Année académique 2021-2022

Corrigé de l'examen de MATH2007 du 03 janvier 2022

Version 24 janvier 2022

QUESTIONNAIRE

Théorie

Théorie 1.
(1.1) Enoncer la propriété fondamentale de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(1.2) Enoncer la propriété fondamentale de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit. Démontrer cette propriété en vous servant du point précédent.

Théorie 2.
(2.1) On donne une fonction continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?
(2.2) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir la condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ $(r \in \mathbb{R})$.

Théorie 3. QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)
Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et colorier complètement la case qui la précède sur cette feuille.

(3.1) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?
□ Pour que f soit continu sur I, il est nécessaire qu'elle soit dérivable sur I.
□ Pour que f soit dérivable sur I, il est nécessaire qu'elle soit continue sur I.
□ Pour que f soit dérivable sur I il est suffisant qu'elle soit continue sur I.
□ Si f est continu sur I alors elle est dérivable sur I.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.2) Soient r, s des réels strictement positifs et distincts. Dans un repère orthonormé du plan, l'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{s^2}=1$$

est toujours celle d'une ellipse
□ dont les foyers sont sur l'axe des ordonnées.
□ dont les foyers sont sur l'axe des abscisses.
□ dont l'excentricité est égale à $\sqrt{1-(r/s)^2}$.
□ dont l'excentricité est égale à $\sqrt{1-(s/r)^2}$.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.3) Soient f, g deux fonctions définies sur $]0,+\infty[$. Si la limite des valeurs de f en 0^+ est un réel et si la limite des valeurs de g en 0^+ est infinie alors la limite des valeurs du produit fg en 0^+
□ est toujours un réel.
□ n'est jamais un réel.
□ n'est jamais infinie.
□ est toujours infinie.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.4) Si une primitive d'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I à valeurs réelles a une dérivée seconde positive, alors
□ la fonction est convexe sur l'intervalle.
□ la dérivée de la fonction est convexe sur l'intervalle.
□ la fonction est croissante sur l'intervalle.
□ la dérivée de la fonction est croissante sur l'intervalle.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.5) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est exacte ?
□ Si f_1 et f_2 sont solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, alors $f_1 + f_2$ est

solution de cette même équation.
□ Si f_1 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, alors $2f_1$ est solution de cette même équation.
□ Si f_1 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants et f_2 solution de l'équation homogène associée, alors $f_1 - 2f_2$ est solution de l'équation non homogène.
□ Si f_1 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, alors f_1^2 est solution de cette même équation.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

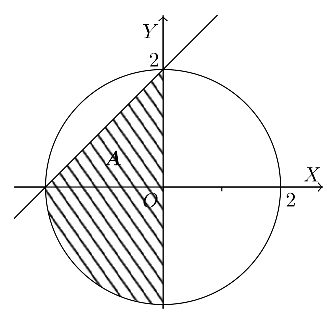
Exercices

1. (1.1) Que vaut $x - |2x - x^2|$ en fonction de la valeur du réel strictement négatif x ?
(1.2) Dans un repère orthonormé, on donne la droite d d'équation cartésienne $4x - 2y + 5 = 0$ et le point A de coordonnées $(3, -1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' parallèle à la droite d et passant par le point A.
(1.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x
$$\cos(2x) - 5\cos(x) = -3.$$
Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, 0]$.

2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.
$$(2.1)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{e^{-1/x}} \qquad\qquad (2.2)\ \lim_{x\to -\infty} \arctan\left(\frac{x^3 - x}{\sqrt{x^3+1}}\right)$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.
$$(3.1)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+1)}\, dx \qquad\qquad (3.2)\ \int_e^{e^2} x \ln(x)\, dx$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est un cercle et l'autre est une droite).



5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$D^2 f(x) + 2Df(x) = 1 + e^{-x}.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
Sur une carte à l'échelle 1/5000, la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 3 cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?

7. (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Questionnaire A
(7.1) Que vaut le sinus de 6 ?
□ $\sqrt{1-\cos^2(6)}$
□ $|\cos(6)|\,\tan(6)$

☐ $2\sin(3)$
☐ Il n'existe pas.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.2) Quelle est la partie imaginaire du complexe $\dfrac{i-2}{1+i^3}$?
☐ -1
☐ $-1/2$
☐ $-i$
☐ $-i/2$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.3) Que vaut la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(\cos(x))$?
☐ $x \mapsto \cos(\sin(x))$
☐ $x \mapsto -\cos(\sin(x))$
☐ $x \mapsto -\cos(\cos(x))\,\sin(x)$
☐ $x \mapsto -\cos(\sin(x))\,\sin(x)$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Questionnaire B

(7.1) Quelle est la partie imaginaire du complexe $\dfrac{-i+2}{i-i^3}$?
☐ 1
☐ $1/2$
☐ $-i$
☐ $-i/2$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.2) Que vaut le cosinus de 4 ?
☐ $\sqrt{1-\sin^2(4)}$
☐ $|\sin(4)|\,\mathrm{cotan}(4)$
☐ $2\cos(2)$
☐ Il n'existe pas.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.3) Que vaut la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(\sin(x))$?
☐ $x \mapsto \sin(\cos(x))$
☐ $x \mapsto -\sin(\cos(x))$
☐ $x \mapsto -\sin(\sin(x))\,\cos(x)$
☐ $x \mapsto \sin(\sin(x))\,\cos(x)$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.
(1.1) Enoncer la propriété fondamentale de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(1.2) Enoncer la propriété fondamentale de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit. Démontrer cette propriété en vous servant du point précédent.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 2.
(2.1) On donne une fonction continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?
(2.2) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir la condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ ($r \in \mathbb{R}$).

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).
Remarques pour les réponses erronées ; informations sur la façon de lire la question et de répondre A LA QUESTION POSEE.

La définition de l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ est la suivante (cf cours enseigné et syllabus page 137 de la version à utiliser cette année, en adaptant les notations).
(2.1) Soit une fonction f continue sur $[1,+\infty[$. Par définition, cette fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$ lorsque la limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t |f(x)|\, dx$$

est finie.
Notes :
**quel que soit $t > 1$ la fonction f est continue sur $[1,t]$, intervalle fermé borné ; elle y est donc intégrable ; dès lors l'expression dont on considère la limite a un sens ;*
**la fonction $t \to \int_1^t |f(x)|\, dx$ étant croissante sur $[1,+\infty[$, elle admet toujours une limite en $+\infty$; on a donc tout de suite l'existence de la limite.*

Trop souvent, on constate (sur les feuilles rendues) une utilisation des « Critères d'intégrabilité » (page 140 de la version du syllabus à utiliser cette année) en lieu et place de la DEFINITION
(2.2) Un énoncé et une preuve corrects pour ce point (qui doit utiliser la réponse à (2.1) comme spécifié) se trouvent page 139 de la version du syllabus, énoncé et preuve bien sûr à adapter (notations !) A LA QUESTION POSEE (comme bien dit au cours, à l'examen, on change bien sûr les notations pour poser la question)

Théorie 3. QCM

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et colorier complètement la case qui la précède sur cette feuille.

(3.1) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?
□ **Pour que f soit continu sur I, il est nécessaire qu'elle soit dérivable sur I.**
♣ **Pour que f soit dérivable sur I, il est nécessaire qu'elle soit continue sur I.**
□ **Pour que f soit dérivable sur I il est suffisant qu'elle soit continue sur I.**
□ **Si f est continu sur I alors elle est dérivable sur I.**
□ **Aucune des autres propositions n'est correcte.**

(3.2) Soient r, s des réels strictement positifs et distincts. Dans un repère orthonormé du plan, l'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{s^2} = 1$$

est toujours celle d'une ellipse
☐ **dont les foyers sont sur l'axe des ordonnées.**
☐ **dont les foyers sont sur l'axe des abscisses.**
☐ **dont l'excentricité est égale à $\sqrt{1-(r/s)^2}$.**
☐ **dont l'excentricité est égale à $\sqrt{1-(s/r)^2}$.**
♣ **Aucune des autres propositions n'est correcte.**

(3.3) Soient f, g deux fonctions définies sur $]0,+\infty[$. Si la limite des valeurs de f en 0^+ est un réel et si la limite des valeurs de g en 0^+ est infinie alors la limite des valeurs du produit fg en 0^+
☐ **est toujours un réel.**
☐ **n'est jamais un réel.**
☐ **n'est jamais infinie.**
☐ **est toujours infinie.**
♣ **Aucune des autres propositions n'est correcte.**

(3.4) Si une primitive d'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I à valeurs réelles a une dérivée seconde positive, alors
☐ **la fonction est convexe sur l'intervalle.**
☐ **la dérivée de la fonction est convexe sur l'intervalle.**
♣ **la fonction est croissante sur l'intervalle.**
☐ **la dérivée de la fonction est croissante sur l'intervalle.**
☐ **Aucune des autres propositions n'est correcte.**

(3.5) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est exacte ?
☐ **Si f_1 et f_2 sont solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, alors f_1+f_2 est solution de cette même équation.**
☐ **Si f_1 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, alors $2f_1$ est solution de cette même équation.**
♣ **Si f_1 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants et f_2 solution de l'équation homogène associée, alors f_1-2f_2 est solution de l'équation non homogène.**
☐ **Si f_1 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, alors f_1^2 est solution de cette même équation.**
☐ **Aucune des autres propositions n'est correcte.**

Exercices

1. **(1.1) Que vaut $x-|2x-x^2|$ en fonction de la valeur du réel strictement négatif x ?**
   Solution. Par définition, on a
   $$|2x-x^2| \;=\; \begin{cases} 2x-x^2 & \text{si} \quad 2x-x^2\geq 0 \\ -2x+x^2 & \text{si} \quad 2x-x^2\leq 0. \end{cases}$$
   Puisque x est un réel strictement négatif, il est clair que $2x-x^2<0$ et dès lors
   $$x-|2x-x^2| \;=\; x-(-2x+x^2) \;=\; x+2x-x^2 \;=\; 3x-x^2.$$

   (1.2) Dans un repère orthonormé, on donne la droite d d'équation cartésienne $4x-2y+5=0$ et le point A de coordonnées $(3,-1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' parallèle à la droite d et passant par le point A.
   Solution. Toutes les droites parallèles à la droite d ont une équation du type $4x-2y+c=0$, donc d' également.
   Cela étant, puisque d' passe par le point de coordonnées $(3,-1)$, on a $4\times 3-2\times(-1)+c=0$, ce qui donne $c=-14$ et finalement d' a pour équation cartésienne $2x-y-7=0$.
   Remarquons que l'on peut également procéder comme suit. L'équation cartésienne $4x-2y+5=0$ s'écrit aussi $y=2x+5/2$. Le coefficient angulaire de d est donc égal à 2 ; comme d' est parallèle à d, son coefficient angulaire vaut 2 aussi et d' a ainsi pour équation $y+1=2(x-3)$ c'est-à-dire $2x-y-7=0$.

(1.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$\cos(2x) - 5\cos(x) = -3.$$

Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, 0]$.

Solution. L'équation est définie pour tout réel x. Cela étant, comme $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, on a les équivalences successives suivantes

$$\begin{aligned}\cos(2x) - 5\cos(x) = -3 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos^2(x) - 1 - 5\cos(x) = -3\\ &\Leftrightarrow \quad 2\cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0.\end{aligned}$$

Puisque le discriminant de cette équation du second degré en $\cos(x)$ vaut $\Delta = 25 - 16 = 9$, les solutions de celle-ci sont

$$\cos(x) = 2 \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1}{2}.$$

Cela étant, d'une part l'équation $\cos(x) = 2$ en l'inconnue x n'a pas de solution ; d'autre part, on a

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Dès lors, la solution dans l'intervalle $[-\pi, 0]$ est $-\pi/3$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$(2.1)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{e^{-1/x}} \qquad\qquad (2.2)\ \lim_{x\to -\infty} \arctan\left(\frac{x^3 - x}{\sqrt{x^3+1}}\right)$$

Solution. **(2.1)** La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-1/x^2}}{e^{-1/x}}$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Comme tout intervalle du type $]0, r[$ $(r > 0)$ rencontre ce domaine, le calcul de la limite en 0^+ peut donc être envisagé.

Puisque

$$\frac{e^{-1/x^2}}{e^{-1/x}} = e^{(-1/x^2 + 1/x)} = e^{(x-1)/x^2},$$

transformons la limite demandée en

$$\lim_{x\to 0^+} e^{(x-1)/x^2}.$$

Comme

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \ll \ \frac{-1}{0^+} \ \gg = -\infty$$

et que

$$\lim_{y\to -\infty} e^y = 0^+,$$

le théorème des limites des fonctions de fonction permet de conclure :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{e^{-1/x}} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0^+.$$

(2.2) La fonction $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x^3+1}}\right)$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\} =]-1, +\infty[.$$

Puisque cet ensemble est minoré, le calcul de la limite en $-\infty$ ne peut pas être envisagé.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

$$(3.1)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+1)}\ dx \qquad\qquad (3.2)\ \int_e^{e^2} x\ \ln(x)\ dx$$

Solution. **(3.1)** La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$$

est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur $[1, +\infty[$, ensemble fermé non borné. L'intégrabilité en $+\infty$ s'obtient immédiatement par le critère de comparaison car on a

$$\left|\frac{1}{x(x^2+1)}\right| \leq \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 1$$

avec $x \mapsto 1/x^2$ intégrable en $+\infty$.
Cela étant, le calcul de la valeur de l'intégrale s'effectue en utilisant la décomposition en fractions simples. On a

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}, \quad x \in \mathbb{R}_0.$$

Ces égalités sont équivalentes à

$$1 = (A+B)x^2 + Cx + A, \quad x \in \mathbb{R}$$

ou encore à

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1, \end{cases}$$

ce qui donne $A = 1$, $B = -1$ et $C = 0$.
Cherchons à présent une primitive de la fonction à intégrer sur $]1, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx &= \int \frac{1}{x}\ dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx \\ &\simeq \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(|x^2+1|) \\ &\simeq \ln(x) - \ln(\sqrt{x^2+1}) \\ &\simeq \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+1)}\ dx &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) - \ln\left(2^{-1/2}\right) \\ &= \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

L'application du théorème de la limite d'une fonction de fonction donne

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) = 0$$

car

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

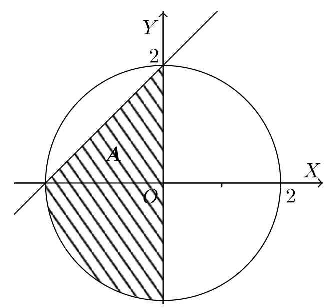
et $\lim_{y\to 1} \ln(y) = 0$.
Remarque : puisque la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, on peut bien sûr directement prouver l'intégrabilité et trouver la valeur de l'intégrale en utilisant la définition.

(3.2) La fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc sur l'intervalle fermé borné $[e, e^2]$; textcolorredelle est donc intégrable sur cet ensemble.
Par une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
\int_e^{e^2} x\ln(x)\ dx &= \frac{1}{2}\Big[x^2\ln(x)\Big]_e^{e^2} - \frac{1}{2}\int_e^{e^2} x\ dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[x^2\ln(x)\Big]_e^{e^2} - \frac{1}{4}\Big[x^2\Big]_e^{e^2} \\
&= \frac{1}{4}\Big[x^2(2\ln(x)-1)\Big]_e^{e^2} \\
&= \frac{1}{4}\Big(e^4(2\ln(e^2)-1) - e^2(2\ln(e)-1)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(e^4(4-1) - e^2(2-1)\Big) \\
&= \frac{3e^4 - e^2}{4} \\
&= \frac{e^2(3e^2-1)}{4}
\end{aligned}$$

puisque $\ln(e) = 1$ et que $\ln(x^r) = r\ln(x)$ ($x > 0$ et r réel).

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est un cercle et l'autre est une droite).**



Solution. Le cercle ayant pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 4$, on a d'une part

$$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = -\sqrt{4-x^2} \text{ ou } y = \sqrt{4-x^2}.$$

D'autre part, la droite a pour équation cartésienne $y = x + 2$. On a donc la description suivante

$$E \ = \ \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0],\ y \in [-\sqrt{4-x^2}, x+2]\Big\}.$$

5. **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2f(x) + 2Df(x) = 1 + e^{-x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x) + 2Df(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 2z = z(z+2)$ et ses zéros sont -2 et 0. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{-2x} + c_2,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto 1 + e^{-x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une somme de deux fonctions, cherchons tout d'abord une solution particulière de $D^2 f(x) + 2Df(x) = 1$ (*) .
On voit immédiatement que $f_1(x) = x/2,\ x \in \mathbb{R}$ est solution de (*).
Cherchons à présent une solution particulière de $D^2 f(x) + 2Df(x) = e^{-x}$ (**).
Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $x \mapsto 1.e^{-x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient -1 de la variable n'est pas zéro du polynôme caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_2(x) = A\, e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.
Comme $Df_2(x) = -Ae^{-x}$ et $D^2 f_2(x) = Ae^{-x}$, en remplaçant dans (**), on a

$$Ae^{-x} - 2Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow A = -1.$$

Ainsi, $f_2(x) = -e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 e^{-2x} + c_2 + \frac{x}{2} - e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Sur une carte à l'échelle $1/5000$***, la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à*** 3 ***cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?***
Solution. Puisque la carte est à l'échelle 1/5000, cela signifie que 1 cm sur la carte représente en réalité 5000 cm. Par conséquent, 3 cm représentent en réalité 15000 cm.
Comme 1 cm vaut 10^{-5} km, la distance réelle (en ligne droite) entre ces deux endroits est de $0,15$ km.

7. (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Questionnaire A

(7.1) Que vaut le sinus de 6 ?
☐ $\sqrt{1-\cos^2(6)}$
♣ $|\cos(6)|\ \tan(6)$
☐ $2\sin(3)$
☐ Il n'existe pas.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.2) Quelle est la partie imaginaire du complexe $\dfrac{i-2}{1+i^3}$?
☐ -1
♣ $-1/2$
☐ $-i$
☐ $-i/2$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.3) Que vaut la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(\cos(x))$?
☐ $x \mapsto \cos(\sin(x))$
☐ $x \mapsto -\cos(\sin(x))$
♣ $x \mapsto -\cos(\cos(x))\ \sin(x)$
☐ $x \mapsto -\cos(\sin(x))\ \sin(x)$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Questionnaire B

(7.1) Quelle est la partie imaginaire du complexe $\dfrac{-i+2}{i-i^3}$?
☐ 1
☐ 1/2
☐ $-i$

☐ $-i/2$
♣ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.2) Que vaut le cosinus de 4 ?
☐ $\sqrt{1-\sin^2(4)}$
☐ $|\sin(4)|\ \mathrm{cotan}(4)$
☐ $2\cos(2)$
☐ Il n'existe pas.
♣ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.3) Que vaut la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(\sin(x))$?
☐ $x \mapsto \sin(\cos(x))$
☐ $x \mapsto -\sin(\cos(x))$
♣ $x \mapsto -\sin(\sin(x))\ \cos(x)$
☐ $x \mapsto \sin(\sin(x))\ \cos(x)$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.