Mathématiques générales I (MATH2007)

Année académique 2023-2024

Examen du 27 août 2024
Questionnaire et corrigé

Version 25 juin 2024

Mathématiques générales I, MATH2007
Examen du 27 août 2024, 08h30-11h45, A304

Consignes

— ***Compléter*** le tableau ci-dessous avant de rendre vos copies accompagnées des feuilles du questionnaire.
— Sur ***chaque*** feuille, indiquer vos **NOM** (en caractères d'imprimerie majuscule), prénom et section (en minuscule). Merci de soigner l'écriture pour que cela soit lisible !
— Répondre aux différentes questions sur des ***feuilles séparées***.
— ***Justifier toutes vos réponses***.
— Les calculatrices, montres connectées (style iWatch), gsm etc ... sont interdits.
— Le Journal de Bord est permis et sera fourni ***sur demande***.

NOM : ....
Prénom : .... SECTION : ....
Matricule :........................

Signature :

Indiquer une CROIX dans la colonne correspondante
pour les QUESTIONS OUVERTES
AUXQUELLES VOUS NE REPONDEZ PAS.

Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Question 7	Question 8

QCM

Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0
Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

Théorie

(1) On donne la droite d'équation cartésienne $2\beta x + \alpha y + \gamma = 0$ où α, β, γ sont des réels avec α, β non simultanément nuls. Les composantes d'un vecteur directeur de cette droite sont
☐ $(-2\beta, \alpha)$.
☐ $(2\beta, \alpha)$.
☐ $(\alpha, -2\beta)$.
☐ $(\alpha, 2\beta)$.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est **fausse** ?
☐ Pour qu'une fonction soit continue, il est suffisant qu'elle soit dérivable.
☐ Si une fonction est strictement décroissante, alors elle est injective.
☐ Pour qu'une fonction soit intégrable sur l'intervalle $[0, 1[$, il suffit qu'elle y soit continue.
☐ Pour qu'une fonction dérivable possède un extrémum en un point il est nécessaire que sa dérivée s'y annule.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Si f, g sont deux fonctions telles que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et si $g(x)$ appartient au domaine de définition de f quel que soit le réel x du domaine de définition de g, alors
☐ $\lim_{x\to-\infty} g(f(x)) = 3$.

☐ $\lim_{x\to-\infty} f(g(x)) = 3$.
☐ $\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = 3$.
☐ $\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = 3$.
☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

(4) Soient f, g deux fonctions définies sur $]0,1]$. Si la limite des valeurs de f en 0^+ est infinie et si la limite des valeurs de g en 0^+ est un réel alors la limite des valeurs du quotient g/f en 0^+
☐ est toujours un réel non nul.
☐ est toujours nulle.
☐ n'est jamais infinie.
☐ est toujours infinie.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(5) Le théorème des accroissements finis peut s'énoncer comme suit :
≪ On considère une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$, à valeurs réelles. *Alors quels que soient les réels distincts α, β de cet intervalle, il existe un réel z compris strictement entre α et β tel que la tangente au graphique de f au point d'abscisse z soit parallèle à la droite passant par les points du graphique d'abscisses respectives α et β.* ≫.
La partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit
☐ $\exists z \in]\beta, \alpha[$ ou $z \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(\alpha) = f(\beta) + (\alpha - \beta)\, Df(z), \quad \forall \alpha, \beta \in]a, b[$
☐ $\forall \alpha, \beta \in]a, b[$, on a $f(\alpha) = f(\beta) + (\alpha - \beta)\, Df(z), \quad \forall z \in]\beta, \alpha[$ ou $z \in]\alpha, \beta[$
☐ $\forall \alpha, \beta \in]a, b[, \exists z \in]\beta, \alpha[$ ou $z \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(\alpha) = f(\beta) + (\beta - \alpha)\, Df(z)$
☐ $\forall \alpha, \beta \in]a, b[, \exists z \in]\beta, \alpha[$ ou $z \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(\alpha) = f(\beta) + (\alpha - \beta)\, Df(z)$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Exercices

(6) Que vaut $\cos(19\pi/6)$?
☐ $-\sqrt{3}/2$
☐ $-1/2$
☐ $1/2$
☐ $\sqrt{3}/2$
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Soit l'équation cartésienne $(x + r)^2 + y - (x - r)^2 = 1$ où r est un réel non nul fixé. Il s'agit de l'équation
☐ d'un cercle.
☐ d'une ellipse.
☐ d'une parabole.
☐ d'une droite.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $\sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est une primitive de
☐ $2\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$.
☐ $\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$.
☐ $-\cos^3(x)/3,\ x \in \mathbb{R}$.
☐ $\sin^3(x)/3,\ x \in \mathbb{R}$.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1

(1.1) Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs, en précisant bien ce que les notations signifient.

(1.2) Dans une base orthonormée du plan, donner l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs, en précisant bien ce que les notations signifient.

Question 2

(2.1) Enoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit.

(2.2) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$.

(2.3) Qu'appelle-t-on zéro d'un polynôme ?

(2.4) En vous servant du théorème des valeurs intermédiaires énoncé au point (2.2) et de la définition donnée au point (2.3), démontrer que tout polynôme à variable et coefficients réels de degré impair possède toujours au moins un zéro réel.

(2.5) Soit une fonction f définie sur $]0, +\infty[$. Quand dit-on que la fonction est dérivable en 1 ? Qu'appelle-t-on alors dérivée de f au point 1 ?

Exercices

Question 3 ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***

Une marchande a un panier de poires qu'elle vend à trois personnes A, B, C. La personne A prend la moitié plus une, la personne B la moitié du reste et la personne C les deux tiers du nouveau reste. Il reste alors six poires dans le panier. Combien de poires contenait initialement le panier ?

Question 4

(4.1) Si $w = 1 - 2i$, calculer la partie imaginaire ainsi que le module de $z = w/(i - w)$.

(4.2) Résoudre l'inéquation $1/|x| \leq -x$ en l'inconnue réelle x.

(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$\sin(2x) + \cos(2x) = 1.$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, 0]$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1) \quad \lim_{x \to +\infty} \Big(x \, \exp(-3x) \Big) \qquad\qquad (5.2) \quad \lim_{x \to 1/2^+} \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{|1 - 2x|}$$

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1) \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x - 2} \, dx \qquad\qquad (6.2) \quad \int_{-\pi/3}^{\pi/6} \cos(x) \, \sin(x) \, dx$$

Question 7

Les expressions suivantes sont-elles **définies** ? Justifier.

$$(7.1) \sin\left(\arccos\left(\frac{-\pi}{7}\right)\right) \qquad (7.2) \ln\left(\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right) \qquad (7.3) \cos\left(\arctan(3)\right) \qquad (7.4) \sqrt{\ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^{-2}\right)}$$

Question 8 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) + f(x) = 2e^{-x}.$$

Mathématiques générales I, MATH 2007

Corrigé de l'examen du mardi 27 août 2024

QCM

Théorie

(1) On donne la droite d'équation cartésienne $2\beta x + \alpha y + \gamma = 0$ où α, β, γ sont des réels avec α, β non simultanément nuls. Les composantes d'un vecteur directeur de cette droite sont
☐ $(-2\beta, \alpha)$.
☐ $(2\beta, \alpha)$.
♣ $(\alpha, -2\beta)$.
☐ $(\alpha, 2\beta)$.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est **fausse** ?
☐ Pour qu'une fonction soit continue, il est suffisant qu'elle soit dérivable.
☐ Si une fonction est strictement décroissante, alors elle est injective.
♣ Pour qu'une fonction soit intégrable sur l'intervalle $[0,1[$, il suffit qu'elle y soit continue.
☐ Pour qu'une fonction dérivable possède un extrémum en un point il est nécessaire que sa dérivée s'y annule.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Si f, g sont deux fonctions telles que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et si $g(x)$ appartient au domaine de définition de f quel que soit le réel x du domaine de définition de g, alors
☐ $\lim_{x\to-\infty} g(f(x)) = 3$.
☐ $\lim_{x\to-\infty} f(g(x)) = 3$.
☐ $\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = 3$.
♣ $\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = 3$.
☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

(4) Soient f, g deux fonctions définies sur $]0,1]$. Si la limite des valeurs de f en 0^+ est infinie et si la limite des valeurs de g en 0^+ est un réel alors la limite des valeurs du quotient g/f en 0^+
☐ est toujours un réel non nul.
♣ est toujours nulle.
☐ n'est jamais infinie.
☐ est toujours infinie.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(5) Le théorème des accroissements finis peut s'énoncer comme suit :
≪ On considère une fonction dérivable sur un intervalle $]a,b[$, à valeurs réelles. *Alors quels que soient les réels distincts α, β de cet intervalle, il existe un réel z compris strictement entre α et β tel que la tangente au graphique de f au point d'abscisse z soit parallèle à la droite passant par les points du graphique d'abscisses respectives α et β.* ≫.
La partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit
☐ $\exists z \in]\beta, \alpha[$ ou $z \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(\alpha) = f(\beta) + (\alpha - \beta)\, Df(z), \quad \forall \alpha, \beta \in]a, b[$
☐ $\forall \alpha, \beta \in]a, b[$, on a $f(\alpha) = f(\beta) + (\alpha - \beta)\, Df(z), \quad \forall z \in]\beta, \alpha[$ ou $z \in]\alpha, \beta[$
☐ $\forall \alpha, \beta \in]a, b[, \exists z \in]\beta, \alpha[$ ou $z \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(\alpha) = f(\beta) + (\beta - \alpha)\, Df(z)$
♣ $\forall \alpha, \beta \in]a, b[, \exists z \in]\beta, \alpha[$ ou $z \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(\alpha) = f(\beta) + (\alpha - \beta)\, Df(z)$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Exercices

(6) Que vaut $\cos(19\pi/6)$?

♣ $-\sqrt{3}/2$

☐ $-1/2$

☐ $1/2$

☐ $\sqrt{3}/2$

☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Soit l'équation cartésienne $(x+r)^2 + y - (x-r)^2 = 1$ où r est un réel non nul fixé. Il s'agit de l'équation

☐ d'un cercle.

☐ d'une ellipse.

☐ d'une parabole.

♣ d'une droite.

☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $\sin^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est une primitive de

☐ $2\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$.

♣ $\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$.

☐ $-\cos^3(x)/3,\ x \in \mathbb{R}$.

☐ $\sin^3(x)/3,\ x \in \mathbb{R}$.

☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1

(1.1) Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs, en précisant bien ce que les notations signifient.

(1.2) Dans une base orthonormée du plan, donner l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs, en précisant bien ce que les notations signifient.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours. Remarque : c'est exactement la même question qu'en juin 2024.*

Question 2

(2.1) Enoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit.

(2.2) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$.

(2.3) Qu'appelle-t-on zéro d'un polynôme ?

(2.4) En vous servant du théorème des valeurs intermédiaires énoncé au point (2.2) et de la définition donnée au point (2.3), démontrer que tout polynôme à variable et coefficients réels de degré impair possède toujours au moins un zéro réel.

(2.5) Soit une fonction f définie sur $]0, +\infty[$. Quand dit-on que la fonction est dérivable en 1 ? Qu'appelle-t-on alors dérivée de f au point 1 ?

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours. Remarque : la question 2.1 est la même qu'en juin 2024.*

Exercices

Question 3 ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***

Une marchande a un panier de poires qu'elle vend à trois personnes A, B, C. La personne A prend la moitié plus une, la personne B la moitié du reste et la personne C les deux tiers du nouveau reste. Il reste alors six poires dans le panier. Combien de poires contenait initialement le panier ?

Exemple de résolution. Soit x le nombre total de poires de la marchande, c'est ce que l'on doit trouver. Cela étant, l'énoncé se traduit comme suit.

- Le nombre de poires achetées par la personne A est égal à $x/2 + 1$; dans le panier, il reste donc $x - (x/2 + 1) = x/2 - 1$ poires.
- La personne B achète alors $(1/2)(x/2 - 1) = x/4 - 1/2$ poires. Il reste alors $x/2 - 1 - (x/4 - 1/2) = x/4 - 1/2$

poires et
• la personne C achète donc $(2/3)(x/4-1/2)=x/6-1/3$ poires.
Dès lors, on a l'équation suivante

$$\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}-\frac{1}{2}+\frac{x}{6}-\frac{1}{3}+6=x.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par 12, on obtient

$$6x+12+3x-6+2x-4+72=12x$$

c'est-à-dire

$$11x+74=12x$$

donc finalement $x=74$.

Ainsi, le panier de la marchande contenait initialement 74 poires.

Question 4

(4.1) Si $w=1-2i$, calculer la partie imaginaire ainsi que le module de $z=w/(i-w)$.

Solution. On a successivement

$$\begin{aligned} z &= \frac{1-2i}{i-1+2i} \\ &= \frac{1-2i}{-1+3i} \\ &= \frac{(1-2i)(-1-3i)}{1+9} \\ &= \frac{-7-i}{10}. \end{aligned}$$

Dès lors, son module et sa partie imaginaire valent respectivement

$$|z|=\frac{\sqrt{49+1}}{10}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \Im(z)=\frac{-1}{10}.$$

(4.2) Résoudre l'inéquation $1/|x|\leq -x$ en l'inconnue réelle x.

Solution. Comme x est au dénominateur, on ne doit pas considérer le cas $x=0$. De plus, comme la valeur absolue d'un réel est un réel positif, le membre de gauche est positif.

Cela étant, si $x>0$ le membre de droite est négatif donc l'inéquation n'est jamais vérifiée.

Pour $x<0$, on a alors les équivalences suivantes

$$\frac{1}{|x|}\leq -x \Leftrightarrow \frac{-1}{x}\leq -x \Leftrightarrow \frac{1}{x}\geq x \Leftrightarrow 1\leq x^2 \Leftrightarrow x\leq -1.$$

Les solutions de l'inéquation donnée sont donc les réels de l'ensemble

$$]-\infty,-1].$$

(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$\sin(2x)+\cos(2x)=1.$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi,0]$.

Solution. Quel que soit le réel x, on a $\cos(2x)=1-2\sin^2(x)$ et $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$. Dès lors

$$\begin{aligned} \sin(2x)+\cos(2x)=1 &\Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x)+1-2\sin^2(x)=1 \\ &\Leftrightarrow \sin(x)(\cos(x)-\sin(x))=0 \\ &\Leftrightarrow \sin(x)=0 \text{ ou } \sin(x)=\cos(x) \\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}: x=k\pi \text{ ou } \exists k\in\mathbb{Z}: x=\frac{\pi}{4}+k\pi. \end{aligned}$$

Cela étant, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi,0]$ sont les réels $-\pi,\ -3\pi/4$ et 0.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1)\quad \lim_{x\to+\infty}\Big(x\,\exp(-3x)\Big) \qquad\qquad (5.2)\quad \lim_{x\to 1/2^+}\frac{\sqrt{4x^2-1}}{|1-2x|}$$

Solution. **(5.1)** La fonction $x\mapsto x\,\exp(-3x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Puisque cet ensemble n'est pas majoré, le calcul de la limite en $+\infty$ peut être envisagé.

D'une part, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty.$$

D'autre part, comme on a

$$\lim_{x\to+\infty}(-3x)=-\infty \text{ et } \lim_{z\to-\infty}\exp(z)=0^+,$$

le théorème des limites des fonctions de fonction permet d'obtenir

$$\lim_{x\to+\infty}\exp(-3x)=0^+.$$

Pour lever l'indétermination ≪ $+\infty\times 0$ ≫, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées en considérant la fonction sous la forme $x/\exp(3x)$.

En effet, dans $V=]0,+\infty[$, considérons $f:x\mapsto x$ et $g:x\mapsto\exp(3x)$.
- Ces deux fonctions sont dérivables sur V et à valeurs réelles.
- L'expression explicite de la dérivée de g est $3\exp(3x)$ donc est non nulle sur V.
- De plus, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Df(x)}{Dg(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3\exp(3x)}=0,$$

puisque $\lim_{x\to+\infty}(3\exp(3x))=+\infty$.

Les hypothèses du théorème de l'Hospital sont donc vérifiées. Il s'ensuit que la limite vaut

$$\lim_{x\to+\infty}(x\exp(-3x))=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\exp(3x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{Df(x)}{Dg(x)}=0.$$

On pourrait même préciser $\lim_{x\to+\infty}(x\exp(-3x))=0^+$.

(5.2) La fonction

$$x\mapsto\frac{\sqrt{4x^2-1}}{|1-2x|}$$

est définie sur $]-\infty,-1/2]\cup]1/2,+\infty[$. Comme tout intervalle du type $]1/2,r[$ $(r>1/2)$ rencontre ce domaine, le calcul de la limite en $(1/2)^+$ peut donc être envisagé.

Si $x>1/2$ alors $|1-2x|=2x-1=(\sqrt{2x-1})^2$ et $\sqrt{4x^2-1}=\sqrt{2x-1}\,\sqrt{2x+1}$. Dès lors, on lève l'indétermination $0/0$ en simplifiant la fraction par $\sqrt{2x-1}$ et on a

$$\lim_{x\to1/2^+}\frac{\sqrt{4x^2-1}}{|1-2x|}=\lim_{x\to1/2^+}\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x-1}}$$

Comme

$$\lim_{x\to1/2^+}\sqrt{2x+1}=\sqrt{2}\quad\text{ et }\quad\lim_{x\to1/2^+}\sqrt{2x-1}=0^+$$

la limite demandée vaut $+\infty$.

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1)\quad\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+x-2}\,dx \qquad\qquad (6.2)\quad\int_{-\pi/3}^{\pi/6}\cos(x)\,\sin(x)\,dx$$

Solution. **(6.1)** La fonction $f:x\mapsto 1/(x^2+x-2)=1/((x+2)(x-1))$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ donc sur $[2,+\infty[$, ensemble non borné. On peut vérifier l'intégrabilité en $+\infty$ en utilisant la définition ; comme la fonction est à valeurs positives sur l'intervalle donné, on obtiendra tout de suite la valeur de l'intégrale.

Décomposons la fraction donnée en une somme de fractions simples ; on a

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\},$$

ce qui donne $A=-1/3$ et $B=1/3$.

Pour tout $t>2$, la fonction $x\mapsto(1/3)\left(-1/(x+2)+1/(x-1)\right)$, continue sur $[2,t]$, est intégrable sur $[2,t]$ et on a

$$\frac{1}{3}\int_2^t\left(\frac{-1}{x+2}+\frac{1}{x-1}\right)\,dx=\frac{1}{3}\Big[\ln(x-1)-\ln(x+2)\Big]_2^t=\frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]_2^t=\frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{t-1}{t+2}\right)-\ln\left(\frac{1}{4}\right)\right].$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{(x+2)(x-1)}\,dx=\frac{1}{3}\left[\lim_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{t-1}{t+2}\right)+\ln(4)\right]=\frac{2\ln(2)}{3},$$

l'application du théorème des limites des fonctions de fonction donnant

$$\lim_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{t-1}{t+2}\right)=\lim_{y\to1}\ln(y)=0.$$

Comme la fonction $x\mapsto1/(x^2+x-2)$ est à valeurs positives sur $[2,+\infty[$ et que la limite précédente est finie, la fonction est intégrable et la valeur de son intégrale sur $[2,+\infty[$ vaut $2\ln(2)/3$.

(6.2) La fonction $f:x\mapsto\cos(x)\ \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle fermé borné $[-\pi/3,\pi/6]$; elle est donc intégrable sur cet ensemble.

Par une intégration par substitution, on a successivement

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/3}^{\pi/6}\cos(x)\ \sin(x)\ dx &= \int_{-\pi/3}^{\pi/6}\sin(x)\ D(\sin(x))\ dx\\ &= \left[\frac{\sin^2(x)}{2}\right]_{-\pi/3}^{\pi/6}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sin^2(\pi/6)-\sin^2(-\pi/3)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)\\ &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

On pourrait également calculer l'intégrale en utilisant la trigonométrie puisque $\sin(x)\ \cos(x)=(1/2)\sin(2x)$ et que

$$\int\sin(2x)\ dx\simeq(-1/2)\cos(2x).$$

Question 7 Les expressions suivantes sont-elles définies ? Justifier.

$$(7.1)\sin\left(\arccos\left(\frac{-\pi}{7}\right)\right)\qquad(7.2)\ln\left(\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right)\qquad(7.3)\cos\left(\arctan(3)\right)\qquad(7.4)\sqrt{\ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^{-2}\right)}$$

Solution. **(7.1)** La fonction arcosinus est définie sur $[-1,1]$ et la fonction sinus est définie sur R. Comme $-1\le-\pi/7\le1$, la première expression est définie.

(7.2) Les fonctions sinus et ln sont définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0,+\infty[$ et l'ensemble image de la fonction sinus est $[-1,1]$. Comme $9\pi/5$ est la mesure d'un angle du quatrième quadrant, son sinus est strictement négatif. L'expression donnée n'est donc pas définie.

(7.3) Les fonctions arctangente et cosinus étant définies sur $\mathbb{R}$, l'expression donnée est définie.

(7.4) Les fonctions racine carrée et ln sont définies respectivement sur $[0,+\infty[$ et $]0,+\infty[$. Comme $(\sqrt{2})^{-2}=1/\sqrt{2}^2=1/2$, on a $\ln(\sqrt{2})^{-2}=\ln(1/2)=\ln(1)-\ln(2)=-\ln(2)<0$ puisque $\ln(1)=0$. L'expression donnée n'est donc pas définie.

Question 8 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) + f(x) = 2e^{-x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

L'équation homogène associée est $D^2 f + f = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$ et ses zéros sont $-i$ et i. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto 2e^{-x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Le second membre de l'équation $D^2 f(x) + f(x) = 2e^{-x} (*)$ est l'exponentielle polynôme $x \mapsto 2 \times e^{-x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient -1 de la variable n'est pas un zéro du polynôme caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = A\, e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.

Comme

$$Df_P(x) = -Ae^{-x} \text{ et } D^2 f_P(x) = Ae^{-x},$$

en remplaçant dans $(*)$, on a

$$Ae^{-x} + Ae^{-x} = 2e^{-x} \Leftrightarrow A = 1.$$

Ainsi, $f_P(x) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix} + e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.