Mathématiques générales I

Année académique 2021-2022

Exercices de mathématiques
Révisions en vue de l'interrogation du 05/11/2021 :
correction

Version 9 septembre 2021

I. Problème élémentaire

1. **Pour le lait, 3/20 de sa masse environ fournit de la crème et 25 % de la masse de la crème fournit du beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2 000 l de lait si la densité du lait est 1,032 ?**

   Solution. A partir de 2 000 l de lait on obtient 77,4 kg de beurre.

2. **Un tonneau d'une contenance de 150 dm^3 est rempli d'eau à l'aide de bouteilles de 75 cl. Combien de bouteilles doit-on verser pour remplir complètement le tonneau ?**

   Solution. On doit verser 200 bouteilles pour remplir complètement le tonneau.

3. **On dispose d'un récipient contenant 1 litre de mélange d'alcool et d'eau et on sait que l'alcool est présent à une concentration de 30% en volume (du mélange complet). On chauffe le mélange. Il y a donc évaporation et on suppose que l'alcool s'évapore trois fois plus vite que l'eau. Sachant que celle-ci s'évapore à raison de 1 cm^3 par minute, quelle devra être la durée de l'opération de chauffage pour obtenir un mélange dans lequel on ne trouve plus que 25% d'alcool en volume ?**

   Solution. On doit chauffer le mélange pendant 25 minutes pour obtenir un mélange ne comprenant que 25 % d'alcool.

Manipulations de réels

Résoudre les équations et inéquations suivantes (x est une inconnue réelle)

1. $|4x^2 - 1| = 3x$
2. $|4x^2 - 1| = |3x|$
3. $x^2 - 9 \geq 3x\,|x - 3|$
4. $x \geq 27x^4$
5. $|x - 3| \geq |x + 3|$
6. $(3 - x)^2 \leq x - 3$
7. $x|x^2 - 9| \leq 4|x - 3|$
8. $\dfrac{|3 - x|}{x^2 - 9} \geq |x - 3|$
9. $|x^2 - 9| \geq 5$
10. $\dfrac{1}{|2x + 5|} > 3$

Solution. Si S est l'ensemble des solutions, on a

1. $S = \left\{\dfrac{1}{4},\ 1\right\}$
2. $S = \left\{-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ -1,\ 1\right\}$
3. $S = \left]-\infty, -\dfrac{3}{4}\right] \cup \{3\}$
4. $S = \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$
5. $S = \,]-\infty, 0]$
6. $S = [3, 4]$
7. $S = \,]-\infty, 1] \cup \{3\}$
8. $S = [-\sqrt{10}, -3[\,\cup\,]3, \sqrt{10}]$
9. $S =]-\infty, -\sqrt{14}] \cup [-2, 2] \cup [\sqrt{14}, +\infty[$
10. $S = \left]-\dfrac{8}{3}, -\dfrac{7}{3}\right[\setminus \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$

Calcul vectoriel et droites

1. **Dans un repère orthonormé, on donne les droites d_1, d_2 et d_3 dont les équations cartésiennes sont**

$$d_1 : 2x - y + 3 = 0 \qquad d_2 : 5x + 2y - 12 = 0 \qquad d_3 : x + 4y - 24 = 0.$$

   (a) **Représenter ces 3 droites.**

   (b) **Les droites d_1 et d_2 se coupent au point A. Déterminer l'équation cartésienne de la droite passant par A et orthogonale à d_3.**

   (c) **Donner des équations paramétriques de d_3.**

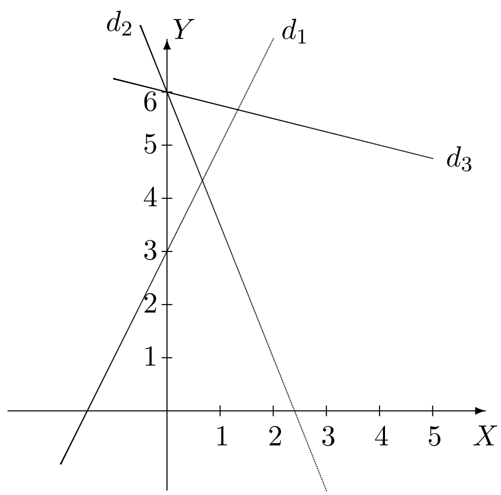
   (d) **Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de la droite d_2 avec l'axe des abscisses.**

   (e) **Le point C de coordonnées $(4, 5)$ appartient-il à d_1 ? à d_2 ? à d_3 ?**

   (f) **Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC}$.**

   (g) **Déterminer les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur d_1.**

Solution. (a)



(b) En résolvant le système formé par les équations cartésiennes de d_1 et d_2, on obtient les coordonnées cartésiennes $(2/3, 13/3)$ de A. Comme le coefficient angulaire de d_3 vaut $-1/4$ le coefficient angulaire de toute droite orthogonale à d_3 vaut 4. Dès lors, l'équation cartésienne demandée est $12x - 3y + 5 = 0$.

(c) Un vecteur directeur de d_3 a pour composantes $(4, -1)$ et un point de d_3 a pour coordonnées $(0, 6)$. Dès lors, d_3 a, par exemple, pour équations paramétriques cartésiennes
$\begin{cases} x = 4r \\ y = -r + 6 \end{cases}, r \in \mathbb{R}.$

(d) En résolvant le système formé par les équations cartésiennes de d_2 et de l'axe des abscisses, on obtient les coordonnées cartésiennes $(12/5, 0)$ de B.

(e) En remplaçant x par 4 et y par 5 dans les équations des 3 droites, on constate que celles de d_1 et d_2 ne sont pas vérifiées mais bien celle de d_3. Dès lors, le point C appartient à d_3 mais non à d_1 ni d_2.

(f) Les composantes de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont respectivement $(\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ et $(\frac{8}{5}, 5)$. Dès lors, le produit scalaire de ces 2 vecteurs vaut $\frac{26}{3}$.

(g) Un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de d_1 a pour composantes $(1, 2)$ et le carré de sa norme vaut 5. Comme les composantes de $\overrightarrow{AB}$ sont égales à $(\frac{26}{15}, -\frac{13}{3})$, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{v}$ vaut $-\frac{104}{15}$ et les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur d_1 sont

$$-\frac{104}{75}(1, 2) = \left(-\frac{104}{75}, -\frac{208}{75}\right).$$

2. **Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B et C dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement**

$$(-1, 1, 0) \qquad (2, -1, 3) \qquad (0, -4, 2).$$

Déterminer les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge 2\overrightarrow{BC}$

Solution. Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{BC}$ sont respectivement $(3, -2, 3)$ et $(-4, -6, -2)$. Dès lors, les composantes de $\overrightarrow{AB} \wedge 2\overrightarrow{BC}$ sont $(22, -6, -26)$.

Trigonométrie

1. **Si α désigne un réel de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et si $\tan(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, que valent les nombres** $\mathrm{cotan}(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ **?**

Solution. On a $\mathrm{cotan}(\alpha) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ et $\cos(\alpha) = \dfrac{-2\sqrt{7}}{7}$.

2. **Simplifier** $\dfrac{\cos(\frac{4\pi}{3})}{\sin^2(\frac{7\pi}{3})}$ **.**

Solution. L'expression donnée vaut $-2/3$.

3. **Résoudre dans $[\pi, 2\pi]$ (x est une inconnue réelle)**
   (a) $\sin(2x)\cos(2x) = -1$
   (b) $4\sin(2x)\cos(2x) = -1$
   (c) $\sin(2x) = \sin(6x)$
   (d) $4\cos^2(2x) = 3$
   (e) $2\cos^2(2x) = \sin^2(4x)$
   (f) $\sin(x)\sin(2x) = \cos(2x)\cos(x) + \frac{1}{2}$

Solution.
(a) Cette équation est impossible.
(b) Les solutions dans $[\pi, 2\pi]$ sont $\dfrac{31\pi}{24}$, $\dfrac{35\pi}{24}$, $\dfrac{43\pi}{24}$, $\dfrac{47\pi}{24}$.
(c) Les solutions dans $[\pi, 2\pi]$ sont π, $\dfrac{3\pi}{2}$, 2π, $\dfrac{9\pi}{8}$, $\dfrac{11\pi}{8}$, $\dfrac{13\pi}{8}$, $\dfrac{15\pi}{8}$.

(d) Les solutions dans $[\pi, 2\pi]$ sont $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$, $\frac{23\pi}{12}$.

(e) Les solutions dans $[\pi, 2\pi]$ sont $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{11\pi}{8}$, $\frac{13\pi}{8}$, $\frac{15\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

(f) Les solutions dans $[\pi, 2\pi]$ sont $\frac{10\pi}{9}$, $\frac{14\pi}{9}$, $\frac{16\pi}{9}$.

Coniques

On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques ? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s) ? Quelle est leur excentricité ? Quelle est l'équation des éventuelles asymptotes ?

(1) $x^2+y=4$ (2) $y^2=x+1$ (3) $x^2+y^2+4x=0$ (4) $x^2-1=4y^2$ (5) $x^2+3y^2=12$

Solution. L'équation $x^2+y=4$ est celle d'une parabole dont le foyer a pour coordonnées $(0, \frac{15}{4})$ et pour excentricité 1.

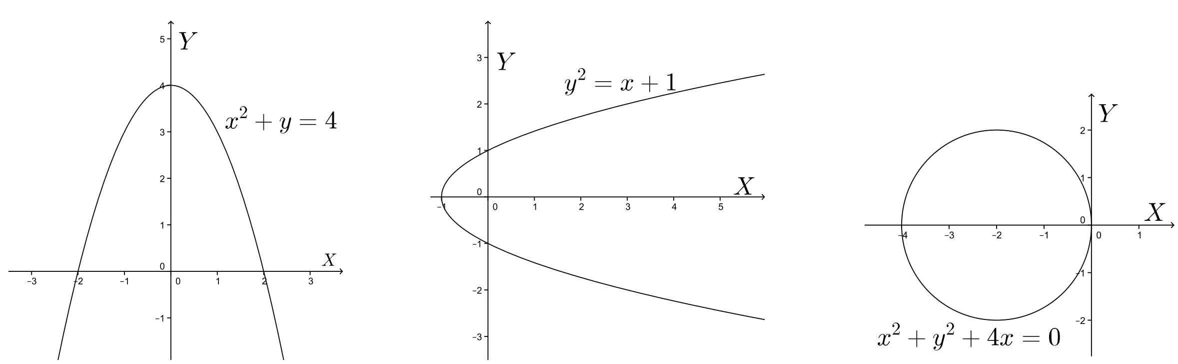
L'équation $y^2=x+1$ est celle d'une parabole dont le foyer a pour coordonnées $(-\frac{3}{4}, 0)$ et pour excentricité 1.

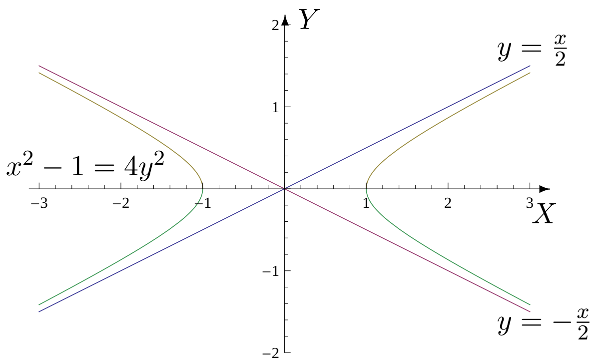
L'équation $x^2+y^2+4x=0$ est celle d'un cercle dont les foyers sont confondus en un point, le centre du cercle, qui a pour coordonnées $(-2,0)$ (le rayon vaut 2) ; l'excentricité est nulle.

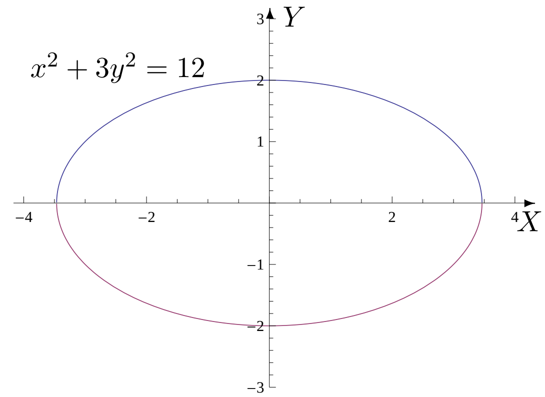
L'équation $x^2-1=4y^2$ est celle d'une hyperbole dont les foyers ont pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ et $\left(\frac{-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ et pour excentricité $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Les asymptotes sont les droites d'équation $x+2y=0$ et $x-2y=0$.

L'équation $x^2+3y^2=12$ est celle d'une ellipse dont les foyers ont pour coordonnées $(2\sqrt{2}, 0)$ et $(-2\sqrt{2}, 0)$ et pour excentricité $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Voici la représentation graphique de ces coniques



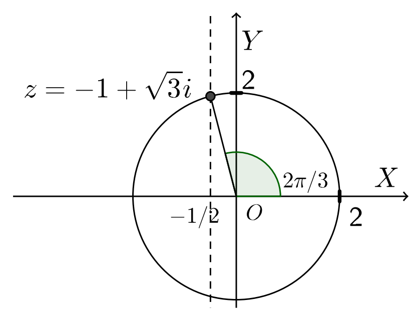




Nombres complexes

1. **On donne le complexe $z = -1 + \sqrt{3}\ i$.**
   a) En déterminer le module et une forme trigonométrique. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (X = "axe réel" et Y = "axe imaginaire")
   b) Que vaut la partie réelle du complexe z^2 ?
   c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est-elle toujours égale au carré de la partie imaginaire du complexe ? Pourquoi ?

   Solution
   a) On a $|z| = 2$ et une forme trigonométrique est donnée par $z = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
   b) La partie réelle de z^2 vaut -2.
   c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est égale au carré de la partie imaginaire du complexe si et seulement si le complexe est réel ou si sa partie réelle vaut la moitié de sa partie imaginaire.

2. **Déterminer**
   a) le module du complexe $\cos(2) + i\sin(2)$
   b) les parties réelle et imaginaire des complexes $z_1 = \frac{1}{1-2i}$, $z_2 = \frac{i^{27}}{1+i}$, $z_3 = \frac{-i}{1+i^3}$.

   Solution
   a) Le module de ce complexe vaut 1.
   b) La partie réelle de z_1 vaut $1/5$ et sa partie imaginaire vaut $2/5$.
   La partie réelle de z_2 vaut $-1/2$ et sa partie imaginaire vaut $-1/2$.
   La partie réelle de z_3 vaut $1/2$ et sa partie imaginaire vaut $-1/2$.

3. **Résoudre dans $\mathbb{C}$**

   $a)\ z^2 - z + 1 = 0 \qquad\qquad b)\ z^2 + 25 = 0$

   Solution
   Si S est l'ensemble des solutions, on a

a) $S = \left\{ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$
b) $S = \{-5i, 5i\}$

Fonctions élémentaires

Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

1. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{-4\pi}{7}\right)\right)$
2. $\cos\left(\arcsin\left(\frac{7}{8}\right)\right)$
3. $\ln\left(e^3\cos(\frac{-\pi}{3})\right) + \ln\left(\sqrt{(-2)^2}\right)$
4. $e^{-i\pi/2}$
5. $\arctan\left(\tan(\frac{6\pi}{5})\right)$
6. $\exp\left(\ln(\pi) + \ln(\sqrt{2})\right)$

Solutions

1. La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $[-1,1]$; d'autre part, puisque la fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$, l'expression donnée est définie.
   On a $\arcsin\left(\sin\left(\frac{-4\pi}{7}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{-3\pi}{7}\right)\right) = \frac{-3\pi}{7}$ car $\mathrm{im}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2. La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$, $\frac{7}{8} \in [-1,1]$ et la fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$. Dès lors, l'expression donnée est définie.
   Comme $\arcsin(\frac{7}{8}) = y \Leftrightarrow \sin(y) = \frac{7}{8}, y \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et comme $\cos(y) \geq 0$ si $y \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, par la formule fondamentale de la trigonométrie, on obtient $\cos(y) = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \sqrt{\frac{15}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$.
   Dès lors, $\cos\left(\arcsin\left(\frac{7}{8}\right)\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}$.
3. Comme $\cos(\frac{-\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\sqrt{(-2)^2} = 2$, en appliquant la propriété relative à la somme de logarithmes de réels positifs et en utilisant $\ln e = 1$, on a
$$\ln\left(e^3\cos(\frac{-\pi}{3})\right) + \ln\left(\sqrt{(-2)^2}\right) = \ln\left(e^3 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, 2\right) = 3\ln e = 3.$$
4. La fonction exponentielle est définie dans $\mathbb{C}$. Comme $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$, on a $e^{-i\pi/2} = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2) = -i$.
5. Comme $\mathrm{dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathrm{im}(\tan) = \mathbb{R} = \mathrm{dom}(\arctan)$, l'expression $\arctan\left(\tan(\frac{6\pi}{5})\right)$ est définie. Dès lors, vu que $\mathrm{im}(\arctan) =]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $\tan\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$, on a $\arctan\left(\tan(\frac{6\pi}{5})\right) = \frac{\pi}{5}$.

6. Les fonctions *exp* et *ln* sont respectivement défines sur $\mathbb{R}$ et $]0, +\infty[$; l'expression est donc définie. En appliquant la propriété relative à la somme de logarithmes de réels positifs et parce que les fonctions *exp* et *ln* sont inverses, on obtient $\exp\left(\ln(\pi) + \ln(\sqrt{2})\right) = \exp(\ln(\sqrt{2}\pi)) = \sqrt{2}\,\pi$.