Mathématiques générales I (MATH2007)

Année académique 2023-2024

Examen du 4 janvier 2024
Questionnaire et corrigé

Version 21 décembre 2023

Mathématiques générales I, MATH 2007
Questionnaire de l'examen du 4 janvier 2024

Consignes

— Compléter le tableau ci-dessous avant de ***rendre vos copies accompagnées de cette feuille***.
— Sur ***chaque*** feuille, indiquer vos ***NOM (en capitales, caractères d'imprimerie), votre prénom (en minuscules, sauf première lettre) et votre section***.
— ***Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées***.
— ***Justifier toutes vos réponses, SAUF celles du QCM***.
— Les calculatrices, montres connectées (style iWatch), gsm etc ... sont interdits.
— Le Journal de Bord est permis et sera fourni ***sur demande***.

NOM : ....

Prénom : ....

Matricule : ....

SECTION :.................................

Signature :

Indiquer une CROIX dans la colonne correspondante
pour les QUESTIONS OUVERTES
AUXQUELLES VOUS NE REPONDEZ PAS.

Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Question 7	Question 8

QCM

Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0
Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

Théorie

(1) On donne la droite d'équation cartésienne $-2\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où α, β, γ sont des réels avec α, β non simultanément nuls. Les composantes d'un vecteur directeur de cette droite sont

(a) ☐ $(-2\alpha, \beta)$.
(b) ☐ $(2\alpha, \beta)$.
(c) ☐ $(\beta, -2\alpha)$.
(d) ☐ $(\beta, 2\alpha)$.
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

(a) ☐ Pour qu'une fonction soit continue, il est nécessaire qu'elle soit dérivable.
(b) ☐ Si une fonction est strictement décroissante, alors elle est injective.
(c) ☐ Pour qu'une fonction soit intégrable sur l'intervalle borné $[0, 1[$, il suffit qu'elle y soit continue.
(d) ☐ Si une fonction dérivable possède une dérivée nulle en un point, alors elle y possède un extremum.
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Soit f une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ qui admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$. Que vaut sa limite en $-\infty$?

(a) ☐ Elle est égale à $-\infty$.

(b) ☐ Elle est égale à $+\infty$.

(c) ☐ Elle n'existe pas nécessairement.

(d) ☐ Il n'y a pas assez de données pour répondre.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(4) Si une fonction continue sur un intervalle ouvert I est à valeurs négatives, alors

(a) ☐ la fonction est décroissante sur l'intervalle.

(b) ☐ toute primitive de f est décroissante sur l'intervalle.

(c) ☐ la fonction est intégrable sur l'intervalle.

(d) ☐ la dérivée de la fonction est décroissante sur l'intervalle.

(e) ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(5) Le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer comme suit :
« On considère une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, à valeurs réelles. Si les limites de f aux bords de l'intervalle existent et sont différentes (on les note A et B par exemple), alors *quel que soit le réel strictement compris entre ces limites, il existe toujours un réel de l'intervalle en lequel f prend la valeur du réel qu'on a fixé au départ.* ».
Si A est réel et B est $+\infty$, alors la partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit

(a) ☐ $\exists r \in]a, b[$ tel que $f(r) = R \quad \forall R \in]A, +\infty[$.

(b) ☐ $\forall r \in]a, b[, \ \exists R \in]A, +\infty[$ tel que $f(r) = R$.

(c) ☐ $\forall R \in]A, +\infty[, \ \exists r \in]a, b[$ tel que $f(r) = R$.

(d) ☐ $\exists R \in]A, +\infty[$ tel que $f(r) = R \quad \forall r \in]a, b[$.

(e) ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

$\boxed{\textit{Exercices}}$

(6) Que vaut $\cos(19\pi/6)$?

(a) ☐ $-\sqrt{3}/2$

(b) ☐ $-1/2$

(c) ☐ $1/2$

(d) ☐ $\sqrt{3}/2$

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Soit l'équation cartésienne $(x + r)^2 + y^2 = (x - r)^2$ où r est un réel strictement positif fixé. Il s'agit de l'équation

(a) ☐ d'un cercle.

(b) ☐ d'une ellipse.

(c) ☐ d'une parabole.

(d) ☐ d'une hyperbole.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $\cos(x)\ \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est une primitive de

(a) ☐ $-2\sin(x), \ x \in \mathbb{R}$.

(b) ☐ $2\cos(x), \ x \in \mathbb{R}$.

(c) ☐ $-\cos(2x), \ x \in \mathbb{R}$.

(d) ☐ $\cos(2x), \ x \in \mathbb{R}$.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1
Soit le polynôme $P: \ z \mapsto z^2 + bz + c$ où b, c sont réels et vérifient $b^2 - 4c < 0$. Démontrer que ce polynôme P possède exactement deux zéros et que ces zéros sont des complexes conjugués.

Question 2
(2.1) Enoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.2) Enoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.3) En vous servant de la propriété que vous avez énoncée au point (2.1), démontrer la propriété que vous avez énoncée au point (2.2).
(2.4) Que signifie la notation $C_1(]0, +\infty[)$?
(2.5) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_1(]0, +\infty[)$.

Exercices

Question 3 *En revendant ensemble deux objets pour 210 euros, on réalise un bénéfice de 5 %. Trouver le prix d'achat de chaque objet sachant que l'on a gagné 10 % sur l'un et perdu 10 % sur l'autre.*

Question 4 (4.1) Déterminer le module et la partie imaginaire des complexes solutions de l'équation $x^2 + x + 2 = 0$.
(4.2) Résoudre l'inéquation $|x| \leq 1/x$ en l'inconnue réelle x.
(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$2\sin^2(x) = \cos(2x).$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x)}{\ln(x^3 + 1)} \qquad\qquad (5.2) \quad \lim_{x \to 2^+} \exp\left(-\frac{1}{|2 - x|}\right)$$

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1) \quad \int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx \qquad\qquad (6.2) \quad \int_0^{\pi/3} \sin(x)\, \cos(x)\, dx$$

Question 7 (7.1) L'expression suivante est-elle définie ? Justifier.

$$\ln\left(e^2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) + \arctan\left(-\sqrt{3}\right) + \ln\left(\sqrt{(-2)^2}\right)$$

(7.2) Si elle est définie, en vous servant des propriétés des fonctions élémentaires, simplifier cette expression au maximum.

Question 8 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$4D^2 f(x) - Df(x) = e^x + 1.$$

Mathématiques générales I, MATH 2007
Corrigé de l'examen du jeudi 4 janvier 2024

QCM

Théorie

(1) On donne la droite d'équation cartésienne $-2\alpha x+\beta y+\gamma=0$ où α,β,γ sont des réels avec α,β non simultanément nuls. Les composantes d'un vecteur directeur de cette droite sont

(a) ☐ $(-2\alpha,\beta)$.
(b) ☐ $(2\alpha,\beta)$.
(c) ☐ $(\beta,-2\alpha)$.
(d) ♣ $(\beta,2\alpha)$.
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

(a) ☐ Pour qu'une fonction soit continue, il est nécessaire qu'elle soit dérivable.
(b) ♣ Si une fonction est strictement décroissante, alors elle est injective.
(c) ☐ Pour qu'une fonction soit intégrable sur l'intervalle borné $[0,1[$, il suffit qu'elle y soit continue.
(d) ☐ Si une fonction dérivable possède une dérivée nulle en un point, alors elle y possède un extremum.
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Soit f une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ qui admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$. Que vaut sa limite en $-\infty$?

(a) ☐ Elle est égale à $-\infty$.
(b) ♣ Elle est égale à $+\infty$.
(c) ☐ Elle n'existe pas nécessairement.
(d) ☐ Il n'y a pas assez de données pour répondre.
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(4) Si une fonction continue sur un intervalle ouvert I est à valeurs négatives, alors

(a) ☐ la fonction est décroissante sur l'intervalle.
(b) ♣ toute primitive de f est décroissante sur l'intervalle.
(c) ☐ la fonction est intégrable sur l'intervalle.
(d) ☐ la dérivée de la fonction est décroissante sur l'intervalle.
(e) ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(5) Le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer comme suit :
≪ On considère une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, à valeurs réelles. Si les limites de f aux bords de l'intervalle existent et sont différentes (on les note A et B par exemple), alors *quel que soit le réel strictement compris entre ces limites, il existe toujours un réel de l'intervalle en lequel f prend la valeur du réel qu'on a fixé au départ.* ≫.
Si A est réel et B est $+\infty$, alors la partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit

(a) ☐ $\exists r\in]a,b[$ tel que $f(r)=R \quad \forall R\in]A,+\infty[$.
(b) ☐ $\forall r\in]a,b[,\ \exists R\in]A,+\infty[$ tel que $f(r)=R$.
(c) ♣ $\forall R\in]A,+\infty[,\ \exists r\in]a,b[$ tel que $f(r)=R$.
(d) ☐ $\exists R\in]A,+\infty[$ tel que $f(r)=R \quad \forall r\in]a,b[$.
(e) ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Exercices

(6) Que vaut $\cos(19\pi/6)$?

(a) ♣ $-\sqrt{3}/2$

(b) □ $-1/2$

(c) □ $1/2$

(d) □ $\sqrt{3}/2$

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Soit l'équation cartésienne $(x+r)^2+y^2=(x-r)^2$ où r est un réel strictement positif fixé. Il s'agit de l'équation

(a) □ d'un cercle.

(b) □ d'une ellipse.

(c) ♣ d'une parabole.

(d) □ d'une hyperbole.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $\cos(x)\sin(x)$, $x\in\mathbb{R}$ est une primitive de

(a) □ $-2\sin(x),\ x\in\mathbb{R}$.

(b) □ $2\cos(x),\ x\in\mathbb{R}$.

(c) □ $-\cos(2x),\ x\in\mathbb{R}$.

(d) ♣ $\cos(2x),\ x\in\mathbb{R}$.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1

Soit le polynôme $P:\ z\mapsto z^2+bz+c$ où b,c sont réels et vérifient $b^2-4c<0$. Démontrer que ce polynôme P possède exactement deux zéros et que ces zéros sont des complexes conjugués.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours.*

Question 2

(2.1) Enoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.2) Enoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.3) En vous servant de la propriété que vous avez énoncée au point (2.1), démontrer la propriété que vous avez énoncée au point (2.2).
(2.4) Que signifie la notation $C_1(]0,+\infty[)$?
(2.5) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_1(]0,+\infty[)$.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours.*

Exercices

Question 3 ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***

En revendant ensemble deux objets pour 210 euros, on réalise un bénéfice de 5 %. Trouver le prix d'achat de chaque objet sachant que l'on a gagné 10 % sur l'un et perdu 10 % sur l'autre.

Exemple de résolution. Soit x le prix d'achat en euros de l'objet sur lequel on fait un bénéfice de 10 % et y celui de l'autre objet. Le problème se traduit donc par le système suivant qu'il faut résoudre. On a successivement

$$\begin{cases} 1,05\,(x+y)=210 \\ 1,1\,x+0,9\,y=210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 105\,(x+y)=210\times 100 \\ 11\,x+9\,y=2100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=200 \\ 11\,x+9\,y=2100 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=200-y \\ 2200-11\,y+9\,y=2100 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=150 \\ y=50. \end{cases}$$

Ainsi le prix d'achat de l'objet sur lequel on fait un bénéfice est de 150 euros et le prix d'achat de l'autre objet est de 50 euros.

Question 4

(4.1) Déterminer le module et la partie imaginaire des complexes solutions de l'équation $x^2+x+2=0$.

Solution. Comme l'équation a un discriminant égal à $1-8=-7=7i^2$, ses solutions sont les complexes

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{7}\,i}{2} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-1-\sqrt{7}\,i}{2}.$$

On a donc

$$|z_1|=|z_2|=\frac{\sqrt{1+7}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}$$

et

$$\Im\,(z_1)=\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad \Im\,(z_2)=\frac{-\sqrt{7}}{2}.$$

(4.2) Résoudre l'inéquation $|x|\leq 1/x$ en l'inconnue réelle x.

Solution. Comme x est au dénominateur, on ne doit pas considérer le cas $x=0$.

De plus, comme la valeur absolue d'un réel est un réel positif, le premier membre est positif. Le second doit donc l'être aussi et, dès lors, les solutions doivent être cherchées parmi les réels strictement positifs.

Cela étant, pour $x>0$ alors on a les équivalences suivantes

$$|x|\leq\frac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; x\leq\frac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; x^2\leq 1 \;\Leftrightarrow\; 0<x\leq 1.$$

Les solutions de l'inéquation donnée sont donc les réels de l'ensemble

$$]0,1].$$

(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$2\sin^2(x)=\cos(2x).$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

Solution. Quel que soit le réel x, on a $\cos(2x)=1-2\sin^2(x) \;\Leftrightarrow\; 2\sin^2(x)=1-\cos(2x)$ et dès lors

$$\begin{aligned} 2\sin^2(x)=\cos(2x) &\Leftrightarrow 1-\cos(2x)=\cos(2x) \\ &\Leftrightarrow \cos(2x)=\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}: 2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z}: 2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}: x=\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z}: x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\ . \end{aligned}$$

Cela étant, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi,\pi]$ sont les réels $-5\pi/6$, $-\pi/6$, $\pi/6$ et $5\pi/6$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x)}{\ln(x^3+1)} \qquad\qquad (5.2)\ \lim_{x\to 2^+}\exp\left(-\frac{1}{|2-x|}\right)$$

Solution. **(5.1)** La fonction $x \mapsto \ln(2x)/\ln(x^3+1)$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : 2x > 0\ ,\ \ln(x^3+1) \neq 0 \text{ et } x^3+1>0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\ ,\ x^3+1 \neq 1 \text{ et } x > -1\} =]0,+\infty[.$$

Puisque cet ensemble n'est pas majoré, le calcul de la limite en $+\infty$ peut être envisagé.

D'une part, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(2x) = +\infty.$$

D'autre part, comme

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3+1) = +\infty$$

et que

$$\lim_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty,$$

le théorème des limites des fonctions de fonction permet d'obtenir

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x^3+1) = +\infty.$$

Pour lever l'indétermination $\ll +\infty/+\infty \gg$, appliquons le théorème de l'Hospital à la fonction donnée.

Vérifions les autres hypothèses de ce théorème.

Dans $V =]0,+\infty[$, considérons $f : x \mapsto \ln(2x)$ et $g : x \mapsto \ln(x^3+1)$.

1) Ces deux fonctions sont dérivables sur V.

2) L'expression explicite de la dérivée de g est $3x^2/(x^3+1)$ donc est non nulle sur V.

3) De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{3x^2}{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{3x^3} = \frac{1}{3}.$$

Les hypothèses sont donc vérifiées. Il s'ensuit que la limite vaut

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{\ln(x^3+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \frac{1}{3}.$$

(5.2) La fonction $x \mapsto \exp(-1/|2-x|)$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : |2-x| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Comme tout intervalle du type $]2,r[$ $(r>2)$ rencontre ce domaine, le calcul de la limite en 2^+ peut donc être envisagé.

Comme on a

$$\lim_{x\to 2^+} (|2-x|) = 0^+,$$

$$\lim_{y\to 0^+} \left(-\frac{1}{y}\right) = -\infty$$

et

$$\lim_{z\to-\infty} \exp(z) = 0^+,$$

le théorème des limites des fonctions de fonction permet d'obtenir

$$\lim_{x\to 2^+} \exp\left(-\frac{1}{|2-x|}\right) = 0^+.$$

<u>Question 6</u> Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1)\quad \int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx \qquad\qquad (6.2)\quad \int_0^{\pi/3} \sin(x)\,\cos(x)\,dx$$

Solution. **(6.1)** La fonction $f : x \mapsto x\,e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$, ensemble fermé non borné. On peut examiner l'intégrabilité en $+\infty$ de f en utilisant la définition ; comme la fonction est à valeurs positives sur l'intervalle donné, on obtiendra tout de suite la valeur de l'intégrale.

Cette fonction est continue sur $[0;+\infty[$ donc sur les intervalles fermés bornés de la forme $[0,t]$ avec $t>0$; elle y est donc intégrable.

Sur $\mathbb{R}$, une primitivation par parties donne

$$\begin{aligned}\int x\ e^{-x}\ dx &= -\int x\ D(e^{-x})\ dx\\ &= -xe^{-x}\ -\ \int -e^{-x}\ dx\\ &= -xe^{-x}\ -\ \int D(e^{-x})\ dx\\ &\simeq -xe^{-x}\ -\ e^{-x}\\ &\simeq -(x+1)\ e^{-x}.\end{aligned}$$

Dès lors, pour tout $t>0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t x\ e^{-x}\ dx &= \left[-(x+1)\ e^{-x}\right]_0^t\\ &= -(t+1)\ e^{-t}+\ e^0\\ &= -(t+1)\ e^{-t}+1.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t x\ e^{-x}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\left(-(t+1)\ e^{-t}\right)+1=1,$$

puisque $\lim_{t\to+\infty} e^{-t}=0$ et $\lim_{t\to+\infty} te^{-t}=0$.

Ainsi, comme la limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)\ dx$$

existe et est finie et que la fonction f est positive sur $[0,+\infty[$, on conclut que la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que l'intégrale demandée vaut 1.

Remarque. La fonction à intégrer est continue sur $[0,+\infty[$ donc on doit uniquement regarder si elle est intégrable en $+\infty$. Puisqu'on a une exponentielle-polynôme, le critère en θ est aisé à utiliser. De fait, pour $\theta=2>1$ on a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2|xe^{-x}|\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3e^{-x}\right)=0,$$

vu les propriétés de l'exponentielle (comme ci-dessus). Comme cette limite existe et est finie, la fonction est intégrable en $+\infty$.

Cela étant, comme l'exponentielle est sa propre dérivée, la fonction f s'écrit $f(x)=-x\,De^{-x}$ et dès lors on peut essayer de calculer l'intégrale par parties. La fonction $x\mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $e^{-x}\,Dx=e^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (emploi de la même justification que ci-dessus). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\ dx &= \lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)-0+\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx\\ &= -\int_0^{+\infty} De^{-x}\ dx\\ &= -\lim_{x\to+\infty} e^{-x}+1\\ &= 1.\end{aligned}$$

(6.2) La fonction $f:x\mapsto\sin(x)\ \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle fermé borné $[0,\pi/3]$; elle est donc intégrable sur cet ensemble.

Par une intégration par substitution, on a successivement

$$\int_0^{\pi/3}\sin(x)\ \cos(x)\ dx = \int_0^{\pi/3}\sin(x)\,D(\sin(x))\ dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\sin^2(x)}{2}\right]_0^{\pi/3}\\
&= \frac{\sin^2(\pi/3)-\sin^2(0)}{2}\\
&= \frac{(\sqrt{3}/2)^2-0}{2}\\
&= \frac{3/4}{2}\\
&= \frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$

Question 7 (7.1) L'expression suivante est-elle définie ? Justifier.

$$\ln\left(e^2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)+\arctan\left(-\sqrt{3}\right)+\ln\left(\sqrt{(-2)^2}\right)$$

Solution. Les fonctions sinus et arctangente sont définies sur $\mathbb{R}$; les fonctions logarithme et racine carrée le sont respectivement sur $]0,+\infty[$ et $[0,+\infty[$.

Comme $5\pi/6$ est du deuxième quadrant, son sinus est strictement positif ; de plus, le carré d'un réel non nul est strictement positif. Les arguments des deux logarithmes sont donc strictement positifs et l'expression est bien définie.

(7.2) Si elle est définie, en vous servant des propriétés des fonctions élémentaires, simplifier cette expression au maximum.

Solution. Comme $\sin(5\pi/6)=\sin(\pi-\pi/6)=\sin(\pi/6)=1/2$ et $\sqrt{(-2)^2}=2$, en appliquant la propriété relative à la somme de logarithmes de réels positifs et en utilisant $\ln(e)=1$ ainsi que $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=-\pi/3$, on a

$$\ln\left(e^2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)+\arctan\left(-\sqrt{3}\right)+\ln\left(\sqrt{(-2)^2}\right)=\ln\left(e^2\times\frac{1}{2}\times 2\right)-\frac{\pi}{3}=2\ln(e)-\frac{\pi}{3}=2-\frac{\pi}{3}.$$

Question 8 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$4D^2f(x)-Df(x)=e^x+1.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

L'équation homogène associée est $4D^2f(x)-Df(x)=0$; le polynôme caractéristique est $z\mapsto 4z^2-z=z(4z-1)$ et ses zéros sont 0 et $1/4$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x)=c_1+c_2e^{x/4},\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g:x\mapsto 1+e^x$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une somme de deux fonctions, cherchons tout d'abord une solution particulière de $4D^2f(x)-Df(x)=1$ (*) .

On voit immédiatement que $f_1(x)=-x,\ x\in\mathbb{R}$ est solution de (*).

Cherchons à présent une solution particulière de $4D^2f(x)-Df(x)=e^x$ (**).
Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $x\mapsto 1\times e^x$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient 1 de la variable n'est pas zéro du polynôme caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_2(x)=A\,e^x,\ x\in\mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.

Comme $Df_2(x)=Ae^x$ et $D^2f_2(x)=Ae^x$, en remplaçant dans (**), on a

$$4Ae^x-Ae^x=e^x\Leftrightarrow A=1/3.$$

Ainsi, $f_2(x)=e^x/3,\ x\in\mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1+c_2e^{x/4}-x+e^x/3,\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1,c_2 sont des constantes complexes arbitraires.