Année académique 2021-2022

Corrigé de l'examen de MATH2007 du 14 juin 2022

Version 16 juin 2022

QUESTIONNAIRE

Théorie 1.
Définir géométriquement le produit vectoriel de deux vecteurs libres de l'espace.

Théorie 2.
(2.1) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
(2.2) En déduire que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins un zéro réel. Justifier.

Théorie 3. QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)
Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et colorier complètement la case qui la précède sur cette feuille.

(3.1) Pour rappel, on désigne le produit scalaire par $\bullet$ et le produit vectoriel par $\wedge$. Cela étant, soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Parmi les expressions suivantes, laquelle est un vecteur ?
□ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u})$
□ $(\vec{u} \bullet \vec{v}) \bullet (\vec{v} \wedge \vec{u})$
□ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet (\vec{v} \wedge \vec{u})$
□ $(\vec{u} \bullet \vec{v}) \wedge (\vec{v} \bullet \vec{v})$
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est exacte ?
□ Pour qu'une fonction soit dérivable en un point, il suffit qu'elle soit continue en ce point.
□ Pour qu'une fonction soit continue en un point, il est nécessaire qu'elle soit dérivable en ce point.
□ La dérivabilité d'une fonction implique sa continuité.
□ Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Si la dérivée première de f est décroissante, alors la fonction est négative.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.3) Soit f une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ qui admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$. Que vaut sa limite en $-\infty$?
□ Elle est égale à $-\infty$.
□ Elle est égale à $+\infty$.
□ Elle n'existe pas nécessairement.
□ Il n'y a pas assez de données pour répondre.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.4) Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I et soit g une fonction à valeurs réelles, dérivable sur l'intervalle ouvert J. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?
□ Si l'image de f est incluse dans J alors $F = gof$ est dérivable sur I
et on a $DF = Dg\,Df$ sur I.
□ Si l'image de f contient l'intervalle J alors $F = gof$ est dérivable sur J
et on a $DF = Dg\,Df$ sur J.
□ Si l'image de f est incluse dans J alors $F = gof$ est dérivable sur I
et on a $DF(x) = Dg(y)\,Df(x)$ sur I, avec $y = f(x)$.
□ Si l'image de g contient l'intervalle J alors $F = gof$ est dérivable sur J
et on a $DF(x) = Dg(y)\,Df(x)$ sur J, avec $y = f(x)$.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.5) Si f est une fonction qui n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$, alors
□ sa limite en $+\infty$ n'est jamais nulle.
□ le module de f n'est jamais intégrable sur l'intervalle.
□ sa limite en 0^+ n'est jamais infinie.
□ elle n'est jamais dérivable sur l'intervalle.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

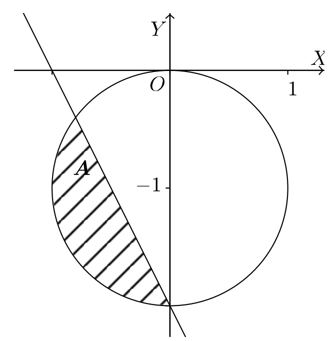
Exercices

1. (1.1) Que vaut $|1 - 2x| - x$ en fonction de la valeur du réel x ?
   (1.2) Dans un repère orthonormé, on donne la droite d d'équation cartésienne $3x - 2y + 6 = 0$ et le point A de coordonnées $(5, -4)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' perpendiculaire à la droite d et passant par le point A.
   (1.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x
   $$2\cos^2(x) - 2 = 3\cos(x).$$
   Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, \pi]$.

2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.
   $$\text{(2.1)} \lim_{x \to -\infty} \left(x\ e^{3x}\right) \qquad \text{(2.2)} \lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + x}\right)$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.
   $$\text{(3.1)} \int_{-\pi/3}^{0} \sin(x)\cos(3x)\ dx \qquad \text{(3.2)} \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x}\ dx$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est un cercle et l'autre est une droite).



5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
   $$D^2 f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x}.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
   Un laborantin a réalisé une succession de tâches identiques pendant 3 heures et 36 minutes. S'il avait mis une minute de moins par tâche, il aurait pu en accomplir trois de plus dans le même laps de temps.
   Combien de tâches a-t-il accomplies ?
   (Rappel : $15^2 = 225; 17^2 = 289; 19^2 = 361; 51^2 = 2601; 53^2 = 2809; 55^2 = 3025$)

7. QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

   Questionnaire A
   (7.1) Que vaut $\cos(17\pi/6)$?
   ☐ $-\sqrt{3}/2$
   ☐ $-1/2$
   ☐ $1/2$
   ☐ $\sqrt{3}/2$
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

   (7.2) Quelle est la partie imaginaire du carré du complexe $\dfrac{2i}{1 + i^3}$?
   ☐ -2

☐ 1
☐ 2
☐ $-2i$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.3) La fonction $\cos^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est une primitive de
☐ $-2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ $2\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ $-\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ $\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Questionnaire B

(7.1) Que vaut $\sin(17\pi/6)$?
☐ $-\sqrt{3}/2$
☐ $-1/2$
☐ $1/2$
☐ $\sqrt{3}/2$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.2) Quelle est la partie imaginaire du carré du complexe $\dfrac{2i}{1-i^3}$?
☐ -2
☐ 1
☐ 2
☐ $-2i$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.3) La fonction $\sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est une primitive de
☐ $-2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ $2\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ $-\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ $\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.
Définir géométriquement le produit vectoriel de deux vecteurs libres de l'espace.

Pour une réponse ≪ type ≫, voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 2.
(2.1) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
(2.2) En déduire que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins un zéro réel. Justifier.

Pour une réponse ≪ type ≫, voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 3. QCM

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et colorier complètement la case qui la précède sur cette feuille.

(3.1) Pour rappel, on désigne le produit scalaire par $\bullet$ et le produit vectoriel par $\wedge$. Cela étant, soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Parmi les expressions suivantes, laquelle est un vecteur ?
♣ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u})$
☐ $(\vec{u} \bullet \vec{v}) \bullet (\vec{v} \wedge \vec{u})$
☐ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet (\vec{v} \wedge \vec{u})$
☐ $(\vec{u} \bullet \vec{v}) \wedge (\vec{v} \bullet \vec{v})$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est exacte ?
☐ Pour qu'une fonction soit dérivable en un point, il suffit qu'elle soit continue en ce point.
☐ Pour qu'une fonction soit continue en un point, il est nécessaire qu'elle soit dérivable en ce point.
♣ La dérivabilité d'une fonction implique sa continuité.
☐ Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Si la dérivée première de f est décroissante, alors la fonction est négative.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.3) Soit f une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ qui admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$. Que vaut sa limite en $-\infty$?
☐ Elle est égale à $-\infty$.
♣ Elle est égale à $+\infty$.
☐ Elle n'existe pas nécessairement.
☐ Il n'y a pas assez de données pour répondre.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.4) Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I et soit g une fonction à valeurs réelles, dérivable sur l'intervalle ouvert J. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?
☐ Si l'image de f est incluse dans J alors $F = gof$ est dérivable sur I
et on a $DF = Dg\, Df$ sur I.
☐ Si l'image de f contient l'intervalle J alors $F = gof$ est dérivable sur J
et on a $DF = Dg\, Df$ sur J.
♣ Si l'image de f est incluse dans J alors $F = gof$ est dérivable sur I
et on a $DF(x) = Dg(y)\, Df(x)$ sur I, avec $y = f(x)$.
☐ Si l'image de g contient l'intervalle J alors $F = gof$ est dérivable sur J
et on a $DF(x) = Dg(y)\, Df(x)$ sur J, avec $y = f(x)$.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.5) Si f est une fonction qui n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$, alors
☐ sa limite en $+\infty$ n'est jamais nulle.
♣ le module de f n'est jamais intégrable sur l'intervalle.

□ sa limite en 0^+ n'est jamais infinie.
□ elle n'est jamais dérivable sur l'intervalle.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Exercices

1. **(1.1) Que vaut $|1-2x|-x$ en fonction de la valeur du réel x ?**
Solution. Par définition, on a

$$|1-2x| \ = \ \left\{ \begin{array}{lll} 1-2x & \text{si} & 1-2x \geq 0 \\ 2x-1 & \text{si} & 1-2x \leq 0. \end{array} \right.$$

Par conséquent, on obtient

$$|1-2x|-x \ = \ \left\{ \begin{array}{lll} 1-3x & \text{si} & x \leq 1/2 \\ x-1 & \text{si} & x \geq 1/2. \end{array} \right.$$

(1.2) Dans un repère orthonormé, on donne la droite d d'équation cartésienne $3x-2y+6=0$ et le point A de coordonnées $(5,-4)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' perpendiculaire à la droite d et passant par le point A.
Solution. Toutes les droites perpendiculaires à la droite d ont une équation du type $2x+3y+c=0$, donc d' également.
Cela étant, puisque d' passe par le point de coordonnées $(5,-4)$, on a $2\times 5+3\times(-4)+c=0$, ce qui donne $c=2$ et finalement d' a pour équation cartésienne $2x+3y+2=0$.
Remarquons que l'on peut également procéder comme suit.
L'équation cartésienne $3x-2y+6=0$ s'écrit aussi $y=(3/2)x+3$. Le coefficient angulaire de d est donc égal à $3/2$; comme d' est perpendiculaire à d, son coefficient angulaire vaut $-2/3$ et d' a ainsi pour équation $y+4=(-2/3)(x-5)$ c'est-à-dire $2x+3y+2=0$.

(1.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x.

$$2\cos^2(x)-2=3\cos(x)$$

Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0,\pi]$.
Solution. L'équation est définie pour tout réel x. Cela étant, comme

$$2\cos^2(x)-2=3\cos(x) \Leftrightarrow 2\cos^2(x)-3\cos(x)-2=0,$$

il est clair qu'il s'agit d'une équation du second degré en $\cos(x)$ dont le discriminant vaut $\Delta=9+16=25$. Les solutions de celle-ci sont

$$\cos(x)=2 \quad \text{et} \quad \cos(x)=-\frac{1}{2}.$$

Cela étant, d'une part l'équation $\cos(x)=2$ en l'inconnue x n'a pas de solution ; d'autre part, on a

$$\cos(x)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists\, k\in\mathbb{Z} : x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \ \text{ ou } \ x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi.$$

Dès lors, la solution dans l'intervalle $[0,\pi]$ est $2\pi/3$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$(2.1)\ \lim_{x\to-\infty}\left(x\, e^{3x}\right) \qquad\qquad (2.2)\ \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)$$

Solution. **(2.1)** La fonction $x\mapsto xe^{3x}$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.
Pour lever l'indétermination $-\infty\ .\ 0^+$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées, en considérant la fonction sous la forme x/e^{-3x}. En effet, si $V=\mathbb{R}$, on a
1) $f : x\mapsto x$ et $g : x\mapsto e^{-3x}$ sont dérivables dans V

2) $Dg(x) = -3e^{-3x} \neq 0$ dans V
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (Df(x)/Dg(x)) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1/(-3e^{-3x})\right) = (-1/3) \lim\limits_{x\to-\infty} (e^{3x}) = 0$, par application du théorème de la limite d'une fonction de fonction puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x) = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$.

Dès lors, la limite cherchée vaut 0. Vu le signe de l'indétermination $(-\infty.0^+)$, on peut même conclure que

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x\ e^{3x}\right) = 0^-.$$

(2.2) La fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2 + x}$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[,$$

ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé. Pour lever l'indétermination $-\infty + \infty$, on multiplie numérateur et dénominateur par le binôme conjugé de $x + \sqrt{x^2 + x}$; on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} (x + \sqrt{x^2 + x}) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + x})(x - \sqrt{x^2 + x})}{x - \sqrt{x^2 + x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - (x^2 + x)}{x - |x|\sqrt{1 + 1/x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - (x^2 + x)}{x(1 + \sqrt{1 + 1/x})} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{1 + 1/x})} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

$$(3.1) \quad \int_{-\pi/3}^{0} \sin(x)\cos(3x)\ dx \qquad\qquad (3.2) \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x}\ dx$$

Solution. **(3.1)** La fonction $x \mapsto \sin x \cos(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[-\pi/3, 0]$. Cela étant, comme

$$\sin x \cos(3x) = \frac{1}{2}(\sin(4x) - \sin(2x)),$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/3}^{0} \sin x \cos(3x)\ dx &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(4x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{2}\right]_{-\pi/3}^{0} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{3}{16}.
\end{aligned}$$

(3.2) La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x(x + 1)}$$

est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ donc sur $[1, +\infty[$, ensemble fermé non borné. L'intégrabilité en $+\infty$ s'obtient immédiatement par le critère de comparaison car on a

$$\left|\frac{1}{x^2+x}\right| \leq \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 1$$

avec $x \mapsto 1/x^2$ intégrable en $+\infty$.
Cela étant, le calcul de la valeur de l'intégrale s'effectue en utilisant la décomposition en fractions simples. On a

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Ces égalités sont équivalentes à

$$1 = (A+B)x + A, \quad x \in \mathbb{R}$$

ou encore à

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1, \end{cases}$$

ce qui donne $A = 1$ et $B = -1$.
Cherchons à présent une primitive de la fonction à intégrer sur $]1, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx &= \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{1}{x+1}\, dx \\ &\simeq \ln(|x|) - \ln(|x+1|) \\ &\simeq \ln\left(\frac{x}{x+1}\right). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\, dx &= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) - \ln\left(2^{-1}\right). \end{aligned}$$

L'application du théorème de la limite d'une fonction de fonction donne

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = 0$$

car

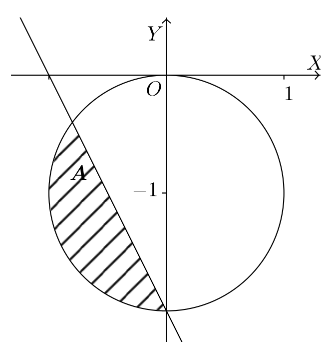
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{y\to1} \ln(y) = 0.$$

On obtient donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\, dx = \ln(2).$$

Remarque : puisque la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, on peut bien sûr directement prouver l'intégrabilité et trouver la valeur de l'intégrale en utilisant la définition.

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est un cercle et l'autre est une droite).**



Solution. Le cercle de rayon 1 centré au point de coordonnées $(0, -1)$ a pour équation cartésienne $x^2 + (y+1)^2 = 1$ et la droite représentée a pour équation cartésienne $y = -2x - 2$. La question posée incite à rechercher l'abscisse strictement négative du point d'intersection entre les deux courbes. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x^2 + (y+1)^2 = 1 \\ y = -2x - 2 \end{array}\right. \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = -2x - 2 \\ x^2 + (-2x-1)^2 = 1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = -2x - 2 \\ 5x^2 + 4x = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = -2x - 2 \\ x = 0 \text{ ou } x = -4/5 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

L'abscisse recherchée est donc égale à $-4/5$.
D'autre part, on a

$$x^2 + (y+1)^2 = 1 \Leftrightarrow y = -1 - \sqrt{1-x^2} \text{ ou } y = -1 + \sqrt{1-x^2}.$$

Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\begin{aligned}
E = &\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[-1, -\frac{4}{5}\right],\ y \in \left[-1 - \sqrt{1-x^2}, -1 + \sqrt{1-x^2}\right]\right\} \\
&\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[-\frac{4}{5}, 0\right],\ y \in \left[-1 - \sqrt{1-x^2}, -2x - 2\right]\right\}.
\end{aligned}$$

5. **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2 f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) - 4f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 - 4$ dont les zéros sont -2 et 2. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1\, e^{-2x} + c_2\, e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto 1 + e^{2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une somme de deux fonctions, cherchons tout d'abord une solution particulière de $D^2 f(x) - 4f(x) = 1$ (*).
On voit immédiatement que la fonction $f_1(x) = -1/4, x \in \mathbb{R}$ est solution de (*).
Cherchons à présent une solution particulière de $D^2 f(x) - 4f(x) = e^{2x}$ (**).
Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1.e^{2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient 2 de l'argument est solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_2(x) = Ax\, e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.
Comme $Df_2(x) = A(1+2x)e^{2x}$ et $D^2 f_2(x) = 4A(1+x)e^{2x}$, en remplaçant dans (**), on a

$$4A(1+x)e^{2x} - 4Axe^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow 4A(1+x) - 4Ax = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $f_2(x) = x\, e^{2x}/4,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1\, e^{-2x} + \left(c_2 + \frac{1}{4}x\right)\, e^{2x} - \frac{1}{4},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un laborantin a réalisé une succession de tâches identiques pendant 3 heures et 36 minutes. S'il avait mis une minute de moins par tâche, il aurait pu en accomplir trois de plus dans le même laps de temps.
Combien de tâches a-t-il accomplies ?
(Rappel : $15^2 = 225; 17^2 = 289; 19^2 = 361; 51^2 = 2601; 53^2 = 2809; 55^2 = 3025$)
Solution. Soit $x > 0$ le nombre de tâches accomplies par le laborantin et $t > 0$ le temps en minutes pour accomplir une tâche. Par ailleurs, 3 heures 36 minutes = $(3\times 60+36)$ minutes = 216 minutes.

Dès lors, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} xt = 216 \\ (x+3)(t-1) = 216. \end{cases}$$

On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{cases} x = 216/t \\ (216/t+3)\,(t-1) = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 216/t \\ 216 + 3t - \ 216/t - 3 = 216. \end{cases}$$

Résolvons la seconde équation. On a successivement

$$\begin{aligned} 216 + 3t - \ 216/t - 3 = 216 \quad &\Leftrightarrow \quad 3t^2 - 3t - 216 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t^2 - t - 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (t-9)(t+8) = 0. \end{aligned}$$

Comme $t > 0$, la seule solution de cette équation est $t = 9$. En introduisant cette valeur dans la première équation du système, on obtient $x = 216/9 = 24$.
Ainsi, le laborantin a accompli 24 tâches.

7. (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Questionnaire A
(7.1) Que vaut $\cos(17\pi/6)$?
♣ $-\sqrt{3}/2$
☐ $-1/2$
☐ $1/2$
☐ $\sqrt{3}/2$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.2) Quelle est la partie imaginaire du carré du complexe $\dfrac{2i}{1+i^3}$?
♣ -2
☐ 1
☐ 2
☐ $-2i$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.3) La fonction $\cos^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est une primitive de
☐ $-2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ $2\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$
♣ $-\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ $\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Questionnaire B
(7.1) Que vaut $\sin(17\pi/6)$?
☐ $-\sqrt{3}/2$
☐ $-1/2$

♣ $1/2$
☐ $\sqrt{3}/2$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.2) Quelle est la partie imaginaire du carré du complexe $\dfrac{2i}{1-i^3}$?
☐ -2
☐ 1
♣ 2
☐ $-2i$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.3) La fonction $\sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est une primitive de
☐ $-2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ $2\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ $-\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$
☐ $\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$
♣ Aucune des autres propositions n'est correcte.