantes  $(1, 2)$  et le carré de sa norme vaut 5. Comme les composantes de  $\overrightarrow{AB}$  sont égales à  $(4, -6)$ , le produit scalaire de  $\overrightarrow{AB}$  par  $\vec{v}$  vaut  $-8$  et les composantes de la projection orthogonale de  $\overrightarrow{AB}$  sur  $d_1$  sont

$$-\frac{8}{5}(1, 2) = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right).$$

2. Dans un repère orthonormé, on donne les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement

$$(1, -1, 0) \quad (-2, 1, 3) \quad (0, 4, 2).$$

Déterminer les composantes du produit vectoriel  $\overrightarrow{BC} \wedge 2\overrightarrow{AB}$

*Solution.* Les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{BC}$  et  $2\overrightarrow{AB}$  sont respectivement  $(2, 3, -1)$  et  $(-6, 4, 6)$ . Dès lors, les composantes de  $\overrightarrow{BC} \wedge 2\overrightarrow{AB}$  sont  $(22, -6, 26)$ .

### Trigonométrie

1. Si  $\alpha$  désigne un réel de l'intervalle  $\left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$  et si  $\cotg(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , que valent les nombres  $\tg(\alpha)$ ,  $\sin(\alpha)$ ,  $\cos(\alpha)$  ?

*Solution.* On a  $\tg(\alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $\sin(\alpha) = \frac{-2\sqrt{7}}{7}$  et  $\cos(\alpha) = \frac{-\sqrt{21}}{7}$ .

2. Simplifier  $\frac{\sin(\frac{4\pi}{3})}{\cos^2(\frac{5\pi}{3})}$ .

*Solution.* L'expression donnée vaut  $-2\sqrt{3}$ .

3. Résoudre dans  $[\pi/2, \pi]$  ( $x$  est une inconnue réelle)

(a)  $\sin(3x) \cos(3x) = -\sqrt{3}$

(b)  $4 \sin(3x) \cos(3x) = -\sqrt{3}$

(c)  $\cos(2x) = \cos(6x)$

(d)  $4 \sin^2(2x) = 1$

(e)  $1 - 2 \sin^2(2x) = \cos^2(4x)$

(f)  $\sin(2x) \cos(4x) = \cos(2x) \sin(4x) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

*Solution.*

(a) Cette équation est impossible.

(b) Les solutions dans  $[\pi/2, \pi]$  sont  $\frac{5\pi}{9}$ ,  $\frac{8\pi}{9}$ ,  $\frac{11\pi}{18}$ ,  $\frac{17\pi}{18}$ .

(c) Les solutions dans  $[\pi/2, \pi]$  sont  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\pi$ .

- (d) Les solutions dans  $[\pi/2, \pi]$  sont  $\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$ .
- (e) Les solutions dans  $[\pi/2, \pi]$  sont  $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi$ .
- (f) Les solutions dans  $[\pi/2, \pi]$  sont  $\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ .

### Coniques

On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s)? Quelle est leur excentricité? Quelle est l'équation des éventuelles asymptotes?

(1)  $x^2 + y = 9$     (2)  $y^2 = x - 1$     (3)  $x^2 + y^2 + 4y = 0$     (4)  $x^2 = 4y^2 - 1$     (5)  $x^2 + 5y^2 = 20$

*Solution.* (1) L'équation  $x^2 + y = 9$  est celle d'une parabole dont le foyer a pour coordonnées  $(0, \frac{35}{4})$  et pour excentricité 1.

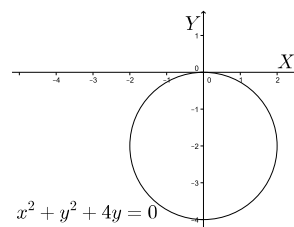
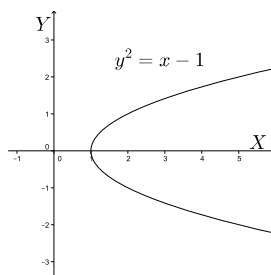
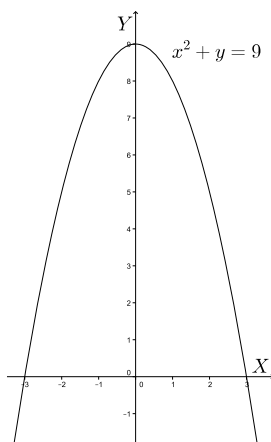
(2) L'équation  $y^2 = x - 1$  est celle d'une parabole dont le foyer a pour coordonnées  $(\frac{5}{4}, 0)$  et pour excentricité 1.

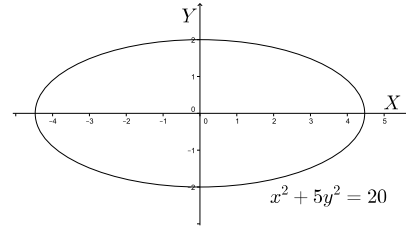
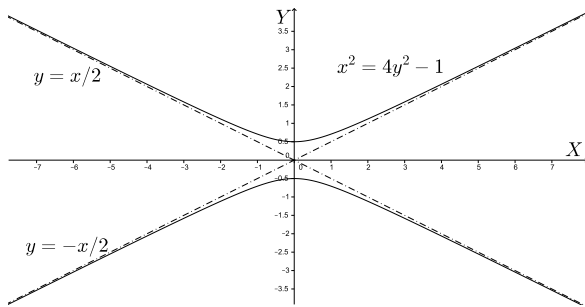
(3) L'équation  $x^2 + y^2 + 4y = 0$  est celle d'un cercle dont les foyers sont confondus en un point, le centre du cercle, qui a pour coordonnées  $(0, -2)$  (le rayon vaut 2); l'excentricité est nulle.

(4) L'équation  $x^2 = 4y^2 - 1$  est celle d'une hyperbole dont les foyers ont pour coordonnées  $(0, \frac{\sqrt{5}}{2})$  et  $(0, -\frac{\sqrt{5}}{2})$  et pour excentricité  $\sqrt{5}$ . Les asymptotes sont les droites d'équation  $x + 2y = 0$  et  $x - 2y = 0$ .

(5) L'équation  $x^2 + 5y^2 = 20$  est celle d'une ellipse dont les foyers ont pour coordonnées  $(-4, 0)$  et  $(4, 0)$  et pour excentricité  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

Voici la représentation graphique de ces coniques



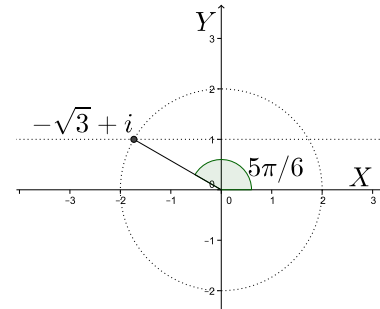


## Nombres complexes

1. On donne le complexe  $z = -\sqrt{3} + i$ .
  - (a) En déterminer le module et une forme trigonométrique. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé ( $X =$  "axe réel" et  $Y =$  "axe imaginaire")
  - (b) Que vaut la partie réelle du complexe  $z^2$  ?
  - (c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est-elle toujours égale au carré de la partie imaginaire du complexe ? Pourquoi ?

*Solution*

- (a) On a  $|z| = 2$  et une forme trigonométrique est donnée par  $z = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i \sin(\frac{5\pi}{6}))$
- (b) La partie réelle de  $z^2$  vaut 2.
- (c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est égale au carré de la partie imaginaire du complexe si et seulement si le complexe est réel ou si sa partie réelle vaut la moitié de sa partie imaginaire.



2. Déterminer
  - (a) le module du complexe  $z = \cos(3) - i \sin(3)$
  - (b) les parties réelle et imaginaire des complexes  $z_1 = \frac{1}{1+3i}$ ,  $z_2 = \frac{i^{19}}{1-i}$ ,  $z_3 = \frac{-i^2}{1+i^3}$ .

*Solution*

- (a) Le module de ce complexe  $z$  vaut 1.
- (b) La partie réelle de  $z_1$  vaut  $1/10$  et sa partie imaginaire vaut  $-3/10$ .  
La partie réelle de  $z_2$  vaut  $1/2$  et sa partie imaginaire vaut  $-1/2$ .  
La partie réelle de  $z_3$  vaut  $1/2$  et sa partie imaginaire vaut  $1/2$ .

3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$

$$(a) z^2 + z + 1 = 0$$

$$(b) z^2 + 36 = 0$$

*Solution*

Si  $S$  est l'ensemble des solutions, on a

$$(a) S = \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$(b) S = \{-6i, 6i\}$$

## Fonctions élémentaires

Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

1.  $\arccos\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{5}\right)\right)$
2.  $\sin\left(\arccos\left(\frac{7}{8}\right)\right)$
3.  $\ln\left(e^2 \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right) + \ln\left(\sqrt{(-3)^2}\right)$
4.  $e^{-i\pi/3}$
5.  $\operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right)$
6.  $\exp\left(\ln(\pi^2) + \ln(1/2)\right)$

*Solutions*

1. La fonction  $\cos$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et son image est  $[-1, 1]$ ; d'autre part, puisque la fonction  $\arccos$  est définie sur  $[-1, 1]$ , l'expression donnée est définie.  
On a  $\arccos\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) = \frac{3\pi}{5}$  car  $\operatorname{im}(\arccos) = [0, \pi]$ .
2. La fonction  $\arccos$  est définie sur  $[-1, 1]$ ,  $\frac{7}{8} \in [-1, 1]$  et la fonction  $\sin$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .  
Dès lors, l'expression donnée est définie.  
Comme  $\arccos\left(\frac{7}{8}\right) = y \Leftrightarrow \cos(y) = \frac{7}{8}$ ,  $y \in [0, \pi]$  et comme  $\sin(y) \geq 0$  si  $y \in [0, \pi]$ , par la formule fondamentale de la trigonométrie, on obtient  $\sin(y) = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \sqrt{\frac{15}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$ .  
Dès lors,  $\sin\left(\arccos\left(\frac{7}{8}\right)\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}$ .
3. Comme  $\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$  et que le domaine de définition de  $\ln$  est  $]0, +\infty[$ , le premier terme de la somme n'est pas défini et, dès lors, l'expression n'est pas définie.
4. La fonction exponentielle est définie dans  $\mathbb{C}$ . Comme  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $e^{-i\pi/3} = \cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
5. Comme  $\operatorname{dom}(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  et  $\operatorname{im}(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} = \operatorname{dom}(\operatorname{arccotg})$ , l'expression  $\operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right)$  est définie. Dès lors, vu que  $\operatorname{im}(\operatorname{arccotg}) = ]0, \pi[$  et que  $\operatorname{cotg}\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{5}\right)$ , on a  $\operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$ .
6. Les fonctions  $\exp$  et  $\ln$  sont respectivement définies sur  $\mathbb{R}$  et  $]0, +\infty[$ ; l'expression est donc définie. En appliquant la propriété relative à la somme de logarithmes de réels positifs et parce que les fonctions  $\exp$  et  $\ln$  sont inverses, on obtient  $\exp\left(\ln(\pi^2) + \ln(1/2)\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{\pi^2}{2}\right)\right) = \frac{\pi^2}{2}$ .