Mathématiques générales I (MATH2007)

Année académique 2023-2024

Examen du 14 juin 2024
Questionnaire et corrigé

Version 15 mai 2024

Mathématiques générales I, MATH 2007
Questionnaire de l'examen du 14 juin 2024

Consignes

- Compléter le tableau ci-dessous avant de ***rendre vos copies accompagnées de cette feuille***.
- Sur ***chaque*** feuille, indiquer vos ***NOM (en capitales, caractères d'imprimerie), votre prénom (en minuscules, sauf première lettre) et votre section***.
- ***Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées***.
- ***Justifier toutes vos réponses, SAUF celles du QCM***.
- Les calculatrices, montres connectées (style iWatch), gsm etc ... sont interdits.
- Le Journal de Bord est permis et sera fourni ***sur demande***.

NOM : ....

Prénom : ....

Matricule : ....

SECTION :..................................

Signature :

Indiquer une CROIX dans la colonne correspondante
pour les QUESTIONS OUVERTES
AUXQUELLES VOUS NE REPONDEZ PAS.

Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Question 7	Question 8

QCM

Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0
Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

Théorie

(1) On donne la droite d'équation cartésienne $2\beta x + \alpha y + \gamma = 0$ où α, β, γ sont des réels avec α, β non simultanément nuls. Les composantes d'un vecteur orthogonal à cette droite sont
☐ $(-2\beta, \alpha)$.
☐ $(2\beta, \alpha)$.
☐ $(\alpha, -2\beta)$.
☐ $(\alpha, 2\beta)$.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?
☐ Pour qu'une fonction soit continue, il est nécessaire qu'elle soit dérivable.
☐ Si une fonction dérivable possède une dérivée nulle en un point, alors elle y possède un extremum.
☐ Pour qu'une fonction soit intégrable sur l'intervalle borné $[0, 1[$, il suffit qu'elle y soit continue.
☐ Si une fonction est strictement décroissante, alors elle est injective.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Si f, g sont deux fonctions telles que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et si $g(x)$ appartient au domaine de définition de f quel que soit le réel x du domaine de définition de g, alors
☐ $\lim_{x\to-\infty} f(g(x)) = 3$.
☐ $\lim_{x\to-\infty} g(f(x)) = 3$.
☐ $\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = 3$.
☐ $\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = 3$.
☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

(4) Soient f, g deux fonctions définies sur $]0, 1]$. Si la limite des valeurs de f en 0^+ est infinie et si la limite des valeurs de g en 0^+ est un réel alors la limite des valeurs du quotient f/g en 0^+
☐ est toujours un réel non nul.
☐ est toujours nulle.
☐ n'est jamais infinie.
☐ est toujours infinie.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(5) Le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer comme suit :
≪ On considère une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, à valeurs réelles. Si les limites de f aux bords de l'intervalle existent et sont différentes (on les note A et B par exemple), alors *quel que soit le réel strictement compris entre ces limites, il existe toujours un réel de l'intervalle en lequel f prend la valeur du réel qu'on a fixé au départ.* ≫.

Si A est réel et B est $+\infty$, alors la partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit
☐ $\forall R \in]a, b[,\ \exists r \in]A, +\infty[$ tel que $f(R) = r$.
☐ $\forall r \in]A, +\infty[,\ \exists R \in]a, b[$ tel que $f(R) = r$.
☐ $\exists R \in]a, b[$ tel que $f(R) = r \quad \forall r \in]A, +\infty[$.
☐ $\exists r \in]A, +\infty[$ tel que $f(R) = r \quad \forall R \in]a, b[$.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Exercices

(6) Que vaut $\sin(17\pi/6)$?
☐ $-\sqrt{3}/2$
☐ $-1/2$
☐ $1/2$
☐ $\sqrt{3}/2$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Soit l'équation cartésienne $(x + r)^2 - y^2 + (x - r)^2 = 1$ où r est un réel non nul fixé. Il s'agit de l'équation
☐ d'un cercle.
☐ d'une ellipse.
☐ d'une parabole.
☐ d'une hyperbole.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $\cos(x)\,\sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est une primitive de
☐ $-\sin^3(x)/3,\ x \in \mathbb{R}$.
☐ $\sin^3(x)/3,\ x \in \mathbb{R}$.
☐ $\sin^2(x)\,\cos^3(x)/6,\ x \in \mathbb{R}$.
☐ $-\sin(x)\,\cos^3(x)/3,\ x \in \mathbb{R}$.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1

(1.1) Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs, en précisant bien ce que les notations signifient.

(1.2) Dans une base orthonormée du plan, donner l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs, en précisant bien ce que les notations signifient.

Question 2

(2.1) Enoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.

(2.2) Enoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit.

(2.3) En vous servant de la propriété que vous avez énoncée au point (2.1), démontrer la propriété que vous avez énoncée au point (2.2).

(2.4) Que signifie la notation $C_1(]0,+\infty[)$?

(2.5) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_1(]0,+\infty[)$.

Exercices

Question 3 ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***

Trois artificiers A,B,C ont tiré des feux d'artifice ; A et B ont tiré ensemble 5/3 du nombre de coups tirés par C ; B et C ont tiré ensemble 32 coups de plus que A. Quant à B, il a tiré 28 coups de moins que A et C ensemble. Calculer le nombre de coups tirés par chaque artificier.

Question 4

(4.1) Déterminer le module et la partie imaginaire du carré du nombre complexe $i^{15}/(1-2i)$.

(4.2) Résoudre l'inéquation $1/|x| \geq x$ en l'inconnue réelle x.

(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$2\cos^2(x) + \cos(2x) = 0.$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, 0]$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1)\ \lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1+x^2}{x^3}\right) \qquad (5.2)\ \lim_{x\to+\infty} \Big(\ln(x)\,\exp(-2x)\Big)$$

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1)\ \int_{e^{-1}}^{1} \frac{\ln^2(x)}{x}\,dx \qquad (6.2)\ \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)}\,dx$$

Question 7

Les expressions suivantes sont-elles **définies** ? Justifier.

$$(7.1)\cos\left(\arcsin\left(\frac{-3\pi}{7}\right)\right) \quad (7.2)\ln\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) \quad (7.3)\arctan\left(\arctan(-3)\right) \quad (7.4)\sqrt{(-\ln(2))^2}$$

Question 8 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - 2Df(x) = e^{2x} - 2.$$

Mathématiques générales I, MATH 2007
Corrigé de l'examen du vendredi 14 juin 2024

QCM

Théorie

(1) On donne la droite d'équation cartésienne $2\beta x + \alpha y + \gamma = 0$ où α, β, γ sont des réels avec α, β non simultanément nuls. Les composantes d'un vecteur orthogonal à cette droite sont
□ $(-2\beta, \alpha)$.
♣ $(2\beta, \alpha)$.
□ $(\alpha, -2\beta)$.
□ $(\alpha, 2\beta)$.
□ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?
□ Pour qu'une fonction soit continue, il est nécessaire qu'elle soit dérivable.
□ Si une fonction dérivable possède une dérivée nulle en un point, alors elle y possède un extremum.
□ Pour qu'une fonction soit intégrable sur l'intervalle borné $[0, 1[$, il suffit qu'elle y soit continue.
♣ Si une fonction est strictement décroissante, alors elle est injective.
□ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Si f, g sont deux fonctions telles que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et si $g(x)$ appartient au domaine de définition de f quel que soit le réel x du domaine de définition de g, alors
□ $\lim_{x\to-\infty} f(g(x)) = 3$.
□ $\lim_{x\to-\infty} g(f(x)) = 3$.
♣ $\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = 3$.
□ $\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = 3$.
□ Aucune des autres réponses n'est correcte.

(4) Soient f, g deux fonctions définies sur $]0, 1]$. Si la limite des valeurs de f en 0^+ est infinie et si la limite des valeurs de g en 0^+ est un réel alors la limite des valeurs du quotient f/g en 0^+
□ est toujours un réel non nul.
□ est toujours nulle.
□ n'est jamais infinie.
♣ est toujours infinie.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(5) Le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer comme suit :
≪ On considère une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, à valeurs réelles. Si les limites de f aux bords de l'intervalle existent et sont différentes (on les note A et B par exemple), alors *quel que soit le réel strictement compris entre ces limites, il existe toujours un réel de l'intervalle en lequel f prend la valeur du réel qu'on a fixé au départ.* ≫.

Si A est réel et B est $+\infty$, alors la partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit
□ $\forall R \in]a, b[,\ \exists r \in]A, +\infty[$ tel que $f(R) = r$.
♣ $\forall r \in]A, +\infty[,\ \exists R \in]a, b[$ tel que $f(R) = r$.
□ $\exists R \in]a, b[$ tel que $f(R) = r \quad \forall r \in]A, +\infty[$.
□ $\exists r \in]A, +\infty[$ tel que $f(R) = r \quad \forall R \in]a, b[$.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Exercices

(6) Que vaut $\sin(17\pi/6)$?
☐ $-\sqrt{3}/2$
☐ $-1/2$
♣ $1/2$
☐ $\sqrt{3}/2$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Soit l'équation cartésienne $(x+r)^2 - y^2 + (x-r)^2 = 1$ où r est un réel non nul fixé. Il s'agit de l'équation
☐ d'un cercle.
☐ d'une ellipse.
☐ d'une parabole.
♣ d'une hyperbole.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $\cos(x)\ \sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est une primitive de
☐ $-\sin^3(x)/3,\ x \in \mathbb{R}$.
☐ $\sin^3(x)/3,\ x \in \mathbb{R}$.
☐ $\sin^2(x)\ \cos^3(x)/6,\ x \in \mathbb{R}$.
☐ $-\sin(x)\ \cos^3(x)/3,\ x \in \mathbb{R}$.
♣ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1
(1.1) Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs, en précisant bien ce que les notations signifient.
(1.2) Dans une base orthonormée du plan, donner l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs, en précisant bien ce que les notations signifient.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours.*

Question 2
(2.1) Enoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.2) Enoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.3) En vous servant de la propriété que vous avez énoncée au point (2.1), démontrer la propriété que vous avez énoncée au point (2.2).
(2.4) Que signifie la notation $C_1(]0,+\infty[)$?
(2.5) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_1(]0,+\infty[)$.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours.*

Exercices

Question 3 ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***
Trois artificiers A, B, C ont tiré des feux d'artifice ; A et B ont tiré ensemble 5/3 du nombre de coups tirés par C ; B et C ont tiré ensemble 32 coups de plus que A. Quant à B, il a tiré 28 coups de moins que A et C ensemble. Calculer le nombre de coups tirés par chaque artificier.

Exemple de résolution. Soient x, y et z les nombres de tirs effectués respectivement par A, B et C. Les données du problème se traduisent donc par le système suivant qu'il faut résoudre. On a successivement

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=5z/3 \\ y+z=x+32 \\ y+28=x+z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=5z/3 \\ x-y-z=-32 \\ x-y+z=28 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y=5z/3 \\ x-y=z-32 \\ 2z=60 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y=50 \\ x-y=-2 \\ z=30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=24 \\ y=26 \\ z=30. \end{cases}$$

Ainsi, A, B et C ont respectivement tiré 24, 26 et 30 coups.

Question 4

(4.1) Déterminer le module et la partie imaginaire du carré du nombre complexe $i^{15}/(1-2i)$.

Solution. On a

$$z = \left(\frac{i^{15}}{1-2i}\right)^2 = \frac{i^{30}}{-3-4i} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{25}.$$

Dès lors, son module et sa partie imaginaire valent respectivement

$$|z| = \frac{\sqrt{9+16}}{25} = \frac{\sqrt{25}}{25} = \frac{1}{5} \text{ et } \Im(z) = \frac{-4}{25}.$$

(4.2) Résoudre l'inéquation $1/|x| \geq x$ en l'inconnue réelle x.

Solution. Comme x est au dénominateur, on ne doit pas considérer le cas $x = 0$.

De plus, comme la valeur absolue d'un réel est un réel positif, le premier membre est positif. Par conséquent, si le second est négatif, l'inéquation est toujours vérifiée.

Cela étant, pour $x > 0$, on a les équivalences suivantes

$$\frac{1}{|x|} \geq x \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x} \geq x \Leftrightarrow 1 \geq x^2 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$$

Les solutions de l'inéquation donnée sont donc les réels de l'ensemble

$$]-\infty, 0[\cup]0, 1].$$

(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$2\cos^2(x) + \cos(2x) = 0.$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, 0]$.

Solution. Quel que soit le réel x, on a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \;\Leftrightarrow\; 2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$ et dès lors

$$\begin{aligned} 2\cos^2(x) + \cos(2x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2x) + 1 + \cos(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(2x) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} : 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} : x = -\frac{\pi}{3} + k\pi. \end{aligned}$$

Cela étant, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, 0]$ sont les réels $-2\pi/3$ et $-\pi/3$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1)\quad \lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1+x^2}{x^3}\right) \qquad\qquad (5.2)\quad \lim_{x\to+\infty}\Big(\ln(x)\,\exp(-2x)\Big)$$

Solution. **(5.1)** La fonction $x \mapsto \arctan\big((1+x^2)/x^3\big)$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R}_0.$$

Comme tout intervalle du type $]-r, 0[$ $(r > 0)$ rencontre ce domaine, le calcul de la limite en 0^- peut donc être envisagé.

Comme

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1+x^2}{x^3}\right) = -\infty$$

et que

$$\lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2},$$

le théorème des limites des fonctions de fonction permet d'obtenir

$$\lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1+x^2}{x^3}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

(5.2) La fonction $x \mapsto \ln(x)\,\exp(-2x)$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[.$$

Puisque cet ensemble n'est pas majoré, le calcul de la limite en $+\infty$ peut être envisagé.

D'une part, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

D'autre part, comme on a

$$\lim_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty \text{ et } \lim_{z\to-\infty}\exp(z) = 0^+,$$

le théorème des limites des fonctions de fonction permet d'obtenir

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(-2x) = 0^+.$$

Pour lever l'indétermination ≪ $+\infty \times 0^+$ ≫, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées en considérant la fonction sous la forme $\ln(x)/\exp(2x)$.

En effet, dans $V =]0, +\infty[$, considérons $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto \exp(2x)$.

1) Ces deux fonctions sont dérivables sur V.

2) L'expression explicite de la dérivée de g est $2\exp(2x)$ donc est non nulle sur V.

3) De plus,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2\exp(2x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x\exp(2x)} = 0,$$

puisque $\lim_{x\to+\infty}(2x\exp(2x)) = +\infty$.

Les hypothèses sont donc vérifiées. Il s'ensuit que la limite vaut

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln(x)\exp(-2x)) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\exp(2x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{Df(x)}{Dg(x)} = 0.$$

On pourraît même préciser $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x)\exp(-2x)) = 0^+$.

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1)\quad \int_{e^{-1}}^{1} \frac{\ln^2(x)}{x}\, dx \qquad\qquad (6.2)\quad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)}\, dx$$

Solution. **(6.1)** La fonction $f : x \mapsto \ln^2(x)/x$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc sur l'intervalle fermé borné $[e^{-1},1]$; elle est donc intégrable sur cet ensemble.

Par une intégration par substitution, on a successivement

$$\begin{aligned}
\int_{e^{-1}}^{1} \frac{\ln^2(x)}{x}\, dx &= \int_{e^{-1}}^{1} \ln^2(x)\ D(\ln(x))\ dx \\
&= \left[\frac{\ln^3(x)}{3}\right]_{e^{-1}}^{1} \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln^3(1) - \ln^3\left(e^{-1}\right)\right) \\
&= \frac{0-(-1)^3}{3} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(6.2) La fonction $f : x \mapsto 1/(x(1+x))$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ donc sur $[1,+\infty[$, ensemble non borné. On peut vérifier l'intégrabilité en $+\infty$ en utilisant la définition ; comme la fonction est à valeurs positives sur l'intervalle donné, on obtiendra tout de suite la valeur de l'intégrale.

Décomposons la fraction donnée en une somme de fractions simples ; on a

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)},\ \ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\},$$

ce qui donne $A = 1$ et $B = -1$.

Pour tout $t > 1$, la fonction $x \mapsto (1/x - 1/(x+1))$, continue sur $[1,t]$, est intégrable sur $[1,t]$ et on a

$$\int_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\, dx = \Big[\ln(x) - \ln(x+1)\Big]_1^t = \left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^t = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x(x+1)}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + \ln(2) = \ln(2),$$

l'application du théorème des limites des fonctions de fonction donnant

$$\lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) = \lim_{y\to 1} \ln(y) = 0.$$

Comme la fonction $x \mapsto (1/(x(1+x))$ est à valeurs positives sur $[1,+\infty[$ et que la limite précédente est finie, la fonction est intégrable et la valeur de son intégrale sur $[1,+\infty[$ vaut $\ln(2)$.

Question 7 Les expressions suivantes sont-elles définies ? Justifier.

$$(7.1)\cos\left(\arcsin\left(\frac{-3\pi}{7}\right)\right) \quad (7.2)\ln\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) \quad (7.3)\arctan\left(\arctan(-3)\right) \quad (7.4)\sqrt{\left(-\ln(2)\right)^2}$$

Solution. **(7.1)** La fonction arcsinus est définie sur $[-1,1]$; comme $-3\pi/7 < -1$, la première expression n'est pas définie.

(7.2) Les fonctions cosinus et ln sont définies respectivemet sur $\mathbb{R}$ et $]0,+\infty[$ et l'ensemble image de la fonction cosinus est $[-1,1]$. Comme $7\pi/4$ est la mesure d'un angle du quatrième quadrant, son cosinus est strictement positif. L'expression donnée est donc définie.

(7.3) La fonction arctangente étant définie sur $\mathbb{R}$, l'expression donnée est définie.

(7.4) Les fonctions racine carrée et ln sont définies respectivement sur $[0,+\infty[$ et $]0,+\infty[$. Comme le carré d'un réel est positif, l'expression donnée est définie.

Question 8 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) - 2Df(x) = e^{2x} - 2.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

L'équation homogène associée est $D^2f - 2Df = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 - 2z = z(z-2)$ et ses zéros sont 0 et 2. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 + c_2e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto e^{2x} - 2$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une somme de deux fonctions, cherchons tout d'abord une solution particulière de $D^2f(x) - 2Df(x) = -2$ (*) .

On voit immédiatement que $f_1(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$ est solution de (*).

Cherchons à présent une solution particulière de $D^2f(x) - 2Df(x) = e^{2x}$ (**).
Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $x \mapsto 1 \times e^{2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient 2 de la variable est zéro simple du polynôme caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_2(x) = Ax\,e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.

Comme

$$Df_2(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} = A(1+2x)e^{2x} \text{ et } D^2f_2(x) = 2Ae^{2x} + 2A(1+2x)e^{2x} = 4A(1+x)e^{2x},$$

en remplaçant dans (**), on a

$$4A(1+x)e^{2x} - 2A(1+2x)e^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow A = 1/2.$$

Ainsi, $f_2(x) = xe^{2x}/2,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 + c_2e^{2x} + x + xe^{2x}/2,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.