Année académique 2022-2023

Corrigé de l'examen de Mathématiques générales I
MATH2007 du 05 janvier 2023

Version 10 janvier 2023

QUESTIONNAIRE

Théorie

Théorie 1.

(1.1) Quel est le domaine de définition de la fonction sinus ?

(1.2) Comment définit-on géométriquement le sinus de -3 ? Expliquer clairement votre réponse et l'illustrer par une représentation géométrique.

Théorie 2.

(2.1) Enoncer le théorème des accroissements finis dans un intervalle ouvert.

(2.2) Démontrer que si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, alors quels que soient les réels t_0, t de l'intervalle $]a,b[$ tels que $t_0 < t$, on a

$$\int_{t_0}^{t} f(x)\,dx \;=\; F(t) - F(t_0)$$

où F est une primitive de f sur $]a,b[$.

Théorie 3. QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et colorier complètement la case qui la précède sur cette feuille.

(3.1) Si α désigne un nombre réel négatif, alors la racine carrée du réel $(3\alpha-2)^2$ est égale à

☐ $3\alpha - 2$.
☐ $-3\alpha - 2$.
☐ $2 - 3\alpha$.
☐ $2 + 3\alpha$.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.2) On donne la fonction $f : x \mapsto x^{\theta-2}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours correcte ?

☐ Si $\theta > 0$ alors f est intégrable en $+\infty$.
☐ Si f est intégrable en $+\infty$, alors $\theta > 1$.
☐ Si f est intégrable en 0^+, alors $\theta < -1$.
☐ Si f est intégrable en $+\infty$, alors $\theta < 1$.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3.3) Que vaut la limite $\lim_{t\to+\infty} \sin(t)/t$?

☐ 0
☐ 1
☐ $+\infty$
☐ La limite n'existe pas.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.4) Si une primitive d'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I à valeurs réelles a une dérivée seconde positive, alors

☐ la fonction est convexe sur l'intervalle.
☐ la dérivée de la fonction est convexe sur l'intervalle.
☐ la fonction est croissante sur l'intervalle.
☐ la dérivée de la fonction est croissante sur l'intervalle.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.5) Si f est une fonction continue à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(e^x)^2 \leq f(x)$ quel que soit x, alors
☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
☐ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.
☐ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.
☐ f est intégrable en $-\infty$.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

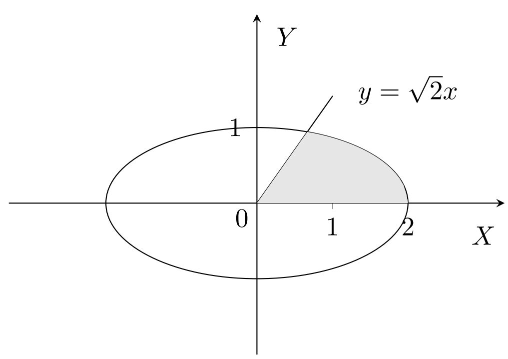
Exercices

1. (1.1) Si $a \in]-1, 0[$, que vaut $\sin\big(\arctan(a)\big)$?
   (1.2) Dans un repère orthonormé, on donne la droite d d'équation cartésienne $3x - 2y - 1 = 0$ et le point A de coordonnées $(1, -1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' parallèle à la droite d et passant par le point A.
   (1.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x
   $$\cos(2x) - 3\sin(x) = 2.$$
   Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$.

2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.
   $$\text{(2.1)} \quad \lim_{x\to +\infty} x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad\qquad \text{(2.2)} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{|1-x^2|}{1-x}$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.
   $$\text{(3.1)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^2-1}\, dx \qquad\qquad \text{(3.2)} \quad \int_0^{\pi/3} x\, \cos(x)\, dx$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé grisé suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une partie d'ellipse et les autres sont des parties de droites).



5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
   $$D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = e^{2x}.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
   Pour un test médical mesurant la tolérance aux hydrates de carbone, un adulte boit 7 cl d'une solution à 30 % de glucose. Si le test est administré à un enfant, la concentration de glucose doit être de 20%. Combien de solution à 30 % et combien d'eau devra-t-on utiliser pour préparer 7 cl de solution à 20 % ?

7. $\boxed{\text{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

(7.1) Que vaut l'excentricité de la conique d'équation $y^2 - 2x^2 = 1$?
☐ $\sqrt{6}$
☐ $\sqrt{6}/2$
☐ $\sqrt{3}/2$
☐ $\sqrt{3}$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.2) Quelle est la partie imaginaire du complexe $\dfrac{(i+1)^2}{1+i^5}$?
☐ -1
☐ $-i$
☐ 1
☐ 2
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.3) Que vaut la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(\cos(2x))$?
☐ $x \mapsto 2\sin(\sin(2x))$
☐ $x \mapsto -2\sin(\sin(2x))$
☐ $x \mapsto -\sin(\cos(2x))\,\sin(2x)$
☐ $x \mapsto 2\sin(\cos(2x))\,\sin(2x)$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.
(1.1) Quel est le domaine de définition de la fonction sinus ?
(1.2) Comment définit-on géométriquement le sinus de -3 ? Expliquer clairement votre réponse et l'illustrer par une représentation géométrique.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 2.
(2.1) Enoncer le théorème des accroissements finis dans un intervalle ouvert.
(2.2) Démontrer que si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, alors quels que soient les réels t_0, t de l'intervalle $]a, b[$ tels que $t_0 < t$, on a

$$\int_{t_0}^{t} f(x)\, dx \;=\; F(t) - F(t_0)$$

où F est une primitive de f sur $]a, b[$.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 3. QCM

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et colorier complètement la case qui la précède sur cette feuille.

(3.1) Si α désigne un nombre réel négatif, alors la racine carrée du réel $(3\alpha - 2)^2$ est égale à
☐ $3\alpha - 2$.
☐ $-3\alpha - 2$.
♣ $2 - 3\alpha$.
☐ $2 + 3\alpha$.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.2) On donne la fonction $f : x \mapsto x^{\theta-2},\ \theta \in \mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours correcte ?
☐ Si $\theta > 0$ alors f est intégrable en $+\infty$.
☐ Si f est intégrable en $+\infty$, alors $\theta > 1$.
☐ Si f est intégrable en 0^+, alors $\theta < -1$.
♣ Si f est intégrable en $+\infty$, alors $\theta < 1$.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3.3) Que vaut la limite $\lim_{t\to+\infty} \sin(t)/t$?
♣ 0
☐ 1
☐ $+\infty$
☐ La limite n'existe pas.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.4) Si une primitive d'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I à valeurs réelles a une dérivée seconde positive, alors
☐ la fonction est convexe sur l'intervalle.
☐ la dérivée de la fonction est convexe sur l'intervalle.
♣ la fonction est croissante sur l'intervalle.
☐ la dérivée de la fonction est croissante sur l'intervalle.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.5) Si f est une fonction continue à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(e^x)^2 \leq f(x)$ quel que soit x, alors
□ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
□ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.
□ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.
□ f est intégrable en $-\infty$.
♣ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Exercices

1. **(1.1) Si $a \in]-1, 0[$, que vaut $\sin\big(\arctan(a)\big)$?**
Remarque : cette question a été posée telle quelle lors d'une des séances « récréations constructives » des fins de cours (question numéro 30).
Solution. Les fonctions arctan et sin sont définies sur $\mathbb{R}$ donc l'expression est bien définie.
Cela étant, vu la forme de l'expression, exprimons le sinus en fonction de la fonction tangente. Pour tout réel α différent d'un multiple entier de π, on a
$$1 + \mathrm{cotan}^2(\alpha) = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$$
donc
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{1 + \mathrm{cotan}^2(\alpha)} = \frac{\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\alpha) + 1}.$$
En prenant $\alpha = \arctan(a)$ on obtient ainsi
$$\sin^2\big(\arctan(a)\big) = \frac{a^2}{a^2+1}$$
donc
$$\sin\big(\arctan(a)\big) = -\sqrt{\frac{a^2}{a^2+1}} = -\frac{|a|}{\sqrt{a^2+1}}$$
ou
$$\sin\big(\arctan(a)\big) = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+1}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+1}}.$$
Cela étant, comme $a \in]-1, 0[$, on a $\arctan(a) \in]-\pi/4, 0[$ donc $\sin\big(\arctan(a)\big)$ est négatif et par conséquent
$$\sin\big(\arctan(a)\big) = -\frac{|a|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

(1.2) Dans un repère orthonormé, on donne la droite d d'équation cartésienne $3x - 2y - 1 = 0$ et le point A de coordonnées $(1, -1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' parallèle à la droite d et passant par le point A.
Solution. Toutes les droites parallèles à la droite d ont une équation du type $3x - 2y + c = 0$, donc d' également.
Cela étant, puisque d' passe par le point de coordonnées $(1, -1)$, on a $3 \times 1 - 2 \times (-1) + c = 0$, ce qui donne $c = -5$ et finalement d' a pour équation cartésienne $3x - 2y - 5 = 0$.
Remarquons que l'on peut également procéder comme suit. L'équation cartésienne $3x - 2y - 1 = 0$ s'écrit aussi $y = (3/2)x - 1/2$. Le coefficient angulaire de d est donc égal à $3/2$; comme d' est parallèle à d, son coefficient angulaire vaut $3/2$ aussi et d' a ainsi pour équation $y+1 = (3/2)(x-1)$ c'est-à-dire $3x - 2y - 5 = 0$.

(1.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x
$$\cos(2x) - 3\sin(x) = 2.$$
Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$.

Solution. L'équation est définie pour tout réel x. Cela étant, comme $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, on a les équivalences successives

$$\begin{aligned}\cos(2x) - 3\sin(x) = 2 &\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2(x) - 3\sin(x) = 2\\ &\Leftrightarrow 2\sin^2(x) + 3\sin(x) + 1 = 0.\end{aligned}$$

Puisque le discriminant de cette équation du second degré en $\sin(x)$ vaut $\Delta = 9 - 8 = 1$, les solutions de celle-ci sont

$$\sin(x) = -1 \quad \text{et} \quad \sin(x) = -\frac{1}{2}.$$

L'équation donnée est équivalente à

$$\begin{aligned}&\sin(x) = -1 \text{ OU } \sin(x) = -\frac{1}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\exists\, k \in \mathbb{Z} : \left((x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \text{ OU } (x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi)\right).\end{aligned}$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$(2.1)\ \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad\qquad (2.2)\ \lim_{x\to1^+} \frac{|1-x^2|}{1-x}$$

Solution. **(2.1)** La fonction $x \mapsto x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ est définie sur

$$\left\{\quad x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0 \ \text{ et } \ \frac{x}{x+1} > 0\right\} =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[.$$

Puisque cet ensemble n'est pas majoré, le calcul de la limite en $+\infty$ peut être envisagé.
D'une part, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

D'autre part, comme

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right) = 1^-$$

et que

$$\lim_{y\to1^-} \ln(y) = 0^-,$$

le théorème des limites des fonctions de fonction permet d'obtenir

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0^-.$$

Pour lever l'indétermination $\ll\ +\infty \cdot 0^-\ \gg$, appliquons le théorème de l'Hospital à la fonction écrite sous la forme

$$x \mapsto \frac{\ln(x/(x+1))}{1/x}.$$

Vérifions les hypothèses de ce théorème.
Dans $V =]0, +\infty[$, considérons $f_1 : x \mapsto \ln(x/(x+1))$ et $g_1 : x \mapsto 1/x$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables sur V.
2) L'expression explicite de la dérivée de g_1 est $-1/x^2$ donc est non nulle sur V.
3) On a $\lim_{x\to+\infty} \ln\big(x/(x+1)\big) = 0^-$ et $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0^+$.
4) De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Df_1(x)}{Dg_1(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} = -1.$$

Les hypothèses sont donc vérifiées. Il s'ensuit que la limite vaut

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{Df_1(x)}{Dg_1(x)} = -1.$$

(2.2) La fonction $x \mapsto |1-x^2|/(1-x)$ est définie sur

$$A = \{x\in\mathbb{R} : 1-x \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Comme tout intervalle du type $]1,r[$ $(r>1)$ rencontre ce domaine, le calcul de la limite en 1^+ peut donc être envisagé.
Comme $x>1$, on a successivement

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+}\frac{|1-x^2|}{1-x} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{1-x}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{1-x}\\
&= \lim_{x\to 1^+} -(x+1)\\
&= -2.
\end{aligned}$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

$$(3.1)\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{4x^2-1}\,dx \qquad\qquad (3.2)\ \int_0^{\pi/3} x\,\cos(x)\,dx$$

Solution. **(3.1)** La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{4x^2-1}$$

est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1/2, 1/2\}$ donc sur $[1,+\infty[$, ensemble fermé non borné. Examinons l'intégrabilité en $+\infty$ de f en utilisant la définition ; comme la fonction est à valeurs positives sur l'intervalle donné, on obtiendra aussi tout de suite la valeur de l'intégrale.
Comme f est une fraction rationnelle propre mais pas simple, effectuons la décomposition en fractions simples. On a $4x^2-1 = (2x+1)\,(2x-1)$ donc

$$\frac{1}{4x^2-1} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{2x-1}$$

où A, B sont des constantes réelles à déterminer. Pour $x\neq -1/2$ et $x\neq 1/2$, on a

$$\frac{1}{4x^2-1} = \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{2x-1} = \frac{A\,(2x-1)+B\,(2x+1)}{(2x+1)\,(2x-1)} = \frac{(2A+2B)\,x+(B-A)}{(2x+1)\,(2x-1)},$$

ce qui est équivalent à

$$1 = (2A+2B)\,x + (B-A), \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1/2,1/2\}.$$

Le polynôme $x\mapsto (2A+2B)\,x+(B-A)-1$ étant nul en plus d'un point et étant de degré 0 ou 1, il est nul partout. Il s'ensuit que les coefficients des puissances de la variable sont nuls, donc on obtient le système

$$\begin{cases} 2A+2B = 0\\ B-A = 1,\end{cases}$$

lequel est équivalent à

$$\begin{cases} B = -A\\ -A-A = 1.\end{cases}$$

On obtient finalement

$$A = -1/2,\ B = 1/2$$

donc

$$\frac{1}{4x^2-1} \;=\; \frac{1}{2\,(2x-1)} \;-\; \frac{1}{2\,(2x+1)}.$$

Ainsi, quel que soit $t>1$ on a

$$\begin{aligned}
\int_1^t \frac{1}{4x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^t \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int_1^t \Big(D\ln(2x-1) - D\ln(2x+1)\Big)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int_1^t D\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2t-1}{2t+1}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2t-1}{2t+1}\right) + \frac{1}{4}\ln(3).
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{4x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{2t-1}{2t+1}\right) + \frac{1}{4}\ln(3).$$

Cela étant, on a

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{2t-1}{2t+1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 1}\ln(y) = 0$$

donc, par le théorème des limites de fonctions de fonction, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{2t-1}{2t+1}\right) \;=\; \lim_{y\to 1}\ln(y) \;=\; 0.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{4x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln(3).$$

Ainsi, comme la limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{4x^2-1}\,dx$$

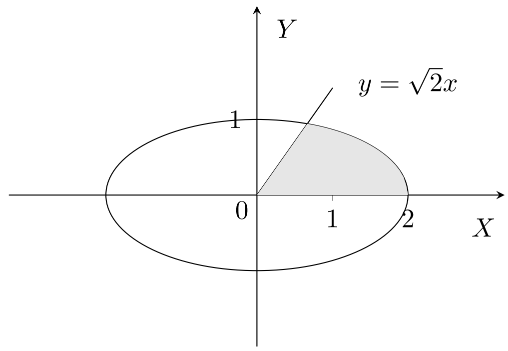
est finie, la fonction donnée est donc intégrable sur $[1,+\infty[$ et puisqu'elle y est à valeurs positives, cette limite est aussi la valeur de l'intégrale. On a

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{4x^2-1}\,dx \;=\; \frac{1}{4}\ln(3).$$

(3.2) La fonction $f: x\mapsto x\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle fermé borné $[0,\pi/3]$; elle est donc intégrable sur cet ensemble.
Par une intégration par parties, on a successivement

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} x\,\cos(x)\,dx &= \Big[x\sin(x)\Big]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3}\sin(x)\,dx\\
&= \Big[x\sin(x)\Big]_0^{\pi/3} + \Big[\cos(x)\Big]_0^{\pi/3}\\
&= \Big[x\sin(x)+\cos(x)\Big]_0^{\pi/3}\\
&= \frac{\pi}{3}\sin(\pi/3)+\cos(\pi/3)-\cos(0)\\
&= \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-1\\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé grisé suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une partie d'ellipse et les autres sont des parties de droites).**



Solution. L'ellipse et la droite ont respectivement pour équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 4$ et $y = \sqrt{2}x$. Les abscisses des points d'intersection vérifient donc $x^2 + 8x^2 = 4$ c'est-à-dire $x^2 = 4/9$. L'abscisse du point d'intersection qui est positive est donc égale à $2/3$. Tous les points de l'ensemble grisé ont leurs coordonnées positives. Il s'ensuit que l'on a

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \frac{2}{3}\right],\ y \in \left[0, \sqrt{2}x\right]\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{2}{3}, 2\right],\ y \in \left[0, \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right]\right\}.$$

5. **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = e^{2x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f + 2Df + f = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$ et son zéro (double) est -1. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = (c_1 x + c_2)e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto e^{2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Ce second membre est l'exponentielle polynôme $x \mapsto 1.e^{2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient 2 de la variable n'est pas zéro du polynôme caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_p(x) = A\,e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.
Comme $Df_p(x) = 2Ae^{2x}$ et $D^2 f_p(x) = 4Ae^{2x}$, en remplaçant dans l'équation donnée, on a

$$4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow A = \frac{1}{9}.$$

Ainsi, $f_p(x) = (1/9)\,e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$(c_1 x + c_2)e^{-x} + \frac{1}{9}\,e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**

   Pour un test médical mesurant la tolérance aux hydrates de carbone, un adulte boit* 7 *cl d'une solution à* 30 *% de glucose. Si le test est administré à un enfant, la concentration de glucose doit être de* 20*%. Combien de solution à* 30 *% et combien d'eau devra-t-on utiliser pour préparer* 7 *cl de solution à* 20 *% ?

   Solution. Soit x la quantité de solution à 30% utiliser (en *cl*) et soit y celle d'eau à utiliser. On a donc $x + y = 7$.

   Cela étant, la solution de 7 *cl* à préparer doit contenir 20% de glucose, c'est-à-dire $7 \times 20/100 = 1,4$ *cl*. La solution de départ ayant une concentration de 30%, un *cl* de celle-ci contient $30/100 = 0,3$ *cl* de glucose. On doit donc avoir $x \times 0,3 = 1,4$ ce qui donne $x = 1,4/0,3 = 14/3$ *cl*. Et comme $y = 7 - x$, on obtient $y = 7 - 14/3 = 7/3$ *cl*.

   En conclusion, pour préparer la solution demandée, il faut prendre 14/3 *cl* de solution à 30% et 7/3 *cl* d'eau.

7. QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

   (7.1) Que vaut l'excentricité de la conique d'équation $y^2 - 2x^2 = 1$?
   ☐ $\sqrt{6}$
   ♣ $\sqrt{6}/2$
   ☐ $\sqrt{3}/2$
   ☐ $\sqrt{3}$
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

   (7.2) Quelle est la partie imaginaire du complexe $\dfrac{(i+1)^2}{1+i^5}$?
   ☐ -1
   ☐ $-i$
   ♣ 1
   ☐ 2
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

   (7.3) Que vaut la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(\cos(2x))$?
   ☐ $x \mapsto 2\sin(\sin(2x))$
   ☐ $x \mapsto -2\sin(\sin(2x))$
   ☐ $x \mapsto -\sin(\cos(2x))\,\sin(2x)$
   ♣ $x \mapsto 2\sin(\cos(2x))\,\sin(2x)$
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.