Mathématiques générales I

Année académique 2024-2025

Exercices de mathématiques
Révisions en vue de l'interrogation du 08/11/2024 : correction

Version 11 octobre 2024

I. Problèmes élémentaires

1. **Quelles sont les dimensions d'un rectangle dont une diagonale mesure 15 cm et dont le périmètre mesure 42 cm ?**

   Solution. Le rectangle a une longueur de 12 m et une largeur de 9 m.

2. **Le lait de vache contient les 3/20 de son poids de crème et 25% du poids de la crème fournissent du beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2 000 litres de lait si la densité du lait est 1,032 ?**

   Solution. A partir de 2 000 litres de lait on obtient 77,4 kg de beurre.

3. **A l'occasion d'une tombola dans un village, une somme de 2 040 euros doit être répartie entre les gagnants en parts égales. Deux gagnants ne souhaitant pas retirer la somme gagnée, la part de chacun des autres est alors augmentée de 85 euros. Combien y avait-il initialement de gagnants et quelle somme chacun d'entre eux devait-il recevoir ?**

   Solution. Initialement, il y avait 8 gagnants recevant chacun 255 euros.

Manipulations de réels

Résoudre les équations et inéquations suivantes (x est une inconnue réelle)

1. $|x^2 - 4| = 3x$
2. $|x^2 - 4| = |3x|$
3. $x^2 - 9 \leq 3x\,|x - 3|$
4. $x \leq 27x^4$
5. $|x - 4| \geq |x + 4|$
6. $(4 - x)^2 \leq x - 4$
7. $x|x^2 - 16| \leq 3|x - 4|$
8. $\dfrac{9\,|4 - x|}{x^2 - 16} \leq |x - 4|$
9. $|x^2 - 16| \geq 9$
10. $\dfrac{1}{|5x + 2|} > 7$

Solution. Si S est l'ensemble des solutions, on a

1. $S = \{1,\ 4\}$
2. $S = \{-4,\ 4,\ -1,\ 1\}$
3. $S = \left[-\dfrac{3}{4}, +\infty\right[$
4. $S =]-\infty, 0] \cup \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$
5. $S =]-\infty, 0]$
6. $S = [4, 5]$
7. $S =]-\infty, -2 + \sqrt{7}] \cup \{4\}$
8. $S =]-\infty, -5] \cup]-4, 4[\cup [5, +\infty[$
9. $S =]-\infty, -5] \cup [-\sqrt{7}, \sqrt{7}] \cup [5, +\infty[$
10. $S = \left]-\dfrac{3}{7}, -\dfrac{13}{35}\right[\setminus \left\{-\dfrac{2}{5}\right\}$

Calcul vectoriel et droites

1. **Dans un repère orthonormé, on donne les droites d_1, d_2 et d_3 dont les équations cartésiennes sont**

$$d_1 : 2x - y + 4 = 0 \qquad d_2 : 3x + 2y - 15 = 0 \qquad d_3 : x - 2y + 4 = 0.$$

   (a) **Représenter ces 3 droites.**

   (b) **Les droites d_1 et d_2 se coupent au point A. Déterminer l'équation cartésienne de la droite d passant par A et orthogonale à d_3.**

   (c) **Donner des équations paramétriques de d_3.**

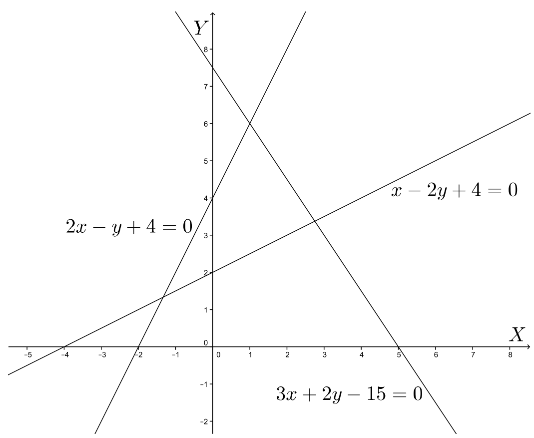
   (d) **Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de la droite d_2 avec l'axe des abscisses.**

   (e) **Le point C de coordonnées $(3, 4)$ appartient-il à d_1 ? à d_2 ? à d_3 ?**

   (f) **Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC}$.**

   (g) **Déterminer les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur d_1.**

Solution. (a)



(b) En résolvant le système formé par les équations cartésiennes de d_1 et d_2, on obtient les coordonnées cartésiennes $(1, 6)$ de A. Comme le coefficient angulaire de d_3 vaut $1/2$ le coefficient angulaire de toute droite orthogonale à d_3 vaut -2. Dès lors, l'équation cartésienne demandée est $2x + y - 8 = 0$.

(c) Un vecteur directeur de d_3 a pour composantes $(2, 1)$ et un point de d_3 a pour coordonnées $(-4, 0)$. Dès lors, d_3 a, par exemple, pour équations paramétriques cartésiennes
$\left\{ \begin{array}{l} x = -4 + 2r \\ y = r \end{array} \right. , r \in \mathbb{R}.$

(d) En résolvant le système formé par les équations cartésiennes de d_2 et de l'axe des abscisses, on obtient les coordonnées cartésiennes $(5, 0)$ de B.

(e) En remplaçant x par 3 et y par 4 dans les équations des 3 droites, on constate qu'aucune des 3 équations n'est vérifiée. Dès lors, le point C n'appartient à aucune des droites.

(f) Les composantes de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont respectivement $(2,-2)$ et $(-2,4)$. Dès lors, le produit scalaire de ces 2 vecteurs vaut -12.

(g) Un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de d_1 a pour composantes $(1,2)$ et le carré de sa norme vaut 5. Comme les composantes de $\overrightarrow{AB}$ sont égales à $(4,-6)$, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{v}$ vaut -8 et les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur d_1 sont

$$-\frac{8}{5}(1,2) = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right).$$

2. **Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B et C dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement**

$$(1,-1,0) \qquad (-2,1,3) \qquad (0,4,2).$$

Déterminer les composantes du produit vectoriel $\overrightarrow{BC} \wedge 2\overrightarrow{AB}$

Solution. Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $2\overrightarrow{AB}$ sont respectivement $(2,3,-1)$ et $(-6,4,6)$. Dès lors, les composantes de $\overrightarrow{BC} \wedge 2\overrightarrow{AB}$ sont $(22,-6,26)$.

$\boxed{\textbf{Trigonométrie}}$

1. **Si α désigne un réel de l'intervalle** $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ **et si** $\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$**, que valent les nombres** $\operatorname{tg}(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$?

Solution. On a $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sin(\alpha) = \frac{-2\sqrt{7}}{7}$ et $\cos(\alpha) = \frac{-\sqrt{21}}{7}$.

2. **Simplifier** $\dfrac{\sin(\frac{4\pi}{3})}{\cos^2(\frac{5\pi}{3})}$. **.**

Solution. L'expression donnée vaut $-2\sqrt{3}$.

3. **Résoudre dans** $[\pi/2, \pi]$ **(**x **est une inconnue réelle)**
   (a) $\sin(3x)\cos(3x) = -\sqrt{3}$
   (b) $4\sin(3x)\cos(3x) = -\sqrt{3}$
   (c) $\cos(2x) = \cos(6x)$
   (d) $4\sin^2(2x) = 1$
   (e) $1 - 2\sin^2(2x) = \cos^2(4x)$
   (f) $\sin(2x)\cos(4x) = \cos(2x)\sin(4x) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution.
(a) Cette équation est impossible.
(b) Les solutions dans $[\pi/2, \pi]$ sont $\frac{5\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}$, $\frac{11\pi}{18}$, $\frac{17\pi}{18}$.
(c) Les solutions dans $[\pi/2, \pi]$ sont $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π.

(d) Les solutions dans $[\pi/2, \pi]$ sont $\dfrac{7\pi}{12}$, $\dfrac{11\pi}{12}$.

(e) Les solutions dans $[\pi/2, \pi]$ sont $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{8}$, $\dfrac{7\pi}{8}$, π.

(f) Les solutions dans $[\pi/2, \pi]$ sont $\dfrac{5\pi}{8}$, $\dfrac{7\pi}{8}$.

Coniques

On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques ? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s) ? Quelle est leur excentricité ? Quelle est l'équation des éventuelles asymptotes ?

(1) $x^2+y=9$ (2) $y^2=x-1$ (3) $x^2+y^2+4y=0$ (4) $x^2=4y^2-1$ (5) $x^2+5y^2=20$

Solution. (1) L'équation $x^2+y=9$ est celle d'une parabole dont le foyer a pour coordonnées $(0, \frac{35}{4})$ et pour excentricité 1.

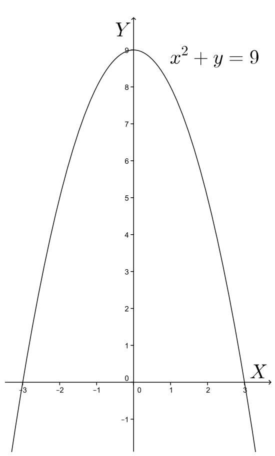
(2) L'équation $y^2=x-1$ est celle d'une parabole dont le foyer a pour coordonnées $(\frac{5}{4}, 0)$ et pour excentricité 1.

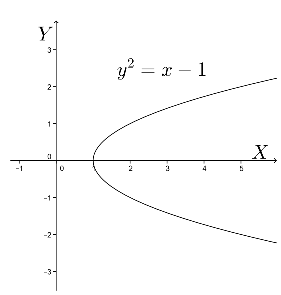
(3) L'équation $x^2+y^2+4y=0$ est celle d'un cercle dont les foyers sont confondus en un point, le centre du cercle, qui a pour coordonnées $(0,-2)$ (le rayon vaut 2) ; l'excentricité est nulle.

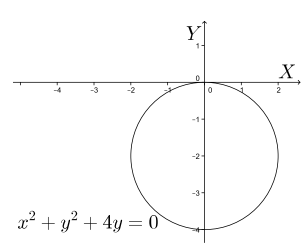
(4) L'équation $x^2=4y^2-1$ est celle d'une hyperbole dont les foyers ont pour coordonnées $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\left(0, \frac{-\sqrt{5}}{2}\right)$ et pour excentricité $\sqrt{5}$. Les asymptotes sont les droites d'équation $x+2y=0$ et $x-2y=0$.

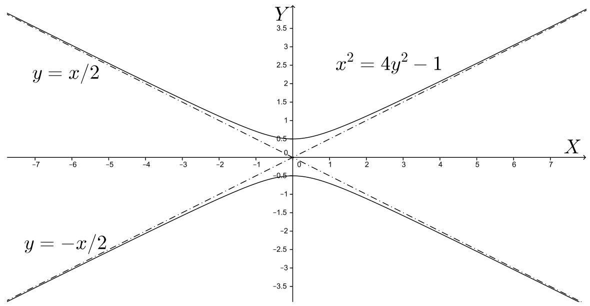
(5) L'équation $x^2+5y^2=20$ est celle d'une ellipse dont les foyers ont pour coordonnées $(-4,0)$ et $(4,0)$ et pour excentricité $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

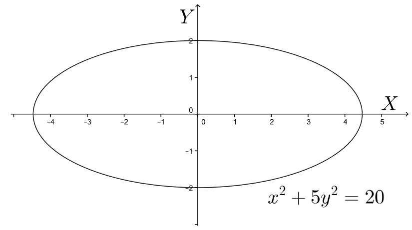
Voici la représentation graphique de ces coniques









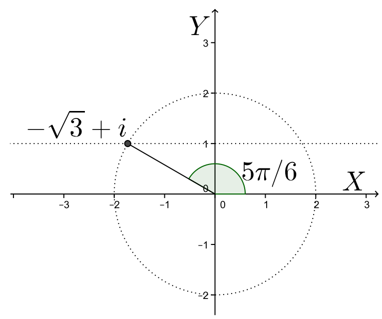


Nombres complexes

1. **On donne le complexe$z = -\sqrt{3} + i$.**
   (a) En déterminer le module et une forme trigonométrique. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (X = "axe réel" et Y = "axe imaginaire")
   (b) Que vaut la partie réelle du complexe z^2 ?
   (c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est-elle toujours égale au carré de la partie imaginaire du complexe ? Pourquoi ?

   Solution

   (a) On a $|z| = 2$ et une forme trigonométrique est donnée par $z = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$
   (b) La partie réelle de z^2 vaut 2.
   (c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est égale au carré de la partie imaginaire du complexe si et seulement si le complexe est réel ou si sa partie réelle vaut la moitié de sa partie imaginaire.

2. **Déterminer**
   (a) le module du complexe $z = \cos(3) - i\sin(3)$
   (b) les parties réelle et imaginaire des complexes $z_1 = \frac{1}{1+3i}$, $z_2 = \frac{i^{19}}{1-i}$, $z_3 = \frac{-i^2}{1+i^3}$.

   Solution
   (a) Le module de ce complexe z vaut 1.
   (b) La partie réelle de z_1 vaut $1/10$ et sa partie imaginaire vaut $-3/10$.
   La partie réelle de z_2 vaut $1/2$ et sa partie imaginaire vaut $-1/2$.
   La partie réelle de z_3 vaut $1/2$ et sa partie imaginaire vaut $1/2$.

3. **Résoudre dans $\mathbb{C}$**

   $$(a)\ z^2 + z + 1 = 0 \qquad\qquad (b)\ z^2 + 36 = 0$$

   Solution
   Si S est l'ensemble des solutions, on a
   (a) $S = \left\{ \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$
   (b) $S = \{-6i, 6i\}$