1, 2, 3...Sciences

Année académique 2019-2020

Corrigé de l'examen de mathématique du 06 janvier 2020

Version 18 décembre 2019

QUESTIONNAIRE

Théorie

Théorie 1.
(a) Quels sont les domaine de définition et ensemble image de la fonction sinus ?
(b) Comment définit-on géométriquement le sinus du réel 6 ? Expliquer clairement votre réponse et l'illustrer par une représentation géométrique.

Théorie 2.
(a) Qu'est-ce qu'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 ?
(b) Donner la structure générale de l'ensemble des solutions d'une telle équation et justifier votre réponse.

Théorie 3.
(a) On donne une fonction continue sur l'intervalle $]0,1]$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?
(b) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir une condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $]0,1]$ ($r \in \mathbb{R}$).

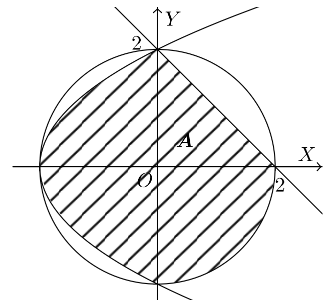
Exercices

1. (a) Que vaut $|x^2+2x|$ en fonction de la valeur du réel strictement négatif x ?
   (b) Dans un repère orthonormé, on donne la droite d d'équation cartésienne $4x-2y+5=0$ et le point A de coordonnées $(3,-1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' orthogonale à la droite d et passant par le point A.
   (c) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[-\pi, 0]$, résoudre l'équation suivante
   $$\cos(4x)+\cos(-2x)=-1.$$
   (d) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante
   $$\arcsin\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right).$$
   (e) Déterminer le module du nombre complexe z suivant
   $$\frac{2\,i^{151}}{1-\sqrt{2}\,i}.$$

2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.
   $$(a)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to(-1)^-} \arctan\left(\frac{\sqrt{x^4-1}}{1-x^2}\right)$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.
   $$(a)\quad \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}\,dx \qquad\qquad (b)\quad \int_{-1}^{0} \frac{2x^2+x-3}{2x-1}\,dx$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole, une autre est un cercle et la dernière est une droite).



5. (a) Déterminer la fonction g sachant que la fonction $f : x \mapsto \arctan(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$D^2 f(x) + 2x\,(Df(x))^2 \; = g(x).$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$Df(x) + f(x) = (x-1)\; e^{-x}.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
En se transformant en eau, la glace voit son volume diminuer de 1/16. Quelle quantité de glace en m^3 faut-il pour obtenir $7,5$ hectolitres d'eau ?

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.
(a) Quels sont les domaine de définition et ensemble image de la fonction sinus ?
(b) Comment définit-on géométriquement le sinus du réel 6 ? Expliquer clairement votre réponse et l'illustrer par une représentation géométrique.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 2.
(a) Qu'est-ce qu'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 ?
(b) Donner la structure générale de l'ensemble des solutions d'une telle équation et justifier votre réponse.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 3.
(a) On donne une fonction continue sur l'intervalle $]0,1]$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?
(b) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir une condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $]0,1]$ ($r \in \mathbb{R}$).

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Exercices

1. **(a) Que vaut $|x^2+2x|$ en fonction de la valeur du réel strictement négatif x ?**
Solution. Par définition, on a
$$|x^2+2x| \ = \ \begin{cases} x^2+2x = x(x+2) & \text{si } x \in]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[\\ -x^2-2x = -x(x+2) & \text{si } x \in [-2,0] \end{cases} .$$
Puisque x est un réel strictement négatif, on a donc
$$|x^2+2x| \ = \ \begin{cases} x^2+2x = x(x+2) & \text{si } x \in]-\infty,-2] \\ -x^2-2x = -x(x+2) & \text{si } x \in [-2,0[\end{cases} .$$

(b) Dans un repère orthonormé, on donne la droite d d'équation cartésienne $4x-2y+5=0$ et le point A de coordonnées $(3,-1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' orthogonale à la droite d et passant par le point A.
Solution. Puisque les droites d et d' sont orthogonales, leurs coefficients angulaires ont un produit égal à -1 ; comme celui de la droite d vaut 2, celui de d' vaut donc $-1/2$. Comme la droite d' passe par le point A de coordonnées $(3,-1)$, son équation cartésienne est
$$y+1 = -\frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow 2y+2 = -(x-3) \Leftrightarrow x+2y-1 = 0.$$

(c) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[-\pi,0]$, résoudre l'équation suivante
$$\cos(4x)+\cos(-2x) = -1.$$
Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$.
Comme $1+\cos(4x) = 2\cos^2(2x)$ et $\cos(-2x) = \cos(2x)$, l'équation donnée est équivalente à
$$\begin{aligned} 1+\cos(4x)+\cos(-2x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos^2(2x)+\cos(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(2x)(2\cos(2x)+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(2x) = 0 \text{ OU } \cos(2x) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : \left(2x = \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ OU } (2x = \frac{2\pi}{3}+2k\pi \ \text{ ou } \ 2x = -\frac{2\pi}{3}+2k\pi)\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : \left(x = \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \text{ OU } (x = \frac{\pi}{3}+k\pi \ \text{ ou } \ x = -\frac{\pi}{3}+k\pi)\right). \end{aligned}$$
Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[-\pi,0]$ sont $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}$.

(d) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante
$$\arcsin\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right).$$
Solution. Comme $\mathrm{dom}(\cos) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{im}(\cos) = [-1,1] = \mathrm{dom}(\arcsin)$, l'expression
$$\arcsin\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right)$$
est définie.
Dès lors, vu que $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{23\pi}{14}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right)$, on a
$$\arcsin\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right)\right) = -\frac{5\pi}{14},$$

puisque $\arcsin(\sin(x)) = x$ pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(e) Déterminer le module du nombre complexe z suivant

$$\frac{2\,i^{151}}{1-\sqrt{2}\,i}.$$

Solution. Le module demandé vaut $|z| = \left|\dfrac{2\,i^{151}}{1-\sqrt{2}\,i}\right| = \dfrac{|2i^{151}|}{|1-\sqrt{2}\,i|} = \dfrac{2}{\sqrt{1+2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$(a)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \qquad\qquad (b)\ \lim_{x\to(-1)^-} \arctan\left(\frac{\sqrt{x^4-1}}{1-x^2}\right)$$

Solution. **(a)** La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ est définie sur

$$\begin{aligned}\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0,\ 1+\frac{1}{x} > 0 \text{ et } \ln(1+1/x) \neq 0\right\} &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0,\ \frac{x+1}{x} > 0 \text{ et } 1+(1/x) \neq 1\right\}\\ &=]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[.\end{aligned}$$

Comme cet ensemble est non minoré, le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.
Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$, transformons la limite demandée en $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{\sin(y)}{\ln(1+y)}$, en posant $y = 1/x$.
On a d'une part $\lim\limits_{y\to 0^-} \sin(y) = 0^-$, et d'autre part $\lim\limits_{y\to 0^-} \ln(1+y) = 0^-$.
Pour lever l'indétermination "0/0", vérifions d'abord les hypothèses du théorème de l'Hospital.
Dans $V =]-1, 0[$, considérons $f_1 : y \mapsto \sin(y)$ et $f_2 : y \mapsto \ln(1+y)$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables sur V.
2) La dérivée de f_2 vaut $1/(1+y)$ et est non nulle dans V.
3) On a $\lim\limits_{y\to 0^-} \sin(y) = 0^-$, et d'autre part $\lim\limits_{y\to 0^-} \ln(1+y) = 0^-$.
4) De plus, $\lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{Df_1(y)}{Df_2(y)} = \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{\cos(y)}{\frac{1}{1+y}} = \lim\limits_{y\to 0^-} (\cos(y)(1+y)) = 1$.

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 1.

(b) La fonction $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{\sqrt{x^4-1}}{1-x^2}\right)$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 1 \geq 0 \text{ et } 1 - x^2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[.$$

Puisque tout intervalle du type $]r, -1[$ $(r < -1)$ rencontre le domaine, le calcul de la limite en $(-1)^-$ peut être envisagé.
Comme

$$\lim_{x\to(-1)^-} \left(\frac{\sqrt{x^4-1}}{1-x^2}\right) = \lim_{x\to(-1)^-} \left(\frac{\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)}}{-(x^2-1)}\right) = \lim_{x\to(-1)^-} \left(\frac{-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \text{“}\frac{-\sqrt{2}}{0^+}\text{''} = -\infty,$$

et que

$$\lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = \left(\frac{-\pi}{2}\right)^+,$$

le théorème des limites des fonctions de fonction permet de conclure

$$\lim_{x\to(-1)^-} \arctan\left(\frac{\sqrt{x^4-1}}{1-x^2}\right) = \left(\frac{-\pi}{2}\right)^+.$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

$$(a)\ \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}\ dx \qquad\qquad (b)\ \int_{-1}^{0} \frac{2x^2+x-3}{2x-1} dx$$

Solution. **(a)** La fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, 0]$, ensemble non borné. Comme elle est positive sur cet ensemble, vérifions l'intégrabilité de la fonction en $-\infty$ en utilisant la définition. Cette fonction est continue sur $]-\infty, 0]$ donc sur les intervalles fermés bornés de la forme $[t, 0]$ avec $t < 0$. Une primitive de f sur $]-\infty, 0[$ est donnée par

$$\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}\ dx = -\int \frac{-e^{-x}}{1+(e^{-x})^2}\ dx \simeq -\arctan(e^{-x}).$$

Donc, pour tout $t < 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{t}^{0} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}\ dx &= \left[-\arctan(e^{-x})\right]_t^0 \\
&= -\arctan(e^{0}) + \arctan(e^{-t}) \\
&= \arctan(e^{-t}) - \arctan(1) \\
&= \arctan(e^{-t}) - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}\ dx &= \lim_{t\to-\infty} \left(\arctan(e^{-t}) - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \lim_{t\to-\infty} \left(\arctan(e^{-t})\right) - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

puisque $\lim_{t\to-\infty} \left(e^{-t}\right) = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \dfrac{\pi}{2}$, et donc $\lim_{t\to-\infty} \left(\arctan(e^{-t})\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (par le théorème des limites des fonctions de fonction).
Comme cette limite existe et est finie et que la fonction f est positive sur $]-\infty, 0]$, on conclut que la fonction f est intégrable sur $]-\infty, 0]$ et que l'intégrale demandée vaut $\dfrac{\pi}{4}$.

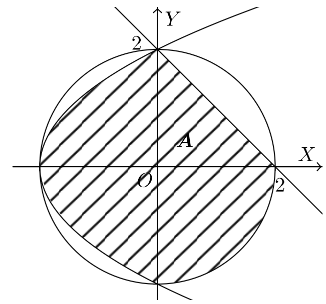
(b) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+x-3}{2x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1/2\}$; elle est donc continue sur l'intervalle fermé borné $[-1, 0]$ et intégrable sur cet ensemble. Comme

$$\frac{2x^2+x-3}{2x-1} = x + 1 - \frac{2}{2x-1},$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{2x^2+x-3}{2x-1} dx &= \int_{-1}^{0} \left(x+1-\frac{2}{2x-1}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + x - \ln(|2x-1|)\right]_{-1}^{0} \\
&= -\ln(1) - \frac{1}{2} + 1 + \ln(3) \\
&= \frac{1}{2} + \ln(3).
\end{aligned}$$

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole, une autre est un cercle et la dernière est une droite).**



Solution. La parabole a pour équation $x+2=y^2/2 \Leftrightarrow y=-\sqrt{2x+4}$ ou $y=\sqrt{2x+4}$, le cercle a pour équation $x^2+y^2=4 \Leftrightarrow y=-\sqrt{4-x^2}$ ou $y=\sqrt{4-x^2}$ et celle de la droite est $y=-x+2$. On a donc la description suivante

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-2,0],\ y\in[-\sqrt{2x+4},\sqrt{2x+4}]\right\} \\ &\cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,2],\ y\in[-\sqrt{4-x^2},-x+2]\right\}. \end{aligned}$$

5. **(a) Déterminer la fonction g sachant que la fonction $f: x\mapsto \arctan(x)$ vérifie l'équation différentielle**

$$D^2f(x)+2x\,(Df(x))^2 = g(x).$$

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Sur cet ensemble, on a
$Df(x)=D(\arctan(x))=\dfrac{1}{1+x^2}$ et $D^2f(x)=D\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$,
et donc

$$\begin{aligned} D^2f(x)+2x\,(Df(x))^2 &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}+2x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 \\ &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}+\frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction g est donc la fonction identiquement nulle.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$Df(x)+f(x)=(x-1)\ e^{-x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 non homogène.
L'équation homogène associée est $Df(x)+f(x)=0$; le polynôme caractéristique est $z\mapsto z+1$ et son zéro est -1. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x)=ce^{-x},\ x\in\mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire.
Le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc on cherche une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre est une exponentielle polynôme, produit d'un polynôme de degré 1 et d'une exponentielle dont le coefficient -1 de la variable est zéro simple du polynôme caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x)=(Ax+B)x\ e^{-x}=(Ax^2+Bx)\ e^{-x}$ où A et B sont des constantes à déterminer.
Puisque

$$Df_P(x)=(2Ax+B)\ e^{-x}-(Ax^2+Bx)\ e^{-x}=(-Ax^2+(2A-B)x+B)\ e^{-x}$$

on a

$$\begin{aligned}
Df_P(x)+f_P(x)=(x-1)e^{-x} \quad &\Leftrightarrow \quad (-Ax^2+(2A-B)x+B)e^{-x}+(Ax^2+Bx)e^{-x}=(x-1)e^{-x}\\
&\Leftrightarrow \quad ((-A+A)x^2+(2A-B+B)x+B)\ e^{-x}=(x-1)\ e^{-x}\\
&\Leftrightarrow \quad (2Ax+B)\ e^{-x}=(x-1)\ e^{-x}\\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2A=1\\ B=-1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A=1/2\\ B=-1\end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ e^{-x},\ x\in\mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x)=ce^{-x}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ e^{-x}=\left(\frac{x^2}{2}-x+c\right)\ e^{-x},\ x\in\mathbb{R},$$

où c est une constante complexe arbitraire.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
En se transformant en eau, la glace voit son volume diminuer de 1/16. Quelle quantité de glace en m^3 faut-il pour obtenir $7,5$ hectolitres d'eau ?
Solution. Soit x la quantité de glace demandée exprimée en m^3 .
Comme 1 hectolitre vaut 100 litres et que 1 litre d'eau correspond à un volume de $1/1\,000$ mètres cube, 1 hectolitre correspond à un volume de $1/10$ mètre cube. On a

$$\left(1-\frac{1}{16}\right)x=\frac{7,5}{10}$$

ou encore

$$\frac{15}{16}x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{5}{4}x=1\Leftrightarrow x=\frac{4}{5}\Leftrightarrow x=0,8.$$

Il faut donc $0,8$ m^3 de glace pour obtenir $7,5$ hectolitres d'eau.