1, 2, 3...Sciences

Année académique 2018-2019

Corrigé de l'examen de mathématique du 7 janvier 2019

Version 7 janvier 2019

QUESTIONNAIRE

Théorie

Théorie 1.
(a) Quelles sont les limites des valeurs des fonctions exponentielle et logarithme aux extrémités de leurs domaines de définition ?
(b) Enoncer les propriétés fondamentales de ces fonctions vis-à-vis de la somme et du produit.

Théorie 2.
On donne une fonction f qui vérifie

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2.$$

Donner la définition mathématique (en « ε, η ») correspondant à cette notation ainsi qu'une interprétation graphique en faisant figurer sur celle-ci les différentes grandeurs introduites dans la définition.
Question analogue à celle de la Liste 9, I exercice 1.

Théorie 3.
(a) On donne une fonction continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?
(b) Enoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante sur r ($r \in \mathbb{R}$) sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ en utilisant la définition donnée au point précédent.

Exercices (70 points)

1. (a) Si x est un réel, que vaut la valeur absolue de $x^2 - |x^4|$? (Voir Liste 2, II exercice 2(b)).
   (b) Que vaut l'expression suivante si on la simplifie au maximum.

   $$4 \sin\left(\frac{11\pi}{24}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{24}\right)$$

   (Voir Liste 3, III exercice 4 (b))
   (c) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation suivante

   $$\cos(3x) + \sin(3x) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

   (Voir Liste 3, III exercice 8 (c))
   (d) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

   $$\operatorname{arcotg}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right).$$

   (Voir Liste 8, II exercice 8)
   (e) Déterminer la forme trigonométrique du complexe suivant et le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)

   $$\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i).$$

   (Voir Liste 6, I exercice 2 (3))

2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

   $$(a) \quad \lim_{t \to 1^-} (1 - t) \ln(1 - t^2) \qquad\qquad (b) \quad \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x + 4x^2} - \sqrt{4x^2 + 1}\right)$$

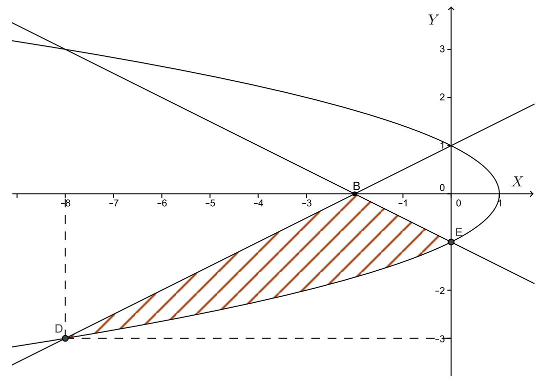
   (Voir Liste 10, II exercice 1 (7) et Liste 9, I exercice 3 (5) qui a été résolu par l'assistant)

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx \qquad\qquad (b)\ \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

(Voir Liste 15, II (6) et Liste 13, I exercice 2 (12))

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole et les autres sont des droites.)



(Voir Liste 5, exercice 9 (c))

5. (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \operatorname{cotg}(x) + \dfrac{1}{\sin(x)},\ x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, vérifie l'équation différentielle

$$2Df + f^2 = -1.$$

(Voir Liste 16, I exercice 5)

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$4D^2 f(x) - f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{2}.$$

(Voir Liste 17, I exercice 1 (2))

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.

Un terrain carré est bordé intérieurement par une allée de largeur constante dont la superficie vaut $464\ m^2$*. Lorsqu'on fait le tour du terrain, on remarque une différence de* $32\ m$ *entre le parcours effectué au bord intérieur de l'allée et celui correspondant au bord extérieur. Quelle est la superficie totale du terrain ?*
(Voir Liste 1, I exercice 6).

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.
(a) Quelles sont les limites des valeurs des fonctions exponentielle et logarithme aux extrémités de leurs domaines de définition ?
(b) Enoncer les propriétés fondamentales de ces fonctions vis-à-vis de la somme et du produit.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

<u>Théorie 2.</u>
On donne une fonction f qui vérifie

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2.$$

Donner la définition mathématique (en ≪ $\varepsilon,\ \eta$ ≫) correspondant à cette notation ainsi qu'une interprétation graphique en faisant figurer sur celle-ci les différentes grandeurs introduites dans la définition.
(Question analogue à celle de la Liste 9, I exercice 1).

Pour une réponse ≪ type ≫, voir cours (syllabus et cours enseigné).

<u>Théorie 3.</u>
(a) On donne une fonction continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?
(b) Enoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante sur r ($r \in \mathbb{R}$) sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ en utilisant la définition donnée au point précédent.

Pour une réponse ≪ type ≫, voir cours (syllabus et cours enseigné).

Exercices

1. **(a) Si x est un réel, que vaut la valeur absolue de $x^2 - |x^4|$?**
(Voir Liste 2, II exercice 2(b))

Solution. Comme x est un réel, x^2 et x^4 sont des réels positifs. Dès lors,

$$|x^2 - |x^4|| \ = \ |x^2 - x^4| \ = \ x^2|1 - x^2|.$$

Une étude du signe de $1 - x^2$ permet donc de conclure ; on a

$$|x^2 - |x^4|| \ = \ \begin{cases} x^2(x^2-1) & \text{si} \quad x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\\ x^2(1-x^2) & \text{si} \quad x \in [-1,1]. \end{cases}$$

(b) Que vaut l'expression suivante si on la simplifie au maximum.

$$4\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right)$$

(Voir Liste 3, III exercice 4 (b))

Solution. Puisque $2\sin(a)\cos(b) \ = \ \sin(a+b) \ + \ \sin(a-b),\ a,b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} 4\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right) \ &= \ 2\left(\sin\left(\frac{11\pi}{24}+\frac{7\pi}{24}\right)+\sin\left(\frac{11\pi}{24}-\frac{7\pi}{24}\right)\right) \\ &= \ 2\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \ = \ \sqrt{2}+1 \end{aligned}$$

(c) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation suivante

$$\cos(3x) + \sin(3x) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

(Voir Liste 3, III exercice 8 (c))

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$.
Comme $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$, que $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos((a+b)/2)\cos((a-b)/2)$, $a, b \in \mathbb{R}$ et que $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, l'équation donnée est équivalente à

$$\cos(3x) + \cos(\pi/2 - 3x) = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow 2\cos(\pi/4)\cos(3x - \pi/4) = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos(3x - \pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : 3x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{5\pi}{36} + 2k\frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{36} + 2k\frac{\pi}{3}.$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ sont $\frac{25\pi}{36}, \frac{29\pi}{36}, \frac{49\pi}{36}, \frac{53\pi}{36}$.

(d) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\text{arcotg}\left(\text{cotg}\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right).$$

(Voir Liste 8, II exercice 8)

Solution. Comme $\text{dom(cotg)} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{R}\}$ et $\text{im(cotg)} = \mathbb{R} = \text{dom(arcotg)}$, l'expression $\text{arcotg}\left(\text{cotg}\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right)$ est définie.
Dès lors, vu que $\text{cotg}(8\pi/7) = \text{cotg}(\pi/7)$, on a

$$\text{arcotg}\left(\text{cotg}\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right) = \text{arcotg}\left(\text{cotg}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) = \frac{\pi}{7},$$

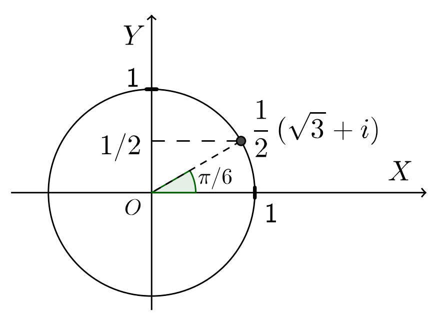
les fonctions arcotg et cotg étant inverses l'une de l'autre pour tout $x \in]0, \pi[$.

(e) Déterminer la forme trigonométrique du complexe suivant et le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i).$$

(Voir Liste 6, I exercice 2 (3))

Solution. Le module de ce nombre vaut $\sqrt{3/4 + 1/4} = 1$. Comme $\cos(\theta) = \sqrt{3}/2$ et $\sin(\theta) = 1/2$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, la forme trigonométrique du complexe donné est $\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)$.



2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$(a)\ \lim_{t \to 1^-} (1 - t)\ln(1 - t^2) \qquad (b)\ \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x + 4x^2} - \sqrt{4x^2 + 1}\right)$$

(Voir Liste 10, II exercice 1 (7) et Liste 9, I exercice 3 (5) qui a été résolu par l'assistant)

Solution. **(a)** La fonction $t \mapsto (1-t)\ln(1-t^2)$ est définie sur $A = \{t \in \mathbb{R} : 1-t^2 > 0\} =]-1,1[$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 1 rencontre $A \cap]-\infty, 1[=]-1,1[$, le calcul de la limite en 1^- peut être envisagé.
D'une part, $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t) = 0^+$. D'autre part, comme $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t^2) = 0^+$ et $\lim\limits_{y\to 0^+}\ln(y) = -\infty$, on a $\lim\limits_{t\to 1^-}\ln(1-t^2) = -\infty$ vu le théorème de la limite des fonctions de fonction.
Pour lever l'indétermination "$0.\infty$", appliquons le théorème de l'Hospital à la fonction écrite sous la forme $\dfrac{\ln(1-t^2)}{(1-t)^{-1}}$. Pour cela, vérifions-en d'abord les hypothèses.

Dans $V =]-1,1[$, considérons $f_1 : t \mapsto \ln(1-t^2)$ et $f_2 : t \mapsto (1-t)^{-1}$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables dans V
2) La dérivée de f_2 vaut $(1-t)^{-2}$ et est non nulle dans V
3) On a $\lim\limits_{t\to 1^-}\ln(1-t^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)^{-1} = +\infty$
4) De plus, $\lim\limits_{t\to 1^-}\dfrac{Df_1(t)}{Df_2(t)} = \lim\limits_{t\to 1^-}\dfrac{\frac{-2t}{1-t^2}}{(1-t)^{-2}} = \lim\limits_{t\to 1^-}\dfrac{-2t(1-t)^2}{1-t^2} = \lim\limits_{t\to 1^-}\dfrac{-2t(1-t)}{1+t} = 0.$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 0^-.

(b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x+4x^2} - \sqrt{4x^2+1}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x + 4x^2 \geq 0 \text{ et } 4x^2+1 \geq 0\} =]-\infty, -1/4] \ \cup \ [0, +\infty[,$$

ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.

D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+4x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}\sqrt{y} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x+4x^2} = +\infty$ vu le théorème de la limite des fonctions de fonction. D'autre part, par un raisonnement analogue, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1} = +\infty$.
Pour lever l'indétermination "$\infty - \infty$", on multiplie numérateur et dénominateur par le binôme conjugé de $\sqrt{x+4x^2} - \sqrt{4x^2+1}$ et on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x+4x^2} - \sqrt{4x^2+1}) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x+4x^2} - \sqrt{4x^2+1})(\sqrt{x+4x^2} + \sqrt{4x^2+1})}{\sqrt{x+4x^2} + \sqrt{4x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x+4x^2} + \sqrt{4x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|2x| + |2x|} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-4x} \\
&= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\, dx \qquad\qquad (b) \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$$

(Voir Liste 15, II (6) et Liste 13, I exercice 2 (12))

Solution. **(a)** La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{(x-1)^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; +\infty[$, ensemble non borné. Comme elle est positive sur cet ensemble, vérifions l'intégrabilité de la fonction

en $+\infty$ en utilisant la définition. Cette fonction est continue sur $[0;+\infty[$ donc sur les intervalles fermés bornés de la forme $[0,t]$ avec $t>0$; elle y est donc intégrable.
De plus, pour tout $t>0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx &= [\operatorname{arctg}(x-1)]_0^t \\ &= \operatorname{arctg}(t-1)-\operatorname{arctg}(-1) \\ &= \operatorname{arctg}(t-1)+\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}(t-1)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4},$$

puisque $\lim\limits_{t\to+\infty}(t-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}\operatorname{arctg}(y)=\frac{\pi}{2}$, et donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{arctg}(t-1)=\frac{\pi}{2}$ (par le théorème de la limite des fonctions de fonction).

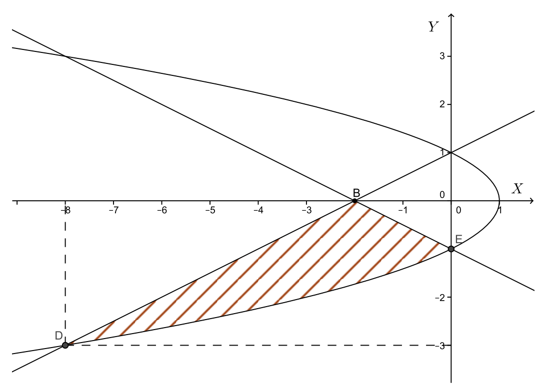
Comme cette limite existe et est finie et que la fonction f est positive sur $[0,+\infty[$, on conclut que la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que l'intégrale demandée vaut $\frac{3\pi}{4}$.

Remarque :
On aurait également pu prouver l'intégrabilité de la fonction par le critère en θ, avec $\theta=2>1$.

(b) La fonction $f : x\mapsto \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ est continue sur $]-2,2[$; elle est donc continue sur l'intervalle fermé borné $[-1,\sqrt{3}]$ et intégrable sur cet ensemble. On a

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-1}^{\sqrt{3}}=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}.$$

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole et les autres sont des droites.)**



(Voir Liste 5, exercice 9 (c))

Solution. Les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(-2,0),(-8,-3)$ et $(0,-1)$.
Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $DB : x-2y+2=0$, $BE : x+2y+2=0$, et la parabole a pour équation $1-y^2=x$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[-3,-1],\ x\in[2y-2,1-y^2]\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[-1,0],\ x\in[2y-2,-2y-2]\right\}.$$

5. **(a) Montrer que la fonction** $x \mapsto \mathrm{cotg}(x)+\dfrac{1}{\sin(x)},\ x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$**, vérifie l'équation différentielle**

$$2Df + f^2 = -1.$$

(Voir Liste 16, I exercice 5)

Solution. La fonction donnée est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a

$$D\left(\mathrm{cotg}(x) + \frac{1}{\sin(x)}\right) = \frac{-1}{\sin^2(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)},\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

et donc

$$\begin{aligned} 2Df(x) + f^2(x) &= \frac{-2}{\sin^2(x)} - \frac{2\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{2\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{-1+\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

ce qui prouve que la fonction vérifie l'équation donnée.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$4D^2f(x) - f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{2}.$$

(Voir Liste 17, I exercice 1 (2))

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $4D^2f(x) - f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto 4z^2 - 1 = (2z+1)(2z-1)$ et ses zéros sont $-1/2$ et $1/2$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1e^{-x/2} + c_2e^{x/2},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$; on cherche donc une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$. Comme

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

le second membre s'écrit aussi $-\frac{1}{2}\cos(2x)$.

Cherchons donc une solution particulière de l'équation dont le second membre est

$$-\frac{1}{2}\cos(2x) \ = \ -\frac{1}{2}\,\Re\left(e^{2ix}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les coefficients de l'équation homogène étant réels, une solution particulière est donnée par la partie réelle d'une solution particulière de l'équation

$$4D^2f(x) - f(x) = -\frac{1}{2}\ e^{2ix}.$$

Comme le second membre est une fonction du type « exponentielle-polynôme » et que $2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière est de la forme

$$f_P(x) = Ae^{2ix},\ x \in \mathbb{R}$$

où A est une constante à déterminer. On a successivement

$$Df_P(x) \;=\; 2iAe^{2ix} \quad \text{et} \quad D^2f_P(x) \;=\; -4Ae^{2ix},$$

donc

$$\begin{aligned} 4D^2f_P(x) - f_P(x) \;=\; -\frac{1}{2}\,e^{2ix} \quad &\Leftrightarrow \quad -16Ae^{2ix} - Ae^{2ix} \;=\; -\frac{1}{2}\,e^{2ix} \\ &\Leftrightarrow \quad -17Ae^{2ix} \;=\; -\frac{1}{2}\,e^{2ix} \\ &\Leftrightarrow \quad A \;=\; \frac{1}{34}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation de départ est donc donnée par la fonction

$$\frac{1}{34}\Re e^{2ix} \;=\; \frac{1}{34}\cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = c_1\,e^{-x/2} + c_2\,e^{x/2} + \frac{1}{34}\cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un terrain carré est bordé intérieurement par une allée de largeur constante dont la superficie vaut** 464 m^2**. Lorsqu'on fait le tour du terrain, on remarque une différence de** 32 m **entre le parcours effectué au bord intérieur de l'allée et celui correspondant au bord extérieur. Quelle est la superficie totale du terrain ?
(Voir Liste 1, I exercice 6)

Solution. Soit c la longueur en mètres d'un côté du terrain carré ; le côté du bord intérieur de l'allée mesure donc $\frac{1}{4}(4c - 32) \;=\; (c - 8)$ mètres. Dès lors, la superficie de l'allée vaut

$$c^2 - (c-8)^2 \;=\; 464 \Leftrightarrow 16c - 64 \;=\; 464 \Leftrightarrow c - 4 \;=\; 29 \Leftrightarrow c \;=\; 33.$$

La superficie totale du terrain vaut donc $33^2 \;=\; 1089$ m^2.