Examen à blanc MATH2007, 20 mai 2020

Corrigé

Ce corrigé détaillé est destiné à bien montrer que les questions posées lors de l'examen à blanc étaient tout à fait du type et du niveau des questions traitées aux cours ou aux répétitions ; il en sera de même pour l'examen proprement dit. Seule la façon d'y répondre diffère (QCM ou VF), nécessité de cette situation particulière d'examen en ligne.

Dans ce corrigé, il est également noté explicitement que plusieurs questions sont tirées d'un autre examen (habituel celui-là) et d'exercices de « Maths 1 350 cm^3 ».

Nous espérons que cette petite note vous rassurera un peu et vous encouragera.

Bon travail. Courage.

QUESTIONNAIRE SEUL

THEORIE

Question 1 (/6) Pas pour les dispensés

* Si deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ ont respectivement pour composantes (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans une base du plan, alors l'expression analytique de leur produit scalaire est $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Vrai - Faux

* Soit le complexe $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. Alors a est toujours la partie réelle de z et b est toujours la partie imaginaire.

Vrai - Faux

* Soit f une fonction définie sur une partie A de l'ensemble des réels. Si f vérifie la propriété suivante

$$\forall x, y \in A,\ x > y\ \Rightarrow\ -f(x) \leq -f(y)$$

alors la fonction f est croissante.

Vrai - Faux

Question 2 (/9) Pour tous

* Si f et g sont deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout réel x voisin du réel a et si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Vrai - Faux

* Une constante est toujours intégrable sur $\mathbb{R}$.

Vrai - Faux

* Une primitive d'un produit de fonctions est donnée par le produit d'une primitive de chacune des fonctions.

Vrai - Faux

Question 3 (/15) Pour tous

* Soit un réel t et une fonction f définie au voisinage du réel b (mais pas nécessairement en b). On a $\lim_{x\to b} f(x) = t$ si et seulement s'il existe un réel $s > 0$ tel que, quel que soit le réel $R > 0$, on a $|f(x) - t| \leq s$ pour tout x du domaine de définition de f qui vérifie $|x - b| \leq R$.

Vrai - Faux

* La fonction $y \mapsto (y^2)^s$ est intégrable sur $]0, 1[$ seulement si $s > -1$.

Vrai - Faux

* Un énoncé du théorème des accroissements finis est celui-ci :

Soit une fonction f telle que $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *et* $f \in C_1(]a, b[)$. *Alors* $\forall t, z \in]a, b[, \exists x \in [t, z]$ *ou* $[z, t]$ *tel que*

$$f(t) = f(z) + (t - z)Df(x)$$

Vrai - Faux

EXERCICES

Question 1(a) **(/3)** Soit f le polynôme du premier degré tel que $f(2) = 3$ et $f(8) = -9$. Alors $f(25)$ vaut

1) -43.

2) -41.

3) -39.

4) -37.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 1(b) **(/4)** Pour tout réel a, l'expression $\cos(a + \frac{2\pi}{3}) + \cos(a + \frac{4\pi}{3})$ vaut

1) $-\cos(a)$

2) $\cos(a)$

3) $\cos(2a)$

4) $-\cos(2a)$

5) $-\sqrt{3}\cos(a)$

Question 1(c) **(/3)**

Si f est une fonction définie sur $[0, +\infty[$ alors le domaine de définition de la fonction

$$x \mapsto f\left(1 - \frac{1}{1 - x^2}\right)$$

est

1) $\mathbb{R}_0$.

2) $[-1, 1] \setminus \{0\}$.

3) $]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[$.

4) $]1, +\infty[$.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 2(a) **(/5)** La limite $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{a + x^6}}{x^3 - a}$ $(a \in [0, +\infty[)$

1) n'est pas envisageable.

2) vaut $-\infty$.

3) vaut -1.

4) vaut $+\infty$.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 2(b) **(/5)** Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que

$\displaystyle\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -\pi/4$, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \pi/4$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi/2$

alors $\displaystyle\lim_{x \to (-1)^+} f\left(\arcsin(\sqrt{1 - x^2})\right)$ vaut

1) $\pi/2$.

2) $\pi/4$.

3) 0.

4) $-\pi/4$.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 2(c) **(/5)** Sachant que $|\sin(2x)|e^x x^2 \leq e^x x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, que vaut $\lim_{x \to -\infty} \left(|\sin(2x)|e^x x^2\right)$?

1) 0

2) $\lim_{x \to +\infty} \left(|\sin(2x)|e^x x^2\right)$

3) $+\infty$

4) Il n'y a pas assez d'informations pour la calculer.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 2(d)(**/5)** Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors le plus grand ouvert sur lequel la fonction

$$g : x \mapsto f(\tan(2x))$$

est dérivable et la dérivée de g sont donnés par

1) $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et on a $Dg : x \mapsto (Df)(\tan(2x))$.

2) $\mathbb{R} \setminus \{\pi/4 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et on a $Dg : x \mapsto (Df)(\tan(2x))/\cos^2(2x)$.

3) $\mathbb{R} \setminus \{\pi/4 + k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ et on a $Dg : x \mapsto 2\,(Df)(\tan(2x))/\cos^2(2x)$.

4) Il est impossible de répondre car f n'est pas donné.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 3(a) **(/9)** On considère l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{+\infty} (x-1)e^{-x}\,dx$$

Cette intégrale existe et vaut

1) $\left[(x-1)e^{-x}\right]_{+\infty}^{0} - \displaystyle\int_0^{+\infty} D(e^{-x})\,dx.$

2) $\left[(x-1)e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} D(e^{-x})\,dx.$

3) $\left[(1-x)e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} D(e^{-x})\,dx.$

4) $\left[(x-1)e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} D(e^{-x})\,dx.$

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 3(b) **(/9)** Si on note

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(mx)}{\sin(x)}\,dx,\ m \in \mathbb{N}_0$$

et si $n \in \mathbb{N}_0$, que vaut $I_{2n+1} - I_{2n-1}$?

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{D(\sin(2nx))}{n}\,dx$

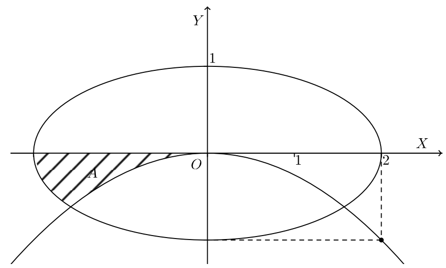
2) $n\displaystyle\int_0^{\pi/2} D(\sin(2nx))\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{D(\cos(2nx))}{n}\,dx$

4) La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(mx)}{\sin(x)}$, $m \in \mathbb{N}_0$ n'est pas intégrable sur $]0, \pi/2]$.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 4 (/5) On considère la représentation graphique suivante (une des courbes est une ellipse et l'autre une parabole).



Une description analytique de cet ensemble A fermé borné est

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0],\ y \in [-\sqrt{4 - x^2}/2, -x^2/4]\}$.

2) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right],\ x \in [-2\sqrt{1 - y^2}, -2\sqrt{-y}]\right\}$.

3) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0],\ y \in [-2\sqrt{1 - x^2}, -x^2/4]\}$.

4) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right],\ x \in [-2\sqrt{-y}, -2\sqrt{1 - y^2}]\right\}$.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 5 (/13) On donne l'équation différentielle

$$2D^2 f(x) - 5Df(x) + 2f(x) = \frac{1-x}{e^x}.$$

Parmi les fonctions définies ci-dessous, quel est l'item qui donne une (des) solution(s) de l'équation ci-dessus ?

1) $f(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{2x}\ , x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

2) $f(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-2x}\ , x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

3) $f(x) = (-x + 3)\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$.

4) $f(x) = -\frac{x}{9}\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 6 (/4) William tond le gazon de son jardin en 90 minutes mais son voisin Jules peut le faire en une heure avec sa tondeuse personnelle. Aujourd'hui, William tond depuis 10 minutes quand Jules vient l'aider ; ils finissent la tonte ensemble avec leur propre tondeuse. Combien de temps a-t-il fallu pour que toute la pelouse soit tondue ?

1) Il a fallu 30 minutes pour tondre la pelouse.

2) Il a fallu 42 minutes pour tondre la pelouse.

3) Il a fallu 48 minutes pour tondre la pelouse.

4) Il a fallu 54 minutes pour tondre la pelouse.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

CORRIGE

THEORIE

Question 1 (/6) Pas pour les dispensés

* Si deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ ont respectivement pour composantes (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans une base du plan, alors l'expression analytique de leur produit scalaire est $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Réponse FAUX

Cette relation n'est correcte que si on travaille dans un repère orthonormé ce qui n'est pas précisé dans l'énoncé.

* Soit le complexe $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. Alors a est toujours la partie réelle de z et b est toujours la partie imaginaire.

Réponse FAUX

Quand on a $z = a + ib$, a est la partie réelle de z et b sa partie imaginaire uniquement si $a, b \in \mathbb{R}$. Comme $a, b \in \mathbb{C}$, a et b peuvent être complexes sans être réels.

* Soit f une fonction définie sur une partie A de l'ensemble des réels. Si f vérifie la propriété suivante

$$\forall x, y \in A,\ x > y \ \Rightarrow\ -f(x) \leq -f(y)$$

alors la fonction f est croissante.

Réponse VRAI

En effet, écrire $\forall x, y \in A,\ x > y \ \Rightarrow\ -f(x) \leq -f(y)$ est équivalent à écrire $\forall x, y \in A,\ x > y \ \Rightarrow$ $f(x) \geq f(y)$ ce qui est bien la définition d'une fonction croissante.

Question 2 (/9) Pour tous

* Si f et g sont deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout réel x voisin du réel a et si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Réponse FAUX

Tout d'abord, on ne sait pas si la limite de f en a existe. Et si elle existe bien, on peut simplement dire que la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ est inférieure ou égale à 0 ; elle pourrait donc être égale à n'importe quel réel négatif ou même $-\infty$.

* Une constante est toujours intégrable sur $\mathbb{R}$.

Réponse FAUX

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un ensemble non borné sur lequel toute constante est une fonction continue. Il faut donc étudier son intégrabilité en $-\infty$ et en $+\infty$. En appliquant la définition, par exemple, on peut constater que la limite en $-\infty$ ou en $+\infty$ d'une intégrale d'une constante non nulle sur $[t, 0]$ $(t < 0)$ ou sur $[0, t]$ $(t > 0)$ est infinie et, dès lors, la limite n'étant pas finie, la fonction n'est pas intégrable.

On peut ajouter aussi que clairement la réponse est fausse en se rappelant l'interprétation graphique de la notion d'intégrale d'une fonction continue à valeurs positives.

* Une primitive d'un produit de fonctions est donnée par le produit d'une primitive de chacune des fonctions.

Réponse FAUX

Si F (resp. G) est une primitive de f (resp. g), on a $D(FG) = fG + Fg$. Comme en général $fG + Fg \neq fg$, on ne peut pas dire que FG est une primitive de fg.

Question 3 (/15) Pour tous

* Soit un réel t et une fonction f définie au voisinage du réel b (mais pas nécessairement en b). On a $\lim_{x\to b} f(x) = t$ si et seulement s'il existe un réel $s > 0$ tel que, quel que soit le réel $R > 0$, on a $|f(x) - t| \leq s$ pour tout x du domaine de définition de f qui vérifie $|x - b| \leq R$.

Réponse FAUX

C'est clairement incorrect à cause de la mauvaise utilisation des quantificateurs. La définition correcte est $\lim_{x\to b} f(x) = t$ si et seulement si **quel que soit** le réel $s > 0$, **il existe** un réel $R > 0$ pour lequel on a $|f(x) - t| \leq s$ pour tout x du domaine de définition de f qui vérifie $|x - b| \leq R$.

* La fonction $y \mapsto (y^2)^s$ est intégrable sur $]0, 1[$ seulement si $s > -1$.

Réponse FAUX

La fonction $y \mapsto (y^2)^s = y^{2s}$ est intégrable sur $]0, 1[$ seulement si $2s > -1$, ce qui est équivalent à $s > -1/2$.

* Un énoncé du théorème des accroissements finis est celui-ci :

Soit une fonction f telle que $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $f \in C_1(]a, b[)$. Alors $\forall t, z \in]a, b[$, $\exists x \in [t, z]$ou $[z, t]$ tel que

$$f(t) = f(z) + (t - z)Df(x)$$

Réponse VRAI.

EXERCICES

Question 1(a) **(/3) Pour les non dispensés** Soit f le polynôme du premier degré tel que $f(2) = 3$ et $f(8) = -9$. Alors $f(25)$ vaut

♣ **1)** -43.

2) -41.

3) -39.

4) -37.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Réponse : soit $f : x \mapsto ax + b$ $(a \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R})$. Comme $f(2) = 3$ et $f(8) = -9$, on a $2a + b = 3$ et $8a + b = -9$. En résolvant le système formé par ces deux équations, on obtient $a = -2$ et $b = 7$. Dès lors, $f(x) = -2x + 7$ et $f(25) = -50 + 7 = -43$.

Question 1(b) **(/4) Pour les non dispensés** Pour tout réel a, l'expression

$$\cos\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(a + \frac{4\pi}{3}\right)$$

vaut

♣ **1)** $-\cos(a)$

2) $\cos(a)$

3) $\cos(2a)$

4) $-\cos(2a)$

5) $-\sqrt{3}\cos(a)$

Réponse : si α et β sont des réels, on a l'égalité $\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$. En remplaçant α par $a + (2\pi/3)$ et β par $a + (4\pi/3)$, l'expression donnée est égale à

$$2\cos(\pi + a)\cos(-\pi/3) = 2(-\cos(a))\ (1/2) = -\cos(a).$$

Question 1(c) **(/3) Pour les non dispensés**

Si f est une fonction définie sur $[0, +\infty[$ alors le domaine de définition de la fonction

$$x \mapsto f\left(1 - \frac{1}{1 - x^2}\right)$$

est

1) $\mathbb{R}_0$.

2) $[-1, 1] \setminus \{0\}$.

3) $]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[$.

4) $]1, +\infty[$.

♣ **5)** Aucune des autres réponses n'est correcte.

Réponse : comme f est une fonction définie sur $[0, +\infty[$, les conditions pour que la fonction donnée soit définie sont $1 - x^2 \neq 0$ (fraction) et $1 - (1/(1 - x^2)) \geq 0$(fonction f). La première condition est équivalente à $x \neq 1$ et $x \neq -1$. Pour la deuxième condition, on réduit au même dénominateur et on a successivement

$$1 - \frac{1}{1 - x^2} = -\frac{x^2}{1 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \quad \text{ou} \quad x = 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\quad \text{ou} \quad x = 0.$$

Ainsi, le domaine de définition de la fonction donnée est $]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[\, \cup \{0\}$.

Question 2(a) **(/5)** **(Exercice 2(a) de l'examen de Mai 2019 avec a au lieu de 1)** La limite
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{a+x^6}}{x^3-a}$ $(a\in[0,+\infty[)$

1) n'est pas envisageable.

2) vaut $-\infty$.

♣ **3)** vaut -1.

4) vaut $+\infty$.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Réponse

La fonction $x\mapsto\dfrac{\sqrt{a+x^6}}{x^3-a}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\sqrt[3]{a}\}$, ensemble non minoré. La limite en $-\infty$ peut donc être envisagée.
Cela étant, on a

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{a+x^6}}{x^3-a}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^3|\sqrt{(a/x^6)+1}}{x^3(1-(a/x^3))}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3\sqrt{(a/x^6)+1}}{x^3(1-(a/x^3))}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{(a/x^6)+1}}{(1-a/x^3)}.$$

Comme $\lim_{x\to-\infty}(a/x^6)=0$ et $\lim_{x\to-\infty}(a/x^3)=0$, on obtient

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{a}{x^6}+1}=1\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{a}{x^3}\right)=1.$$

Par conséquent, la limite demandée vaut -1.

Question 2(b) **(/5)** Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que
$\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=-\pi/4$, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to1^-}f(x)=\pi/4$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\pi/2$ alors

$$\lim_{x\to(-1)^+}f\left(\arcsin(\sqrt{1-x^2})\right)$$

vaut

1) $\pi/2$.

2) $\pi/4$.

♣ **3)** 0.

4) $-\pi/4$.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Réponse

La fonction $x\mapsto f\left(\arcsin(\sqrt{1-x^2})\right)$ est définie sur $A=[-1,1]$ et tout intervalle ouvert contenant -1 rencontre $A\cap\,]-1,+\infty[\,=\,]-1,1]$; la limite en $(-1)^+$ est donc envisageable.
Cela étant, le calcul de la limite s'effectue en appliquant le théorème de la limite d'une fonction de fonction. Vu les informations données, on a

$$\lim_{x\to(-1)^+}(1-x^2)=0^+,\ \lim_{y\to0^+}\sqrt{y}=0^+,\ \lim_{z\to0^+}\arcsin(z)=0^+,\ \lim_{t\to0^+}f(t)=0.$$

Dès lors,

$$\lim_{x\to(-1)^+}f\left(\arcsin(\sqrt{1-x^2})\right)=\lim_{z\to0^+}f(\arcsin(z))=\lim_{t\to0^+}f(t)=0$$

donc la limite demandée vaut 0.

Question 2(c) **(/5)** **(Cette limite intervient dans l'exercice résolu 5 (h) p. 343 de 1 350 cm^3)**
Sachant que $|\sin(2x)|e^xx^2\le e^xx^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, que vaut $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(|\sin(2x)|e^xx^2\right)$?

♣ **1)** 0

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(|\sin(2x)|e^x x^2\right)$

3) $+\infty$

4) Il n'y a pas assez d'informations pour la calculer.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Réponse

Comme l'exponentielle domine toute puissance antagoniste en $-\infty$ et que $\lim_{x\to-\infty}\ e^x = 0$, on a $\lim_{x\to-\infty}\ \left(e^x x^2\right) = 0$. Cela étant, puisque

$$0 \leq |\sin(2x)|e^x x^2 \leq e^x x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

le théorème de l'étau implique que la limite demandée est égale à 0.

Question 2(d)(/5) (Exercice analogue à l'exercice 3 p. 269 de 1 350 cm^3) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors le plus grand ouvert sur lequel la fonction

$$g : x \mapsto f(\tan(2x))$$

est dérivable et la dérivée de g sont donnés par

1) $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et on a $Dg : x \mapsto (Df)(\tan(2x))$.

2) $\mathbb{R}\setminus\{\pi/4 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et on a $Dg : x \mapsto (Df)(\tan(2x))/\cos^2(2x)$.

♣ **3)** $\mathbb{R}\setminus\{\pi/4 + k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ et on a $Dg : x \mapsto 2\,(Df)(\tan(2x))/\cos^2(2x)$.

4) Il est impossible de répondre car f n'est pas donné.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Réponse

La fonction tangente est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et puisque l'argument de la fonction est $2x$, le plus grand ouvert sur lequel la fonction g est dérivable est

$$\mathbb{R}\setminus\{\pi/4 + k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Cela étant, la fonction à dériver est une fonction de fonction. Dès lors,

$$Dg(x) = (Df)(\tan(2x)) \times\ D\tan(2x)\ =\ (Df)(\tan(2x)) \times \frac{1}{\cos^2(2x)} \times D(2x)\ =\ 2\frac{(Df)(\tan(2x))}{\cos^2(2x)}.$$

Question 3(a) (/9) (Exercice 3(b) de l'examen de Mai 2019) On considère l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{+\infty} (x-1)e^{-x}\,dx$$

Cette intégrale existe et vaut

♣ **1)** $\left[(x-1)e^{-x}\right]_{+\infty}^{0} - \displaystyle\int_0^{+\infty} D(e^{-x})\,dx.$

2) $\left[(x-1)e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} D(e^{-x})\,dx.$

3) $\left[(1-x)e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} D(e^{-x})\,dx.$

4) $\left[(x-1)e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} D(e^{-x})\,dx.$

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Réponse
La fonction $f : x \mapsto (x-1)\ e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Comme elle n'est pas de signe constant sur cet ensemble, on décompose l'intervalle d'intégration en l'union du fermé borné $[0,1]$ (où elle est intégrable) et du non borné $[1,+\infty[$ (où elle est positive) ; on vérifie ensuite l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$ en utilisant la définition sur ce dernier intervalle. On peut aussi utiliser le critère en θ. Soit $\theta = 2 > 1$; on a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2|(x-1)e^{-x}|\right) = \lim_{x\to+\infty}\left((x^3-x^2)e^{-x}\right) = 0,$$

puisque l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste. Comme cette limite existe et est finie, la fonction est intégrable en $+\infty$.
Par une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}(x-1)\ e^{-x}\ dx &= -\left[(x-1)e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx\\ &= \left[(x-1)e^{-x}\right]_{+\infty}^{0} - \int_0^{+\infty} D(e^{-x})\ dx,\end{aligned}$$

expression donnée dans l'item (a).

<u>**Question 3(b)**</u> **(/9) (Partie de l'exercice 10 p.355 de 1 350 cm^3)** Si on note

$$I_m = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(mx)}{\sin(x)}\,dx,\ m\in\mathbb{N}_0$$

et si $n \in \mathbb{N}_0$, que vaut $I_{2n+1} - I_{2n-1}$?

♣ **1)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{D(\sin(2nx))}{n}\,dx$

2) $\displaystyle n\int_0^{\pi/2} D(\sin(2nx))\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{D(\cos(2nx))}{n}\,dx$

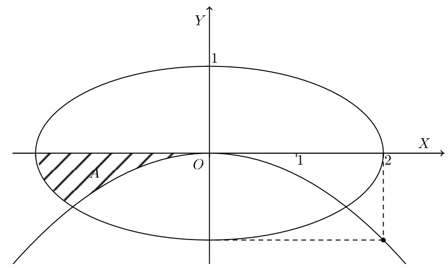
4) La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(mx)}{\sin(x)}$, $m\in\mathbb{N}_0$ n'est pas intégrable sur $]0,\pi/2]$.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Réponse
La fonction $x \mapsto \sin(mx)/\sin(x) (m \in \mathbb{N}_0$ fixé) est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ donc sur $]0,\pi/2]$. La limite en 0^+ de cette fonction vaut m car l'indétermination $0/0$ peut être levée par application du théorème de l'Hospital, ses hypothèses étant vérifiées. La fonction est donc intégrable sur l'intervalle considéré.
Dès lors on obtient successivement

$$\begin{aligned}I_{2n+1} - I_{2n-1} &= \int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\,dx - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n-1)x)}{\sin(x)}\,dx\\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)-\sin((2n-1)x)}{\sin(x)}\,dx\\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{2\sin(x)\cos(2nx)}{\sin(x)}\,dx\\ &= \int_0^{\pi/2} 2\cos(2nx)\,dx\\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{D(\sin(2nx))}{n}\,dx\end{aligned}$$

Question 4 (/5) **(Exercice 4 de l'examen de Mai 2019)** On considère la représentation graphique suivante (une des courbes est une ellipse et l'autre une parabole).



Une description analytique de cet ensemble A fermé borné est

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0],\ y \in [-\sqrt{4-x^2}/2, -x^2/4]\}$.

♣ **2)** $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right],\ x \in [-2\sqrt{1-y^2}, -2\sqrt{-y}]\right\}$.

3) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0],\ y \in [-2\sqrt{1-x^2}, -x^2/4]\}$.

4) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right],\ x \in [-2\sqrt{-y}, -2\sqrt{1-y^2}]\right\}$.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Réponse

L'ensemble A est délimité par une ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{1-y^2}$$

et une parabole d'équation

$$y = -\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{-y}.$$

L'ordonnée des points d'intersection de ces deux courbes vaut $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, puisque on a

$$-y + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } y = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

(avec $\Delta = 1 + 4 = 5$) et est négative. Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right],\ x \in [-2\sqrt{1-y^2}, -2\sqrt{-y}]\right\}.$$

Question 5 (/13) **(Exercice 5(b) de l'examen de Mai 2019)** On donne l'équation différentielle

$$2D^2 f(x) - 5Df(x) + 2f(x) = \frac{1-x}{e^x}.$$

Parmi les fonctions définies ci-dessous, quel est l'item qui donne une (des) solution(s) de l'équation ci-dessus ?

1) $f(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{2x}$, $x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

2) $f(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

3) $f(x) = (-x + 3)\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$.

♣ **4)** $f(x) = -\frac{x}{9}\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Réponse
L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $2D^2f(x) - 5Df(x) + 2f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto 2z^2 - 5z + 2 = (2z-1)(z-2)$ et ses zéros sont $1/2$ et 2. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
L'item (a) ne donne donc que les solutions de l'équation homogène associée et l'item (b) est faux.
Pour continuer, il n'est bien sûr pas nécessaire d'effectuer tous les calculs de résolution complète. Les items (a) et (b) étant écartés, il suffit de dériver la fonction donnée dans les items (c) et (d) et de remplacer dans l'équation pour voir si l'une d'elles vérifie l'équation. On trouve que l'item(d) est correct.
Cependant, si on ne pense pas à cela, une résolution complète va aussi mener au résultat.
Le second membre $(1-x)/e^x = (1-x)\ e^{-x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc on cherche une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre est une exponentielle polynôme, produit d'un polynôme de degré 1 et d'une exponentielle dont le coefficient -1 de l'argument n'est pas zéro du polynôme caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = (Ax+B)\ e^{-x}$ où A et B sont des constantes à déterminer. Puisque

$$\begin{array}{rrcl} & Df_P(x) & = & (A - Ax - B)\ e^{-x} \ = \ (-Ax + A - B)e^{-x} \\ \text{et} & D^2f_P(x) & = & (-A + Ax - A + B)e^{-x} \ = \ (Ax - 2A + B)e^{-x}, \end{array}$$

on a

$$\begin{array}{rl} & 2D^2f_P(x) - 5Df_P(x) + 2f_P(x) \ = \ (1-x)\ e^{-x} \\ \Leftrightarrow & 2(Ax - 2A + B)\ e^{-x} - 5(-Ax + A - B)\ e^{-x} + 2(Ax+B)\ e^{-x} \ = \ (1-x)\ e^{-x} \\ \Leftrightarrow & 2(Ax - 2A + B) - 5(-Ax + A - B) + 2(Ax + B) \ = \ 1 - x \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 2A + 5A + 2A = -1 \\ -4A + 2B - 5A + 5B + 2B = 1 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 9A = -1 \\ -9A + 9B = 1 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} A = -1/9 \\ B = 0. \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = -\frac{x}{9}\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

qui est une solution de l'équation donnée ci-dessus.

Question 6 (/4) (Exercice 6 de l'examen de Mai 2019) William tond le gazon de son jardin en 90 minutes mais son voisin Jules peut le faire en une heure avec sa tondeuse personnelle. Aujourd'hui, William tond depuis 10 minutes quand Jules vient l'aider ; ils finissent la tonte ensemble avec leur propre tondeuse. Combien de temps a-t-il fallu pour que toute la pelouse soit tondue ?

1) Il a fallu 30 minutes pour tondre la pelouse.

♣ **2)** Il a fallu 42 minutes pour tondre la pelouse.

3) Il a fallu 48 minutes pour tondre la pelouse.

4) Il a fallu 54 minutes pour tondre la pelouse.

5) Aucune des autres réponses n'est correcte.

Réponse

Jules tond cette pelouse en 60 minutes. Comme William tond sa pelouse en 90 minutes, après 10 minutes, il aura tondu $\frac{1}{9}$ de la surface. Il reste donc $\frac{8}{9}$ de la surface de la pelouse à tondre.
Si $t > 0$ (en minutes) est le temps durant lequel William et Jules tondent ensemble, on a

$$\frac{8}{9} = \frac{t}{90} + \frac{t}{60} \Leftrightarrow \frac{2t+3t}{180} = \frac{160}{180} \Leftrightarrow 5t = 160 \Leftrightarrow t = 32.$$

Par conséquent, il leur faut 32 minutes pour tondre ensemble le reste de la pelouse. Au final, il faut donc (10+32) minutes, c'est-à-dire 42 minutes pour tondre toute cette pelouse.