LIÈGE université
Sciences

Mathématiques générales I (MATH2007)

Année académique 2025-2026

Examen du 12 janvier 2026
Questionnaire et corrigé

Version 9 décembre 2025

Mathématiques générales I, MATH 2007
Questionnaire de l'examen du 12 janvier 2026

Consignes

- ***L'examen dure*** 3 heures pour les dispensés et 3h15 pour les non-dispensés.
- Compléter le tableau ci-dessous avant de ***rendre vos copies accompagnées de cette feuille***.
- Sur ***chaque*** feuille, indiquer votre ***NOM (en capitales, caractères d'imprimerie), votre prénom (en minuscules, sauf première lettre) et votre section***.
- ***Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées***.
- ***Justifier toutes vos réponses, SAUF celles du QCM***.
- Les calculatrices, montres connectées (style iWatch), gsm etc ... sont interdits.
- Le Journal de Bord (formulaire) sera fourni ; ***NE RIEN ECRIRE SUR CE FORMULAIRE***.

NOM : ....

Prénom : ....

Matricule : ....

SECTION :.................................

Signature :

Indiquer une CROIX dans la colonne correspondante
pour les QUESTIONS OUVERTES
AUXQUELLES VOUS NE REPONDEZ PAS.

Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Question 7	Question 8

QCM

Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0
Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

Théorie

(1) Soient trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Alors l'expression $(\vec{b} + (\vec{a} \wedge \vec{c})) \wedge \vec{b}$

(a) ☐ n'a pas de sens.

(b) ☐ est un vecteur parallèle au vecteur $\vec{b}$.

(c) ☐ est un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{c} \wedge \vec{a}$.

(d) ☐ est un nombre.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

(a) ☐ Pour qu'une fonction soit dérivable sur un intervalle, il suffit qu'elle y soit continue.

(b) ☐ Pour qu'une fonction soit dérivable sur un intervalle, il est nécessaire qu'elle y soit continue.

(c) ☐ Pour qu'une fonction soit continue sur un intervalle, il est nécessaire qu'elle y soit dérivable.

(d) ☐ Pour qu'une fonction soit dérivable sur un intervalle, il est nécessaire et suffisant qu'elle y soit continue.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Soient f et g deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ telles que $f(x) \leq g(x) \leq 1/x\ \forall x > 0$. On suppose que ces deux fonctions admettent des limites en 0^+ et en $+\infty$. Alors

(a) □ si la limite en 0^+ des valeurs de g est finie alors il en est de même pour f.

(b) □ si la limite en $+\infty$ des valeurs de f est nulle alors il en est de même pour g.

(c) □ si la limite en 0^+ des valeurs de f est nulle alors il en est de même pour g.

(d) □ si f ne s'annule pas, alors la limite des valeurs de g/f en 0 est égale à 1.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(4) Si une fonction continue sur un intervalle ouvert I est à valeurs positives, alors

(a) □ la fonction est croissante sur l'intervalle.

(b) □ toute primitive de f est croissante sur l'intervalle.

(c) □ la fonction est intégrable sur l'intervalle.

(d) □ la dérivée de la fonction est croissante sur l'intervalle.

(e) □ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(5) Dans un cas particulier, le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer comme suit :
≪ On considère une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]-1, 2[$, à valeurs réelles. Si la limite de f en $(-1)^+$ est nulle et si la limite de f en 2^- vaut $-\infty$, alors *quel que soit le réel strictement négatif, il existe toujours un réel appartenant à* $]-1, 2[$ *en lequel* f *prend la valeur du réel qu'on a fixé au départ.* ≫.

La partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit

(a) □ $\exists r \in]-1, 2[$ tel que $f(r) = R \quad \forall R \in]-\infty, 0[$.

(b) □ $\forall r \in]-1, 2[,\ \exists R \in]-\infty, 0[$ tel que $f(r) = R$.

(c) □ $\forall R \in]-\infty, 0[,\ \exists r \in]-1, 2[$ tel que $f(r) = R$.

(d) □ $\exists R \in]-\infty, 0[$ tel que $f(r) = R \quad \forall r \in]-1, 2[$.

(e) □ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Exercices

(6) Que vaut $\arcsin(\sin(3))$?

(a) □ 3

(b) □ $2\pi - 3$

(c) □ $3 - \pi/2$

(d) □ $\pi - 3$

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Dans un repère orthonormé, soit la droite d'équation cartésienne $4x + 2y + 1 = 0$. Un vecteur orthogonal à cette droite a pour composantes

(a) □ $(2, 1)$

(b) □ $(1, 2)$

(c) □ $(-2, 1)$

(d) □ $(-1, 2)$

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $\sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est la dérivée de la fonction

(a) □ $2\sin(x)\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$.

(b) □ $2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$.

(c) □ $\sin^3(x)/3,\ x \in \mathbb{R}$.

(d) □ $x/2 - \cos(x)/2,\ x \in \mathbb{R}$.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1 (1.1) Soient des complexes s, t avec s non nul et $t^2 \neq 4s$. Démontrer que l'équation (en l'inconnue z) $sz^2 + tz + 1 = 0$ possède toujours deux solutions.
(1.2) Lorsque s et t sont réels et que $t^2 < 4s$, démontrer que les deux solutions dont il est question au point précédent sont des complexes conjugués.

Question 2 (20 points)
(2.1) Enoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.2) Enoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.3) Que signifient les notations $C_0([1, +\infty[)$ et $C_1(]1, +\infty[)$?
(2.4) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_1(]1, +\infty[)$.
(2.5) On donne $f \in C_0([1, +\infty[)$. Quelle est la définition de l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$?
(2.6) En vous servant de la définition donnée au point (2.5), quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le réel θ pour que la fonction $x \mapsto x^\theta$ soit intégrable sur $[1, +\infty[$? Justifier votre réponse.

Exercices

Question 3 ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***
Cette année, la somme des âges d'Etienne et de Françoise est de 100 ans. Il y a 14 ans, Françoise avait le double de l'âge d'Etienne. Quels sont les âges actuels d'Etienne et de Françoise ?

Question 4
(4.1) Si $w = 2 - i$, calculer la partie imaginaire et le module de $z = w/(1 + iw)$.
(4.2) Résoudre l'inéquation $|x^2 - 1| < x + 1$ en l'inconnue réelle x.
(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$2\sin^2(x) = \cos(2x).$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^4 - 1)}{\ln(2x^2 + 1)} \qquad (5.2)\ \lim_{x\to 1^-} \frac{|3x - 1 - 2x^2|}{1 - x}$$

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1)\ \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{x^2 - 1}\, dx \qquad (6.2)\ \int_0^{+\infty} e^{-|1-x|}\, dx$$

Question 7

Les expressions suivantes sont-elles **définies** ? Justifier.

$$(7.1)\text{arcos}\left(\frac{4\pi}{11}\right) \qquad (7.2)\cos\Big(\arcsin(\cos(3))\Big) \qquad (7.3)\ln\Big(\sin(6)\Big) \qquad (7.4)\arctan\Big(\ln(6)\Big)$$

Question 8 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - Df(x) = x.$$

Mathématiques générales I, MATH 2007
Corrigé de l'examen du lundi 12 janvier 2026

QCM

Théorie

(1) Soient trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Alors l'expression $(\vec{b} + (\vec{a} \wedge \vec{c})) \wedge \vec{b}$

(a) ☐ n'a pas de sens.

(b) ☐ est un vecteur parallèle au vecteur $\vec{b}$.

(c) ♣ est un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{c} \wedge \vec{a}$.

(d) ☐ est un nombre.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

(a) ☐ Pour qu'une fonction soit dérivable sur un intervalle, il suffit qu'elle y soit continue.

(b) ♣ Pour qu'une fonction soit dérivable sur un intervalle, il est nécessaire qu'elle y soit continue.

(c) ☐ Pour qu'une fonction soit continue sur un intervalle, il est nécessaire qu'elle y soit dérivable.

(d) ☐ Pour qu'une fonction soit dérivable sur un intervalle, il est nécessaire et suffisant qu'elle y soit continue.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Soient f et g deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$ telles que $f(x) \leq g(x) \leq 1/x \ \forall x > 0$. On suppose que ces deux fonctions admettent des limites en 0^+ et en $+\infty$. Alors

(a) ☐ si la limite en 0^+ des valeurs de g est finie alors il en est de même pour f.

(b) ♣ si la limite en $+\infty$ des valeurs de f est nulle alors il en est de même pour g.

(c) ☐ si la limite en 0^+ des valeurs de f est nulle alors il en est de même pour g.

(d) ☐ si f ne s'annule pas, alors la limite des valeurs de g/f en 0 est égale à 1.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(4) Si une fonction continue sur un intervalle ouvert I est à valeurs positives, alors

(a) ☐ la fonction est croissante sur l'intervalle.

(b) ♣ toute primitive de f est croissante sur l'intervalle.

(c) ☐ la fonction est intégrable sur l'intervalle.

(d) ☐ la dérivée de la fonction est croissante sur l'intervalle.

(e) ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(5) Dans un cas particulier, le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer comme suit :
≪ On considère une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]-1, 2[$, à valeurs réelles. Si la limite de f en $(-1)^+$ est nulle et si la limite de f en 2^- vaut $-\infty$, alors *quel que soit le réel strictement négatif, il existe toujours un réel appartenant à* $]-1, 2[$ *en lequel* f *prend la valeur du réel qu'on a fixé au départ.* ≫.

La partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit

(a) ☐ $\exists r \in]-1, 2[$ tel que $f(r) = R \quad \forall R \in]-\infty, 0[$.

(b) ☐ $\forall r \in]-1, 2[$, $\exists R \in]-\infty, 0[$ tel que $f(r) = R$.

(c) ♣ $\forall R \in]-\infty, 0[$, $\exists r \in]-1, 2[$ tel que $f(r) = R$.

(d) ☐ $\exists R \in]-\infty, 0[$ tel que $f(r) = R \quad \forall r \in]-1, 2[$.

(e) ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Exercices

(6) Que vaut arcsin(sin(3)) ?

(a) ☐ 3

(b) ☐ $2\pi - 3$

(c) ☐ $3 - \pi/2$

(d) ♣ $\pi - 3$

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Dans un repère orthonormé, soit la droite d'équation cartésienne $4x + 2y + 1 = 0$. Un vecteur orthogonal à cette droite a pour composantes

(a) ♣ $(2, 1)$

(b) ☐ $(1, 2)$

(c) ☐ $(-2, 1)$

(d) ☐ $(-1, 2)$

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $\sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est la dérivée de la fonction

(a) ☐ $2\sin(x)\cos(x),\ x \in \mathbb{R}.$

(b) ☐ $2\sin(x),\ x \in \mathbb{R}.$

(c) ☐ $\sin^3(x)/3,\ x \in \mathbb{R}.$

(d) ☐ $x/2 - \cos(x)/2,\ x \in \mathbb{R}.$

(e) ♣ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1

(1.1) Soient des complexes s, t avec s non nul et $t^2 \neq 4s$. Démontrer que l'équation (en l'inconnue z) $sz^2 + tz + 1 = 0$ possède toujours deux solutions.
(1.2) Lorsque s et t sont réels et que $t^2 < 4s$, démontrer que les deux solutions dont il est question au point précédent sont des complexes conjugués.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours. NB : c'est une question de l'interrogation de novembre 2025.*

Question 2

(2.1) Enoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.2) Enoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.3) Que signifient les notations $C_0([1, +\infty[)$ et $C_1(]1, +\infty[)$?
(2.4) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_1(]1, +\infty[)$.
(2.5) On donne $f \in C_0([1, +\infty[)$. Quelle est la définition de l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$?
(2.6) En vous servant de la définition donnée au point (2.5), quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le réel θ pour que la fonction $x \mapsto x^\theta$ soit intégrable sur $[1, +\infty[$? Justifier votre réponse.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours. NB : c'est une question de l'examen de janvier 2025 sauf pour la preuve demandée.*

Exercices

Question 3 ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***
Cette année, la somme des âges d'Etienne et de Françoise est de 100 ans. Il y a 14 ans, Françoise avait le double de l'âge d'Etienne. Quels sont les âges actuels d'Etienne et de Françoise ?

Exemple de résolution. Soient x l'âge actuel d'Etienne et y celui de Françoise. Puisque la somme des âges d'Etienne et de Françoise est de 100 ans, on a $x+y=100$. Il y a 14 ans, Etienne avait $x-14$ ans et Françoise avait $y-14$ ans, ou encore le double de l'âge d'Etienne ; on a donc aussi $2(x-14)=y-14$.

Il s'agit donc de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 100 \\ 2(x-14) & = & y-14, \end{array}\right.$$

lequel est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 100-x \\ 2x-14 & = & 100-x. \end{array}\right.$$

On obtient finalement

$$x=38,\ y=62.$$

Par conséquent, actuellement, Etienne a 38 ans et Françoise en a 62.

Question 4

(4.1) Si $w=2-i$, calculer la partie imaginaire et le module de $z=w/(1+iw)$.

Solution. On a

$$z=\frac{2-i}{1+i(2-i)}=\frac{2-i}{2+2i}=\frac{(2-i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)}=\frac{1-3i}{4}.$$

Dès lors la partie imaginaire de z vaut $-3/4$ et son module vaut

$$|z|=\frac{|1-3i|}{4}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

(4.2) Résoudre l'inéquation $|x^2-1|<x+1$ en l'inconnue réelle x.

Solution. Comme la valeur absolue d'un réel est un réel positif, le membre de gauche est positif. Vu le type d'inégalité, le membre de droite doit donc être strictement positif et, dès lors, les solutions doivent être cherchées parmi les réels strictement supérieurs à -1.

Cela étant, vu la définition d'une valeur absolue, on envisagera deux cas.

Si $x>1$, on a toujours $|x^2-1|=x^2-1$; il s'ensuit que l'on a

$$|x^2-1|<x+1 \ \Leftrightarrow\ (x-1)(x+1)<x+1 \ \Leftrightarrow\ x-1<1 \ \Leftrightarrow\ x<2.$$

Par conséquent, pour $x>1$, les solutions sont les réels de l'intervalle $]1,2[$.

Si $-1<x<1$, on a toujours $|x^2-1|=1-x^2$; il s'ensuit que l'on a

$$|x^2-1|<x+1 \ \Leftrightarrow\ (1-x)(1+x)<x+1 \ \Leftrightarrow\ 1-x<1 \ \Leftrightarrow\ x>0.$$

Par conséquent, pour $-1<x<1$, les solutions sont les réels de l'intervalle $]0,1[$.

Si $x=1$, l'inéquation est vérifiée puisque l'on a alors $0<1$. Par conséquent, 1 est aussi solution.

Il s'ensuit que les solutions de l'inéquation de départ sont les réels de l'intervalle $]0,2[$.

(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$2\sin^2(x)=\cos(2x).$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0,2\pi]$.

Solution. On a successivement

$$\begin{array}{rcl} 2\sin^2(x)=\cos(2x) & \Leftrightarrow & 2\sin^2(x)=1-2\sin^2(x) \\ & \Leftrightarrow & 4\sin^2(x)=1 \\ & \Leftrightarrow & \sin(x)=1/2 \text{ OU } \sin(x)=-1/2 \\ & \Leftrightarrow & \left(\exists k\in\mathbb{Z}: x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z}: x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right) \\ & & \text{OU } \left(\exists k\in\mathbb{Z}: x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z}: x=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi\right). \end{array}$$

Cela étant, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0,2\pi]$ sont les réels $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^4-1)}{\ln(2x^2+1)} \qquad\qquad (5.2)\ \lim_{x\to1^-}\frac{|3x-1-2x^2|}{1-x}$$

Solution. **(5.1)** La fonction

$$x\mapsto\frac{\ln(x^4-1)}{\ln(2x^2+1)}$$

est définie sur

$$\left\{x\in\mathbb{R}:x^4-1>0,\ 2x^2+1>0,\ 2x^2+1\neq1\right\}=\{x\in\mathbb{R}:(x<-1\text{ ou }x>1)\text{ et }x\neq0\}=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[.$$

Puisque cet ensemble n'est pas minoré, le calcul de la limite en $-\infty$ peut être envisagé.

Comme,

$$\lim_{x\to-\infty}\ln(x^4-1)=\lim_{y\to+\infty}\ln(y)=+\infty\ \text{ et }\ \lim_{x\to-\infty}\ln(2x^2+1)=\lim_{y\to+\infty}\ln(y)=+\infty$$

(par le résultat régissant les limites de fonctions de fonction), on se trouve dans le cas d'indétermination « ∞/∞ ». Pour lever cette indétermination, appliquons le théorème de l'Hospital à la fonction donnée. Vérifions les autres hypothèses de ce théorème.

Dans $V=]-\infty,-1[$, considérons $f:x\mapsto\ln(x^4-1)$ et $g:x\mapsto\ln(2x^2+1)$.

1) Ces deux fonctions sont dérivables sur V.

2) La fonction g est non nulle sur V. De même la dérivée de g, d'expression explicite $4x/(2x^2+1)$, est non nulle sur V.

3) De plus,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{Df(x)}{Dg(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3/(x^4-1)}{4x/2x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(2x^2+1)}{x^4-1}=2.$$

Les hypothèses sont donc vérifiées.

Il s'ensuit que la limite vaut

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^4-1)}{\ln(2x^2+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{Df(x)}{Dg(x)}=2.$$

(5.2) La fonction $x\mapsto|3x-1-2x^2|/(1-x)$ est définie sur

$$A=\{x\in\mathbb{R}:1-x\neq0\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Comme tout intervalle du type $]r,1[$ $(r<1)$ rencontre ce domaine, le calcul de la limite en 1^- peut donc être envisagé.

Cela étant, on obtient successivement

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\frac{|3x-1-2x^2|}{1-x}&=\lim_{x\to1^-}\frac{|1-x||2x-1|}{1-x}\\&=\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)|2x-1|}{1-x}\\&=\lim_{x\to1^-}|2x-1|\\&=1\end{aligned}$$

puisque si $x<1$, on a $|1-x|=1-x$.

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1)\ \int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{x^2-1}\,dx \qquad\qquad (6.2)\ \int_0^{+\infty}e^{-|1-x|}\,dx$$

Solution. **(6.1)** La fonction

$$f:x\mapsto\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

est continue sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$, donc sur l'intervalle fermé borné $[-1/2,1/2]$; elle est donc intégrable sur $[-1/2,1/2]$.

Cela étant, on a

$$\frac{1}{(x-1)\,(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1},\quad \forall x\notin\{-1,1\}$$

où A,B sont des constantes réelles à déterminer. On a alors successivement

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)\,(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1},\ \forall x\notin\{-1,1\} \quad &\Leftrightarrow\quad 1=A(x+1)+B(x-1),\ \forall x\notin\{-1,1\}\\ &\Leftrightarrow\quad 1=A(x+1)+B(x-1),\ \forall x\in\mathbb{R}(*)\\ &\Leftrightarrow\quad 1=(A+B)x+(A-B),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow\quad A+B=0 \text{ et } A-B=1\\ &\Leftrightarrow\quad A=1/2 \text{ et } B=-1/2\ ,\end{aligned}$$

donc finalement

$$\frac{1}{(x-1)\,(x+1)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)},\quad \forall x\notin\{-1,1\}$$

(justification (*) : une égalité entre polynômes de degré n en au moins $n+1$ réels implique une égalité en tout réel).

Sur $]-1,1[$, une primitive de f est donnée par

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-1}\,dx &= \int\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int\left(D\ln(1-x)-D\ln(x+1)\right)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int D\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)\,dx\\ &\simeq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right).\end{aligned}$$

(Cette partie d'exercice a été faite lors d'un cours théorique.)

Une intégration par variation de primitive fournit

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)\right]_{-1/2}^{1/2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1/2}{3/2}\right)-\ln\left(\frac{3/2}{1/2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)-\ln(3)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-2\ln(3)\right)\\ &= -\ln(3).\end{aligned}$$

(6.2) *(Cet exercice a été fait lors d'une répétition)* La fonction $f: x\mapsto e^{-|1-x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On doit donc examiner l'intégrabilité en $+\infty$. Pour cela, repassons à la définition : la fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$ si la limite suivante est finie

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t|f(x)|\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-|1-x|}\,dx.$$

Vu la définition de la valeur absolue, si $t>1$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-|1-x|}\,dx &= \int_0^1 e^{x-1}\,dx+\int_1^t e^{1-x}\,dx\\ &= \left[e^{x-1}\right]_0^1-\left[e^{1-x}\right]_1^t\\ &= e^0-e^{-1}-e^{1-t}+e^0\\ &= =2-\frac{1}{e}-e^{1-t}.\end{aligned}$$

Cela étant, on a $\lim_{t\to+\infty}(1-t) = -\infty$ et, vu le résultat régissant les limites des fonctions de fonction, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} e^{1-t} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

Dès lors, on obtient finalement

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-|1-x|}\, dx = 2 - \frac{1}{e} - \lim_{t\to+\infty} e^{1-t} = 2 - \frac{1}{e}.$$

Comme cette limite est finie, la fonction f est bien intégrable sur $[0, +\infty[$ et comme elle y est à valeurs positives, on obtient directement

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx \ = 2 - \frac{1}{e}.$$

<u>Question 7</u> Les expressions suivantes sont-elles <u>définies</u> ? Justifier.

$$(7.1)\text{arcos}\left(\frac{4\pi}{11}\right) \qquad (7.2)\cos\Big(\arcsin(\cos(3))\Big) \qquad (7.3)\ln\Big(\sin(6)\Big) \qquad (7.4)\arctan\Big(\ln(6)\Big)$$

Solution. (7.1) La fonction arcos est définie sur l'intervalle $[-1, 1]$; comme $4\pi/11$ n'est pas un réel de cet intervalle, l'expression donnée en (7.1) n'a pas de sens.

(7.2) La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$; comme $\cos(3) \in [-1, 1]$, l'expression donnée en (7.2) est bien définie.

(7.3) La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln sur $]0, +\infty[$. Comme $6 \in]\pi, 2\pi[$, on a $\sin(6) < 0$. Par conséquent l'expression donnée en (7.3) n'a pas de sens.

(7.4) La fonction ln est définie en tout réel strictement positif et la fonction arctangente est définie sur $\mathbb{R}$. Comme 6 est un réel strictement positif, l'expression donnée en (7.4) est bien définie.

<u>Question 8</u> Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - Df(x) = x.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

• L'équation homogène associée est $D^2 f - Df = 0$; le polynôme caractéristique est donc $z \mapsto z^2 - z = z(z-1)$ et ses zéros sont 0 et 1. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 + c_2 e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

• Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto x$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre g est l'exponentielle polynôme $x \mapsto x \times e^{0x}$, produit d'un polynôme de degré 1 et d'une exponentielle dont le coefficient 0 de la variable est zéro simple du polynôme caractéristique, une solution particulière est du type $f_P(x) = x(Ax + B)\, e^{0x} = Ax^2 + Bx\,,\ x \in \mathbb{R}$ où A et B sont des constantes à déterminer.

Comme

$$Df_P(x) = 2Ax + B \quad \text{et} \quad D^2 f_P(x) = 2A,$$

on obtient

$$D^2 f_P(x) - Df_P(x) = x \ \Leftrightarrow\ 2A - 2Ax - B = x \ \Leftrightarrow\ -2A = 1 \quad \text{et} \quad 2A - B = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad B = -1.$$

Ainsi, $f_P(x) = -x^2/2\, - x,\ x \in \mathbb{R}$.

• Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$c_1 + c_2 e^x - \frac{x^2}{2} - x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.