1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2018-2019

Corrigé de l'examen de mathématique du 28 mai 2019

Version 11 mai 2019

QUESTIONNAIRE

Théorie

Théorie 1.
Quelle est la définition géométrique du produit vectoriel ?

Théorie 2.
Si deux fonctions sont dérivables dans un même intervalle ouvert, alors leur produit est dérivable dans cet intervalle. Démontrer cette propriété et donner l'expression de la dérivée du produit qui utilise la dérivée des facteurs.

Théorie 3.
(a) Enoncer le théorème des accroissements finis sur un ouvert en toute généralité.
(b) Appliquer ce théorème au cas de la fonction $x \mapsto \ln(-x)$.
(c) Tracer le graphique de cette fonction dans un repère orthonormé et donner une interprétation graphique du théorème.

Exercices

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$1 - |2x^2 - |x^4|| = 0.$$

   (b) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation suivante

$$\cos(4x) - \sin(2x) = 1.$$

   (c) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\ln\left(-\sqrt[3]{e}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

   (d) Déterminer le module et la partie imaginaire du complexe suivant et le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)

$$z = \frac{i^{99}}{1-\sqrt{3}\,i}.$$

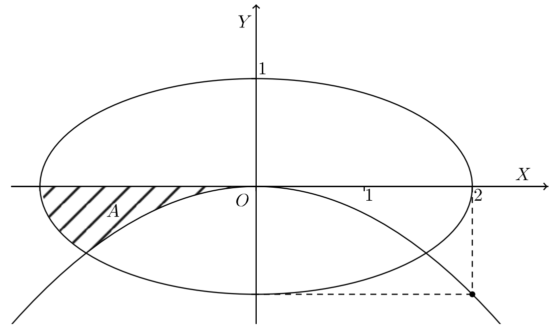
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(a)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^3-1} \qquad\qquad (b)\ \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\arcsin(\sqrt{1-x^2})}{x+1}$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(a)\ \int_{-1}^{3} \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx \qquad\qquad (b)\ \int_{0}^{+\infty} (x-1)\,e^{-x}\,dx$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole et l'autre est une ellipse.)



5. (a) Si la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x^2+1}$ vérifie l'équation différentielle

$$f(x)\,D^2f(x) + (Df(x))^2 = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

que vaut $g(x)$?

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$2D^2f(x) - 5Df(x) + 2f(x) = \frac{1-x}{e^x}.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.

William tond le gazon de son jardin en 90 minutes mais son voisin Jules peut le faire en une heure avec sa tondeuse personnelle. Aujourd'hui, William tond depuis 10 minutes quand Jules vient l'aider ; ils finissent la tonte ensemble avec leur propre tondeuse. Combien de temps a-t-il fallu pour que toute la pelouse soit tondue ?

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.
Quelle est la définition géométrique du produit vectoriel ?

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 2.
Si deux fonctions sont dérivables dans un même intervalle ouvert, alors leur produit est dérivable dans cet intervalle. Démontrer cette propriété et donner l'expression de la dérivée du produit qui utilise la dérivée des facteurs.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 3.
(a) Enoncer le théorème des accroissements finis sur un ouvert en toute généralité.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

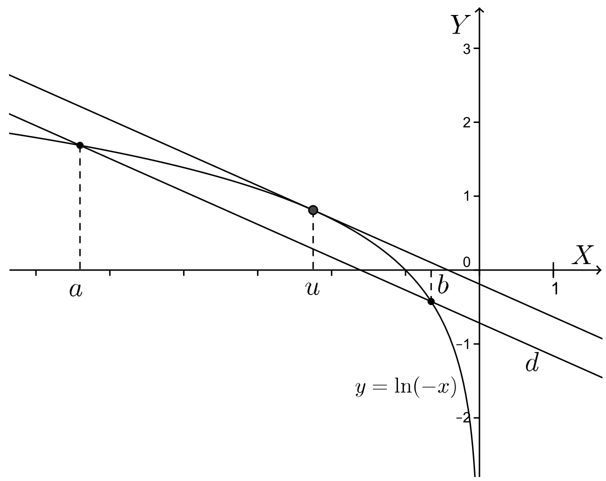
(b) Appliquer ce théorème au cas de la fonction $x \mapsto \ln(-x)$.

Réponse. Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(-x)$. Celle-ci est dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 0[$. Vu le TAF, on peut donc affirmer que pour tous $a, b \in]-\infty, 0[$ tels que $a \neq b$, il existe u strictement compris entre a et b vérifiant l'égalité suivante :

$$\frac{\ln(-b) - \ln(-a)}{b - a} = Df(u) = \frac{1}{u}.$$

(c) Tracer le graphique de cette fonction dans un repère orthonormé et donner une interprétation graphique du théorème.

Réponse.



Interprétation graphique : Le TAF affirme que, pour toute droite d intersectant le graphique de f en deux points d'abscisses $a, b \in]-\infty, 0[$, il existe une tangente au graphique de f qui est parallèle à d et dont le point de tangence a une abscisse comprise entre a et b.

Exercices

1. **(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$**

$$1 - |2x^2 - |x^4|| = 0.$$

Solution. Comme x est un réel, x^4 est un réel positif. Dès lors,

$$1 - |2x^2 - |x^4|| = 0 \ \Leftrightarrow\ |2x^2 - x^4| = 1.$$

Cette équation est équivalente à

$$\begin{aligned} 2x^2 - x^4 = 1 \ \text{ ou } \ 2x^2 - x^4 = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad (x^2-1)^2 = 0 \ \text{ ou } \ x^4 - 2x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm 1 \ \text{ ou } \ x^2 = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm 1 \ \text{ ou } \ x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

puisque, x^2 étant un réel positif, l'équation $x^2 = 1 - \sqrt{2}$ n'a pas de solution réelle.

L'ensemble des solutions est donc $\left\{-\sqrt{1+\sqrt{2}}, -1, 1, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right\}$.

(b) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation suivante

$$\cos(4x) - \sin(2x) = 1.$$

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$.
Comme $1 - \cos(4x) = 2\sin^2(2x)$, l'équation donnée est équivalente à

$$\begin{aligned}
-\sin(2x) = 2\sin^2(2x) \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(2x)(2\sin(2x)+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(2x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(2x) = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : 2x = k\pi \quad \text{ou} \quad \left(2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \left(x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{11\pi}{12} + k\pi\right).
\end{aligned}$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, 0, \frac{\pi}{2}$.

(c) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\ln\left(-\sqrt[3]{e}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

Solution. Comme $\mathrm{dom}(\cos) = \mathbb{R}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, on a

$$\left(-\sqrt[3]{e}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt[3]{e}}{2} > 0.$$

Puisque $\mathrm{dom}(\ln) =]0, +\infty[$, l'expression est définie.
Dès lors, vu que $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$, $\forall a, b \in]0, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\ln\left(-\sqrt[3]{e}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \ln\left(\sqrt[3]{e}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\ln(e) - \ln(2) = \frac{1}{3} - \ln(2).$$

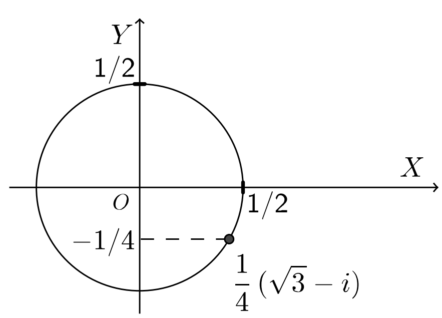
(d) Déterminer le module et la partie imaginaire du complexe suivant et le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)

$$z = \frac{i^{99}}{1 - \sqrt{3}\, i}.$$

Solution. Comme $i^{99} = -i$, on a

$$z = \frac{-i}{1 - \sqrt{3}\, i} = \frac{-i(1 + \sqrt{3}\, i)}{1+3} = \frac{\sqrt{3} - i}{4};$$

le module de ce nombre vaut $\sqrt{(\sqrt{3}/4)^2 + (-1/4)^2} = \frac{1}{2}$ et sa partie imaginaire vaut $-\frac{1}{4}$. Sa représentation dans le plan muni d'un repère orthonormé est la suivante.



2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(a)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^3-1} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\arcsin(\sqrt{1-x^2})}{x+1}$$

Solution. **(a)** La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^6}}{x^3-1}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, ensemble non minoré.
La limite en $-\infty$ peut donc être envisagée. On a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x^3|\sqrt{\frac{1}{x^6}+1}}{x^3(1-\frac{1}{x^3})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3\sqrt{\frac{1}{x^6}+1}}{x^3(1-\frac{1}{x^3})}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^6} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1}{x^6}+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(1-\frac{1}{x^3}\right) = 1.$

Par conséquent, la limite demandé vaut $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{x^3} = -1.$

(b) La fonction $x \mapsto \dfrac{\arcsin(\sqrt{1-x^2})}{x+1}$ est définie sur

$$\begin{aligned} A &= \{x\in\mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\ ,\ -1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \text{ et } x \neq -1\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\ ,\ 1-x^2 \leq 1 \text{ et } x \neq -1\} \\ &=]-1,1]. \end{aligned}$$

Puisque tout intervalle ouvert comprenant -1 rencontre $A \cap\,]-1,+\infty[\ =\ ]-1,1]$, le calcul de la limite en $(-1)^+$ peut être envisagé.

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} (1-x^2) = 0^+$, $\displaystyle\lim_{y\to0^+} \sqrt{y} = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{z\to0^+} \arcsin(z) = 0^+$, on a

$$\lim_{x\to-1^+} \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = 0^+$$

vu le théorème de la limite des fonctions de fonctions.
Comme en plus $\displaystyle\lim_{x\to(-1)^+} (x+1) = 0$, levons l'indétermination "0/0" en appliquant le théorème de l'Hospital. Pour cela, vérifions-en d'abord les hypothèses.

Dans $V =]-1,0[$, considérons $f_1 : x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ et $f_2 : x \mapsto x+1$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables dans V.
2) La dérivée de f_2 vaut 1 et est non nulle dans V.
3) De plus,

$$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{Df_1(x)}{Df_2(x)} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-x}{\sqrt{x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-x}{-x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut $+\infty$.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

$$\textbf{(a)}\quad \int_{-1}^{3} \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx \qquad\qquad \textbf{(b)}\quad \int_0^{+\infty} (x-1)\ e^{-x}\ dx$$

Solution. **(a)** La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-1,3]$, ensemble fermé borné. Elle est donc intégrable sur cet ensemble. On a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} \frac{x^2-1}{x^2+1}\, dx &= \int_{-1}^{3} \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}\right)\, dx\\ &= [x - 2\ \mathrm{arctg}\,(x)]_{-1}^{3}\\ &= 3 - 2\ \mathrm{arctg}(3) + 1 + 2\ \mathrm{arctg}(-1)\\ &= 4 - 2\ \mathrm{arctg}(3) + 2\ \left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 4 - 2\ \mathrm{arctg}(3) - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(b) La fonction $f : x \mapsto (x-1)\ e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Comme elle n'est pas de signe constant sur cet ensemble, on peut décomposer l'intervalle d'intégration en l'union du fermé borné $[0,1]$ (où elle est intégrable) et du non borné $[1,+\infty[$ (où elle est positive) ; on vérifie ensuite l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$ en utilisant la définition sur ce dernier intervalle. On peut aussi utiliser le critère en θ. Soit $\theta = 2 > 1$; on a

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2|(x-1)e^{-x}|\right) = \lim_{x\to+\infty} \left((x^3-x^2)e^{-x}\right) = 0,$$

puisque l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste. Comme cette limite existe et est finie, la fonction est intégrable.

Sur $\mathbb{R}$, on a

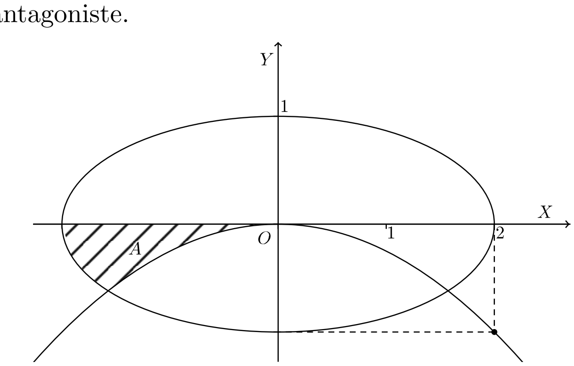
$$\begin{aligned}\int (x-1)\ e^{-x}\ dx &= -\int (x-1)\ D(e^{-x})\ dx\\ &= -(x-1)e^{-x}\ -\ \int -e^{-x}\ dx\\ &= -(x-1)e^{-x}\ -\ \int D(e^{-x})\ dx\\ &\simeq -(x-1)e^{-x}\ -\ e^{-x}\\ &\simeq -x\ e^{-x}.\end{aligned}$$

Dès lors, par variation de primitive, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (x-1)\ e^{-x}\ dx &= \left[-x\ e^{-x}\right]_0^{+\infty}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(-x\ e^{-x}\right) - 0\\ &= 0,\end{aligned}$$

puisque l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste.

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole et l'autre est une ellipse.)**



Solution. L'ensemble A est délimité par une ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{1-y^2}$$

et une parabole d'équation

$$y = -\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{-y}.$$

L'ordonnée des points d'intersection de ces deux courbes vaut $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, puisqu'elle vérifie l'équation

$$-y + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

(avec $\Delta = 1 + 4 = 5$) et est négative. Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0 \right],\ x \in [-2\sqrt{1-y^2}, -2\sqrt{-y}] \right\}.$$

5. **(a) Si la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x^2+1}$ vérifie l'équation différentielle**

$$f(x)\, D^2 f(x) + (Df(x))^2 = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

que vaut $g(x)$?

Solution. Comme f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on a

$$Df(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}},$$

$$\text{et} \quad D^2 f(x) = \frac{2\sqrt{2x^2+1} - 2x\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}}{2x^2+1} = \frac{2(2x^2+1-2x^2)}{(2x^2+1)\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2}{(2x^2+1)\sqrt{2x^2+1}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} f(x)\, D^2 f(x) + (Df(x))^2 &= \sqrt{2x^2+1}\ \frac{2}{(2x^2+1)\sqrt{2x^2+1}} + \frac{4x^2}{2x^2+1} \\ &= \frac{4x^2+2}{2x^2+1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

La fonction g est donc définie explicitement par $g : x \longmapsto 2$.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$2D^2 f(x) - 5Df(x) + 2f(x) = \frac{1-x}{e^x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $2D^2 f(x) - 5Df(x) + 2f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto 2z^2 - 5z + 2 = (2z-1)(z-2)$ et ses zéros sont $1/2$ et 2. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre $\dfrac{1-x}{e^x} = (1-x)\ e^{-x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc on cherche une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre est une exponentielle polynôme, produit d'un polynôme de degré 1 et d'une exponentielle dont le coefficient -1 de l'argument n'est pas zéro du polynôme caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = (Ax+B)\ e^{-x}$ où A et B sont des constantes à déterminer. Puisque

$$\begin{array}{rrcl} & Df_P(x) & = & (A - Ax - B)\ e^{-x} \ = \ (-Ax + A - B)e^{-x} \\ \text{et} & D^2 f_P(x) & = & (-A + Ax - A + B)e^{-x} \ = \ (Ax - 2A + B)e^{-x}, \end{array}$$

on a

$$\begin{array}{rl} & 2D^2 f_P(x) - 5Df_P(x) + 2f_P(x) \ = \ (1-x)\ e^{-x} \\ \Leftrightarrow & 2(Ax - 2A + B)\ e^{-x} - 5(-Ax + A - B)\ e^{-x} + 2(Ax+B)\ e^{-x} \ = \ (1-x)\ e^{-x} \\ \Leftrightarrow & 2(Ax - 2A + B) - 5(-Ax + A - B) + 2(Ax + B) \ = \ 1 - x \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 2A + 5A + 2A = -1 \\ -4A + 2B - 5A + 5B + 2B = 1 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 9A = -1 \\ -9A + 9B = 1 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} A = -1/9 \\ B = 0 \end{array} \right. . \end{array}$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = -\frac{x}{9}\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{2x} - \frac{x}{9}\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**

William tond le gazon de son jardin en 90 minutes mais son voisin Jules peut le faire en une heure avec sa tondeuse personnelle. Aujourd'hui, William tond depuis 10 minutes quand Jules vient l'aider ; ils finissent la tonte ensemble avec leur propre tondeuse. Combien de temps a-t-il fallu pour que toute la pelouse soit tondue ?

Solution. Jules tond cette pelouse en 60 minutes. Comme William tond sa pelouse en 90 minutes, après 10 minutes, il aura tondu $\dfrac{1}{9}$ de la surface. Il reste donc $\dfrac{8}{9}$ de la surface de la pelouse à tondre. Si $t > 0$ (en minutes) est le temps durant lequel William et Jules tondent ensemble, on a la

$$\frac{8}{9} = \frac{t}{90} + \frac{t}{60} \Leftrightarrow \frac{2t + 3t}{180} \ = \ \frac{160}{180} \Leftrightarrow 5t \ = \ 160 \Leftrightarrow t \ = \ 32.$$

Par conséquent, il leur faut 32 minutes pour tondre ensemble le reste de la pelouse. Au final, il faut donc (10+32) minutes, c'est-à-dire 42 minutes pour tondre toute cette pelouse.