LIÈGE université
Sciences

Mathématiques générales I (MATH2007)

Année académique 2024-2025

Examen du 14 janvier 2025
Questionnaire et corrigé

Version 20 janvier 2025

Mathématiques générales I, MATH 2007

Questionnaire de l'examen du 14 janvier 2025

Consignes

- Compléter le tableau ci-dessous avant de ***rendre vos copies accompagnées de cette feuille***.
- Sur ***chaque*** feuille, indiquer vos ***NOM (en capitales, caractères d'imprimerie), votre prénom (en minuscules, sauf première lettre) et votre section***.
- ***Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées***.
- ***Justifier toutes vos réponses, SAUF celles du QCM***.
- Les calculatrices, montres connectées (style iWatch), gsm etc ... sont interdits.
- Le Journal de Bord est permis et sera fourni ***sur demande***.

NOM : ....

Prénom : ....

Matricule : ....

SECTION :................................

Signature :

Indiquer une CROIX dans la colonne correspondante pour les QUESTIONS OUVERTES AUXQUELLES VOUS NE REPONDEZ PAS.

Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Question 7	Question 8

QCM

Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

Théorie

(1) Soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}$. Si $\bullet$ désigne le produit scalaire et $\wedge$ désigne le produit vectoriel, laquelle des expressions suivantes représente-t-elle un vecteur orthogonal à $\vec{x}$?

(a) ☐ $\vec{x} \bullet \vec{v}$

(b) ☐ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{x}$

(c) ☐ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{x}$

(d) ☐ $\vec{u} \wedge (\vec{v} \bullet \vec{x})$

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

(a) ☐ Pour qu'une fonction soit continue, il est nécessaire qu'elle soit dérivable.

(b) ☐ Si une fonction est strictement décroissante, alors elle est injective.

(c) ☐ Pour qu'une fonction soit intégrable sur l'intervalle borné $[0, 1[$, il suffit qu'elle y soit continue.

(d) ☐ Si une fonction dérivable possède une dérivée nulle en un point, alors elle y possède un extremum.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Soient f et g deux fonctions définies sur $]0,+\infty[$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours correcte ?

(a) □ Si la limite en 0 des valeurs de f est finie et si celle des valeurs de g est infinie, alors la limite des valeurs du produit fg en 0 est infinie.

(b) □ Si $f \leq g$ et si la limite des valeurs de f en $+\infty$ est $+\infty$, alors il en est de même pour la limite des valeurs de g en $+\infty$.

(c) □ Si la limite des valeurs de f et de g en $+\infty$ est finie, alors il en est de même pour la limite des valeurs en $+\infty$ de leur quotient.

(d) □ Si la limite des valeurs de f en 0 n'existe pas, alors la limite des valeurs de $f+g$ en 0 n'existe pas non plus.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(4) Si une fonction continue sur un intervalle ouvert I est à valeurs positives, alors

(a) □ la fonction est croissante sur l'intervalle.

(b) □ toute primitive de f est croissante sur l'intervalle.

(c) □ la fonction est intégrable sur l'intervalle.

(d) □ la dérivée de la fonction est croissante sur l'intervalle.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(5) Dans un cas particulier, le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer comme suit : ≪ On considère une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]-1,2[$, à valeurs réelles. Si la limite de f en $(-1)^+$ est nulle et si la limite de f en 2^- vaut $-\infty$, alors *quel que soit le réel strictement négatif, il existe toujours un réel appartenant à* $]-1,2[$ *en lequel* f *prend la valeur du réel qu'on a fixé au départ.* ≫.

La partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit

(a) □ $\exists r \in]-1,2[$ tel que $f(r) = R \quad \forall R \in]-\infty,0[$.

(b) □ $\forall r \in]-1,2[,\ \exists R \in]-\infty,0[$ tel que $f(r) = R$.

(c) □ $\forall R \in]-\infty,0[,\ \exists r \in]-1,2[$ tel que $f(r) = R$.

(d) □ $\exists R \in]-\infty,0[$ tel que $f(r) = R \quad \forall r \in]-1,2[$.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices

(6) Que vaut $\cos(19\pi/3)$?

(a) □ $-\sqrt{3}/2$

(b) □ $-1/2$

(c) □ $1/2$

(d) □ $\sqrt{3}/2$

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Dans un repère orthonormé, soit la droite d'équation cartésienne $4x+2y+1=0$. Un vecteur directeur de cette droite a pour composantes

(a) □ $(2,1)$.

(b) □ $(1,2)$.

(c) □ $(-2,1)$.

(d) □ $(-1,2)$.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $\sin(2x)$, $x \in \mathbb{R}$ est la dérivée de la fonction

(a) □ $\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$.

(b) □ $\cos(2x)/2,\ x \in \mathbb{R}$.

(c) □ $2\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$.

(d) □ $\sin^2(x),\ x \in \mathbb{R}$.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1
Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs (en précisant bien la signification des notations utilisées).

Question 2
(2.1) Enoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.2) Enoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.3) En vous servant de la propriété que vous avez énoncée au point (2.1), démontrer la propriété que vous avez énoncée au point (2.2).
(2.4) Que signifie la notation $C_1(]0, +\infty[)$?
(2.5) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_1(]0, +\infty[)$.

Exercices

Question 3 *La dose d'une substance permettant d'améliorer la fixation de l'oxygène dans le sang dépend du poids de l'individu auquel le produit est administré. La dose à injecter est de 25 mg/10 kg.*
Dans la solution distribuée en pharmacie, la concentration de la substance est de 50 mg par ml. Quelle quantité (en ml) faut-il administrer à une personne qui pèse 75 kg ?

Question 4 (4.1) Si $w = 1 + 2i$, calculer la partie imaginaire et le module de $z = 1/(i - w)$.
(4.2) Résoudre l'inéquation $|1 - 2x| \leq -1/x$ en l'inconnue réelle x.
(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$2\cos^2(x) = \sin(2x).$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1)\quad \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{|x-1|}{x^2}\right) \qquad\qquad (5.2)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{\arcsin(x)}$$

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1)\quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x^3}\,dx \qquad\qquad (6.2)\quad \int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,dx$$

Question 7 Les expressions suivantes sont-elles **définies** ? Justifier.

$$(7.1)\,\mathrm{arcos}\left(\frac{-\pi}{5}\right) \qquad (7.2)\,\sin\left(\arcsin(\sqrt{2})\right) \qquad (7.3)\,\ln\left(\sin\left(\frac{9\pi}{7}\right)\right) \qquad (7.4)\,\cos\left(\ln\left((\sqrt{2})^{-2}\right)\right)$$

Question 8 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$4D^2 f(x) - f(x) = e^{x/2}.$$

Mathématiques générales I, MATH 2007

Corrigé de l'examen du mardi 14 janvier 2025

QCM

Théorie

(1) Soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}$. Si $\bullet$ désigne le produit scalaire et $\wedge$ désigne le produit vectoriel, laquelle des expressions suivantes représente-t-elle un vecteur orthogonal à $\vec{x}$?

(a) ☐ $\vec{x} \bullet \vec{v}$
(b) ☐ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{x}$
(c) ♣ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{x}$
(d) ☐ $\vec{u} \wedge (\vec{v} \bullet \vec{x})$
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

(a) ☐ Pour qu'une fonction soit continue, il est nécessaire qu'elle soit dérivable.
(b) ♣ Si une fonction est strictement décroissante, alors elle est injective.
(c) ☐ Pour qu'une fonction soit intégrable sur l'intervalle borné $[0, 1[$, il suffit qu'elle y soit continue.
(d) ☐ Si une fonction dérivable possède une dérivée nulle en un point, alors elle y possède un extremum.
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Soient f et g deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours correcte ?

(a) ☐ Si la limite en 0 des valeurs de f est finie et si celle des valeurs de g est infinie, alors la limite des valeurs du produit fg en 0 est infinie.
(b) ♣ Si $f \leq g$ et si la limite des valeurs de f en $+\infty$ est $+\infty$, alors il en est de même pour la limite des valeurs de g en $+\infty$.
(c) ☐ Si la limite des valeurs de f et de g en $+\infty$ est finie, alors il en est de même pour la limite des valeurs en $+\infty$ de leur quotient.
(d) ☐ Si la limite des valeurs de f en 0 n'existe pas, alors la limite des valeurs de $f + g$ en 0 n'existe pas non plus.
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(4) Si une fonction continue sur un intervalle ouvert I est à valeurs positives, alors

(a) ☐ la fonction est croissante sur l'intervalle.
(b) ♣ toute primitive de f est croissante sur l'intervalle.
(c) ☐ la fonction est intégrable sur l'intervalle.
(d) ☐ la dérivée de la fonction est croissante sur l'intervalle.
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(5) Dans un cas particulier, le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer comme suit :
≪ On considère une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]-1, 2[$, à valeurs réelles. Si la limite de f en $(-1)^+$ est nulle et si la limite de f en 2^- vaut $-\infty$, alors *quel que soit le réel strictement négatif, il existe toujours un réel appartenant à* $]-1, 2[$ *en lequel* f *prend la valeur du réel qu'on a fixé au départ.* ≫.

La partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit

(a) ☐ $\exists r \in]-1, 2[$ tel que $f(r) = R \quad \forall R \in]-\infty, 0[$.
(b) ☐ $\forall r \in]-1, 2[$, $\exists R \in]-\infty, 0[$ tel que $f(r) = R$.
(c) ♣ $\forall R \in]-\infty, 0[$, $\exists r \in]-1, 2[$ tel que $f(r) = R$.
(d) ☐ $\exists R \in]-\infty, 0[$ tel que $f(r) = R \quad \forall r \in]-1, 2[$.
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices

(6) Que vaut $\cos(19\pi/3)$?

(a) □ $-\sqrt{3}/2$
(b) □ $-1/2$
(c) ♣ $1/2$
(d) □ $\sqrt{3}/2$
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Dans un repère orthonormé, soit la droite d'équation cartésienne $4x+2y+1=0$. Un vecteur directeur de cette droite a pour composantes

(a) □ $(2,1)$.
(b) □ $(1,2)$.
(c) □ $(-2,1)$.
(d) ♣ $(-1,2)$.
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $\sin(2x)$, $x \in \mathbb{R}$ est la dérivée de la fonction

(a) □ $\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$.
(b) □ $\cos(2x)/2,\ x \in \mathbb{R}$.
(c) □ $2\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$.
(d) ♣ $\sin^2(x),\ x \in \mathbb{R}$.
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1
Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs (en précisant bien la signification des notations utilisées).

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours.*

Question 2
(2.1) Enoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.2) Enoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.3) En vous servant de la propriété que vous avez énoncée au point (2.1), démontrer la propriété que vous avez énoncée au point (2.2).
(2.4) Que signifie la notation $C_1(]0,+\infty[)$?
(2.5) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_1(]0,+\infty[)$.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours. NB : c'est une question de janvier 2024*

Exercices

Question 3 ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***
La dose d'une substance permettant d'améliorer la fixation de l'oxygène dans le sang dépend du poids de l'individu auquel le produit est administré. La dose à injecter est de 25 mg/10 kg. Dans la solution distribuée en pharmacie, la concentration de la substance est de 50 mg par ml. Quelle quantité (en ml) faut-il administrer à une personne qui pèse 75 kg ?

Exemple de résolution. Soit x le nombre de ml de la dose à injecter à une personne de 75 kg. On doit donc injecter $25 \times 7,5$ mg de substance. Comme la concentration de la substance est de 50 mg par ml, on a donc $50x = 25 \times 7,5$. Cela donne
$$x = \frac{25 \times 75}{50 \times 10} = 3,75.$$
On doit donc injecter $3,75$ ml.

Question 4

(4.1) Si $w = 1 + 2i$, calculer la partie imaginaire et le module de $z = 1/(i - w)$.

Solution. On a
$$z = \frac{1}{i - (1 + 2i)} = \frac{1}{-1 - i} = \frac{-1 + i}{2}.$$
Dès lors la partie imaginaire de z vaut $1/2$ et son module vaut
$$|z| = \frac{|-1 + i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(4.2) Résoudre l'inéquation $|1 - 2x| \leq -1/x$ en l'inconnue réelle x.

Solution. Comme x est au dénominateur, on ne doit pas considérer le cas $x = 0$. De plus, comme la valeur absolue d'un réel est un réel positif, le membre de gauche est positif. Vu le type d'inégalité, le membre de droite doit donc l'être aussi et, dès lors, les solutions doivent être cherchées parmi les réels strictement négatifs.

Cela étant, pour $x < 0$ on a toujours $|1 - 2x| = 1 - 2x$; il s'ensuit que pour $x < 0$, on a
$$|1 - 2x| \leq -1/x \;\Leftrightarrow\; 1 - 2x \leq -1/x \;\Leftrightarrow\; -x\,(1 - 2x) \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - x - 1 \leq 0.$$
Le discriminant du polynôme $x \mapsto 2x^2 - x - 1$ est égal à $1 + 8 = 9$; les zéros de ce polynôme sont donc les réels $(1 + 3)/4 = 1$ et $(1 - 3)/4 = -1/2$.

Il s'ensuit que les solutions de l'inéquation de départ sont les réels de l'intervalle $[-1/2, 0[$.

(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x
$$2\cos^2(x) = \sin(2x).$$
Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Solution. On a successivement
$$\begin{aligned} 2\cos^2(x) = \sin(2x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2(x) = \sin(x)\,\cos(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = \sin(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \end{aligned}$$
Cela étant, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont les réels $-3\pi/4, -\pi/2, \pi/4, \pi/2$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1) \quad \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{|x - 1|}{x^2}\right) \qquad\qquad (5.2) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{\arcsin(x)}$$

Solution. **(5.1)** La fonction
$$x \mapsto \ln\left(\frac{|x - 1|}{x^2}\right)$$
est définie sur
$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ et } x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$
Puisque cet ensemble n'est pas minoré, le calcul de la limite en $-\infty$ peut être envisagé.

Cela étant, si $x < 1$, on a $|x - 1| = 1 - x$ donc on obtient directement, par le résultat régissant les limites de fonctions de fonction
$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{|x - 1|}{x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{1 - x}{x^2}\right) = \lim_{y \to 0^+} \ln(y) = -\infty$$
puisque $\lim_{x \to -\infty}(1 - x)/x^2 = 0^+$.

(5.2) La fonction dont on doit étudier la limite en 0 est définie sur $A = [-1, 0[\cup]0, 1]$. Comme tout intervalle centré en 0 rencontre cet ensemble, la limite peut être envisagée.

Cela étant, comme $\lim_{x \to 0} \arctan(x) = 0 = \lim_{x \to 0} \arcsin(x)$, on se trouve dans le cas d'indétermination « $0/0$ ». Pour lever cette indétermination, appliquons le théorème de l'Hospital à la fonction donnée. Vérifions les autres hypothèses de ce théorème.

Dans $V =]-1,0[\cup]0,1[$, considérons $f : x \mapsto \arctan(x)$ et $g : x \mapsto \arcsin(x)$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables sur V.
2) La fonction g est non nulle sur V. De même la dérivée de g, d'expression explicite $(\sqrt{1-x^2})^{-1}$, est non nulle sur V.
3) De plus,

$$\lim_{x\to 0} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(x^2+1)}{1/\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1} = 1.$$

Les hypothèses sont donc vérifiées. Il s'ensuit que la limite vaut

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{\arcsin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = 1.$$

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1) \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-x^3}\, dx \qquad\qquad (6.2) \quad \int_0^{\pi/2} x\sin(x)\, dx$$

Solution. **(6.1)** La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2-x^3} = \frac{1}{x^2\,(1-x)}$$

est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$, donc sur l'intervalle $[2,+\infty[$. On doit donc examiner l'intégrabilité en $+\infty$. Pour cela, repassons à la définition : la fonction est intégrable sur $[2,+\infty[$ si la limite suivante est finie

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t |f(x)|\; dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x^2\,(x-1)}\; dx.$$

Cela étant, on a

$$\frac{1}{x^2\,(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}, \quad \forall x \notin \{0,1\}$$

où A, B, C sont des constantes réelles à déterminer. On a alors successivement

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2\,(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1},\ \forall x \notin \{0,1\} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2,\ \forall x \notin \{0,1\}\\
&\Leftrightarrow \quad 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2,\ \forall x \in \mathbb{R}(*)\\
&\Leftrightarrow \quad 1 = (A+C)x^2 + (-A+B)x - B,\ \forall x \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \quad B = -1 \text{ et } -A+B = 0 \text{ et } A+C = 0\\
&\Leftrightarrow \quad B = -1 \text{ et } A = -1 \text{ et } C = 1,
\end{aligned}$$

donc finalement

$$\frac{1}{x^2\,(x-1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}, \quad \forall x \notin \{0,1\}$$

(justification (*) : une égalité entre polynômes de degré n en au moins $n+1$ réels implique une égalité en tout réel).

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int_2^t \frac{1}{x^2\,(x-1)}\; dx \quad &= \quad \int_2^t \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}\right)\; dx\\
&= \quad \int_2^t \left(-D\ln(x) + D\frac{1}{x} + D\ln(x-1)\right)\; dx\\
&= \quad \int_2^t \left(D\frac{1}{x} + D\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)\; dx\\
&= \quad \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{t-1}{t}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \quad \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{t-1}{t}\right) + \ln(2).
\end{aligned}$$

Cela étant, on a $\lim_{t\to+\infty} 1/t = 0$ et, vu le résultat régissant les limites des fonctions de fonction, on a aussi

$$\lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{t-1}{t}\right) = \lim_{y\to 1} \ln(y) = 0.$$

Dès lors, on obtient finalement

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x^2\,(x-1)} = -\frac{1}{2} + \ln(2).$$

Comme cette limite est finie, la fonction f est bien intégrable sur $[2,+\infty[$ et comme elle y est à valeurs négatives, on obtient directement

$$\int_2^{+\infty} f(x)\ dx \ = \ -\int_2^{+\infty} |f(x)|\ dx \ = \ \frac{1}{2} - \ln(2).$$

(6.2) La fonction $f : x \mapsto x\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle fermé borné $[0,\pi/2]$; elle est donc intégrable sur $[0,\pi/2]$.

Cela étant, par une intégration par parties (toutes les fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on intègre sur un intervalle fermé borné) puis par une variation de primitives, on obtient directement

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x\,\sin(x)\ dx \ &= \ -\int_0^{\pi/2} x\,D\cos(x)\ dx\\ &= \ -0+0+\int_0^{\pi/2} \cos(x)\ dx\\ &= \ \sin(\pi/2)-\sin(0) = 1.\end{aligned}$$

Question 7 Les expressions suivantes sont-elles définies ? Justifier.

$$(7.1)\arccos\left(\frac{-\pi}{5}\right) \qquad (7.2)\sin\left(\arcsin(\sqrt{2})\right) \qquad (7.3)\ln\left(\sin\left(\frac{9\pi}{7}\right)\right) \qquad (7.4)\cos\left(\ln\left((\sqrt{2})^{-2}\right)\right)$$

Solution. (7.1) La fonction arcos est définie sur l'intervalle $[-1,1]$; comme $-\pi/5$ est un réel de cet intervalle, l'expression donnée en (7.1) est bien définie.

(7.2) La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$; comme $\sqrt{2}$ n'appartient pas à cet intervalle, l'expression donnée en (7.2) n'a pas de sens.

(7.3) La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln sur $]0,+\infty[$. Comme $9\pi/7 \in]\pi,2\pi[$, on a $\sin(9\pi/7) < 0$. Par conséquent l'expression donnée en (7.3) n'a pas de sens.

(7.4) La fonction ln est définie en tout réel strictement positif et la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$. Comme $(\sqrt{2})^{-2}$ est un réel strictement positif, l'expression donnée en (7.4) est bien définie.

Question 8 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$4D^2 f(x) - f(x) = e^{x/2}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

• L'équation homogène associée est $4D^2 f - f = 0$; le polynôme caractéristique est donc $z \mapsto 4z^2-1 = (2z-1)\,(2z+1)$ et ses zéros sont $-1/2$ et $1/2$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{x/2},\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

• Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto e^{x/2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre g est l'exponentielle polynôme $x \mapsto 1\times e^{x/2}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient $1/2$ de la variable est zéro simple du polynôme caractéristique, une solution particulière est du type $f_P(x) = A\,x\,e^{x/2},\ x\in\mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.

Comme

$$Df_P(x) = Ae^{x/2} + \frac{A}{2}xe^{x/2} \quad \text{et} \quad D^2 f_P(x) = \frac{A}{2}e^{x/2} + \frac{A}{2}e^{x/2} + \frac{A}{4}xe^{x/2} = Ae^{x/2} + \frac{A}{4}xe^{x/2},$$

on obtient

$$4D^2 f_P(x) - f_P(x) = e^{x/2} \;\Leftrightarrow\; 4Ae^{x/2} + Axe^{x/2} - Axe^{x/2} = e^{x/2} \;\Leftrightarrow\; 4Ae^{x/2} = e^{x/2} \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $f_P(x) = xe^{x/2}/4,\ x \in \mathbb{R}$.

• Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{x/2} + \frac{x}{4} e^{x/2},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.