LIÈGE université
Sciences

Mathématiques générales I (MATH2007)

Année académique 2025-2026

Examen du 12 juin 2026

Questionnaire et corrigé

Version 14 avril 2026

Mathématiques générales I, MATH 2007

Examen du 12 juin 2026, *9h00-12h15 (non dispensés) ou 12h00 (dispensés)*

Consignes

— ***L'examen dure*** 3 heures pour les dispensés et 3h15 pour les non-dispensés.
— Compléter le tableau ci-dessous avant de ***rendre vos copies accompagnées de cette feuille***.
— Sur ***chaque*** feuille, indiquer votre ***NOM (en capitales, caractères d'imprimerie), votre prénom (en minuscules, sauf première lettre) et votre section***.
— ***Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées***.
— ***Justifier toutes vos réponses, SAUF celles du QCM***.
— Les calculatrices, montres connectées (style iWatch), gsm etc ... sont interdits.
— Le Journal de Bord (formulaire) sera fourni ; ***NE RIEN ECRIRE SUR CE FORMULAIRE***.

NOM : ....

Prénom : ....

Matricule : ....

SECTION :.................................

Signature :

Indiquer une CROIX dans la colonne correspondante
pour les QUESTIONS OUVERTES
AUXQUELLES VOUS NE REPONDEZ PAS.

Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Question 7	Question 8

QCM

Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0
Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

Théorie (5 points)

(1) On donne des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}$ tels que $\|\vec{x}\| = 3$, $\|\vec{y}\| = 2$ et $\vec{x} \bullet \vec{y} = 3\sqrt{3}$. Que vaut la longueur du produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{y}$?

(a) □ $3\sqrt{3}$
(b) □ $\sqrt{3}$
(c) □ 3
(d) □ Il n'y a pas assez de données pour répondre.
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?

(a) ☐ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction qui, à tout réel de A associe un et un seul réel.

(b) ☐ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction qui vérifie la propriété suivante : $\forall x, y \in A \ : \ x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$.

(c) ☐ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction qui vérifie la propriété suivante : $\forall a, b \in A \ : \ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

(d) ☐ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction monotone sur A.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le paramètre réel s pour que la fonction $t \mapsto t^{-|1-s|}$ soit intégrable en $+\infty$?

(a) ☐ $s > 1$

(b) ☐ $s < 1$

(c) ☐ $s \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

(d) ☐ $s \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(4) Soit $f \in C_0(]a, b[)$ et soit $g \in C_0(]c, d[)$ avec $g(x) \in]a, b[, \ \forall x \in]c, d[$. Si on désigne respectivement par F et G des primitives de f sur $]a, b[$ et de g sur $]c, d[$ alors

(a) ☐ la fonction $F(G) = F \circ G$ est une primitive de $f(g) = f \circ g$ sur $]c, d[$.

(b) ☐ la fonction $f(G) = f \circ G$ est une primitive de $f \times g$ sur $]c, d[$.

(c) ☐ la fonction $F(g) = F \circ g$ est une primitive de $f(g) \times Dg = f \circ g \times Dg$ sur $]c, d[$.

(d) ☐ la fonction $G(f) = G \circ f$ est une primitive de $g(f) = g \circ f$ sur $]a, b[$.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(5) Dans un cas particulier, le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer comme suit :
≪ On considère une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]-1, 2[$, à valeurs réelles. Si la limite de f en $(-1)^+$ est nulle et si la limite de f en 2^- vaut $-\infty$, alors *quel que soit le réel strictement négatif, il existe toujours un réel appartenant à* $]-1, 2[$ *en lequel* f *prend la valeur du réel qu'on a fixé au départ.* ≫.

La partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit

(a) ☐ $\exists r \in]-1, 2[$ tel que $f(r) = R \quad \forall R \in]-\infty, 0[$.

(b) ☐ $\forall r \in]-1, 2[, \ \exists R \in]-\infty, 0[$ tel que $f(r) = R$.

(c) ☐ $\forall R \in]-\infty, 0[, \ \exists r \in]-1, 2[$ tel que $f(r) = R$.

(d) ☐ $\exists R \in]-\infty, 0[$ tel que $f(r) = R \quad \forall r \in]-1, 2[$.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices (3 points)

(6) Que vaut $\cos(38\pi/3)$?

(a) ☐ $-\sqrt{3}/2$

(b) ☐ $-1/2$

(c) ☐ $1/2$

(d) ☐ $\sqrt{3}/2$

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Dans un repère orthonormé, soit la droite d'équation cartésienne $4x - 2y + 1 = 0$. Un vecteur directeur de cette droite a pour composantes

(a) ☐ $(2, 1)$.

(b) ☐ $(1, 2)$.

(c) ☐ $(-2, 1)$.

(d) ☐ $(-1, 2)$.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $1/|x|, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est la dérivée de la fonction

(a) ☐ $\ln(|x|), \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) ☐ $\ln(x^2), \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) ☐ $1/x^2, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(d) ☐ $-\ln(|x|), \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie (25 points)

Question 1 (5 points)
(1.1) Soient des complexes α, γ avec α non nul et $1 \neq 4\alpha\gamma$. Démontrer que l'équation (en l'inconnue z) $\alpha z^2 + z + \gamma = 0$ possède toujours deux solutions.
(1.2) Lorsque α et γ sont réels et que $1 < 4\alpha\gamma$, démontrer que les deux solutions dont il est question au point précédent sont des complexes conjugués.

Question 2 (20 points)
(2.1) Enoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.2) Enoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.3) Que signifient les notations $C_0([1, +\infty[)$ et $C_1(]1, +\infty[)$?
(2.4) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_1(]1, +\infty[)$.
(2.5) On donne $f \in C_0([1, +\infty[)$. Quelle est la définition de l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$?
(2.6) En vous servant de la définition donnée au point (2.5), quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le réel β pour que la fonction $x \mapsto x^\beta$ soit intégrable sur $[1, +\infty[$? Justifier votre réponse.

Exercices (67 points)

Question 3 (3 points) ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***
Un chimiste a 10 centilitres d'une solution qui contient une concentration d'acide à 20 %. Combien de millilitres d'acide pur doit-il ajouter pour obtenir une concentration à 40 % ?

Question 4 (9 points)
(4.1) Calculer la partie imaginaire et le module de $z = (1 - i^{2026})/i$.
(4.2) Résoudre l'inéquation

$$\left|\frac{3}{x}\right| > 5 - 2x$$

en l'inconnue réelle x.
(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$2\sin^2(x) = \sin(2x).$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$.

Question 5 (15 points) Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \qquad\qquad (5.2)\ \lim_{y\to 0^+} \arctan(\ln(y))$$

Question 6 (20 points) Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1)\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{4x^2 + 4x + 1}\, dx \qquad\qquad (6.2)\ \int_0^{\pi/2} x\ \sin(x)\, dx$$

Question 7 (4 points)
Les expressions suivantes sont-elles **définies** ? Justifier.

$$(7.1) \arccos(\cos(2026)) \qquad (7.2) \exp\left(-2\ln\left(\sqrt{3}\right)\right) \qquad (7.3) \sqrt{\ln\left(\sin\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right)} \qquad (7.4) \arctan\left(\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

Question 8 (16 points) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - 4f(x) = e^{-2x}.$$

CORRIGÉ

QCM

Théorie

(1) On donne des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}$ tels que $\|\vec{x}\| = 3$, $\|\vec{y}\| = 2$ et $\vec{x} \bullet \vec{y} = 3\sqrt{3}$. Que vaut la longueur du produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{y}$?

(a) □ $3\sqrt{3}$
(b) □ $\sqrt{3}$
(c) ♣ 3
(d) □ Il n'y a pas assez de données pour répondre.
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?

(a) □ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction qui, à tout réel de A associe un et un seul réel.
(b) □ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction qui vérifie la propriété suivante : $\forall x, y \in A \; : \; x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$.
(c) ♣ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction qui vérifie la propriété suivante : $\forall a, b \in A \; : \; f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
(d) □ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction monotone sur A.
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3) Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le paramètre réel s pour que la fonction $t \mapsto t^{-|1-s|}$ soit intégrable en $+\infty$?

(a) □ $s > 1$
(b) □ $s < 1$
(c) ♣ $s \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$
(d) □ $s \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(4) Soit $f \in C_0(]a, b[)$ et soit $g \in C_0(]c, d[)$ avec $g(x) \in]a, b[, \; \forall x \in]c, d[$. Si on désigne respectivement par F et G des primitives de f sur $]a, b[$ et de g sur $]c, d[$ alors

(a) □ la fonction $F(G) = F \circ G$ est une primitive de $f(g) = f \circ g$ sur $]c, d[$.
(b) □ la fonction $f(G) = f \circ G$ est une primitive de $f \times g$ sur $]c, d[$.
(c) ♣ la fonction $F(g) = F \circ g$ est une primitive de $f(g) \times Dg = f \circ g \times Dg$ sur $]c, d[$.
(d) □ la fonction $G(f) = G \circ f$ est une primitive de $g(f) = g \circ f$ sur $]a, b[$.
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(5) Dans un cas particulier, le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer comme suit :
≪ On considère une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]-1, 2[$, à valeurs réelles. Si la limite de f en $(-1)^+$ est nulle et si la limite de f en 2^- vaut $-\infty$, alors *quel que soit le réel strictement négatif, il existe toujours un réel appartenant à* $]-1, 2[$ *en lequel* f *prend la valeur du réel qu'on a fixé au départ.* ≫.

La partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit

(a) □ $\exists r \in]-1, 2[$ tel que $f(r) = R \quad \forall R \in]-\infty, 0[$.
(b) □ $\forall r \in]-1, 2[, \; \exists R \in]-\infty, 0[$ tel que $f(r) = R$.
(c) ♣ $\forall R \in]-\infty, 0[, \; \exists r \in]-1, 2[$ tel que $f(r) = R$.
(d) □ $\exists R \in]-\infty, 0[$ tel que $f(r) = R \quad \forall r \in]-1, 2[$.
(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices

(6) Que vaut $\cos(38\pi/3)$?

(a) ☐ $-\sqrt{3}/2$
(b) ♣ $-1/2$
(c) ☐ $1/2$
(d) ☐ $\sqrt{3}/2$
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Dans un repère orthonormé, soit la droite d'équation cartésienne $4x-2y+1=0$. Un vecteur directeur de cette droite a pour composantes

(a) ☐ $(2,1)$.
(b) ♣ $(1,2)$.
(c) ☐ $(-2,1)$.
(d) ☐ $(-1,2)$.
(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $1/|x|$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est la dérivée de la fonction

(a) ☐ $\ln(|x|),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) ☐ $\ln(x^2),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(c) ☐ $1/x^2,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(d) ☐ $-\ln(|x|),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(e) ♣ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1

(1.1) Soient des complexes α, γ avec α non nul et $1 \neq 4\alpha\gamma$. Démontrer que l'équation (en l'inconnue z) $\alpha z^2 + z + \gamma = 0$ possède toujours deux solutions.
(1.2) Lorsque α et γ sont réels et que $1 < 4\alpha\gamma$, démontrer que les deux solutions dont il est question au point précédent sont des complexes conjugués.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours. NB : c'est une question de l'interrogation de novembre 2025 et de janvier 2026.*

Question 2

(2.1) Enoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.2) Enoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit.
(2.3) Que signifient les notations $C_0([1,+\infty[)$ et $C_1(]1,+\infty[)$?
(2.4) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_1(]1,+\infty[)$.
(2.5) On donne $f \in C_0([1,+\infty[)$. Quelle est la définition de l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$?
(2.6) En vous servant de la définition donnée au point (2.5), quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le réel β pour que la fonction $x \mapsto x^\beta$ soit intégrable sur $[1,+\infty[$? Justifier votre réponse.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours. NB : c'est une question de janvier 2026.*

Exercices

Question 3 ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***
Un chimiste a 10 centilitres d'une solution qui contient une concentration d'acide à 20 %. Combien de millilitres d'acide pur doit-il ajouter pour obtenir une concentration à 40 % ?

Exemple de résolution. La solution donnée contient $10 \times 0,2 = 2$ cl $= 20$ ml d'acide pur. Si on note x le nombre de ml d'acide pur à ajouter, comme 10 cl $= 100$ ml, on obtient l'équation

$$20 + x \ = \ 0,4 \times (100 + x).$$

On a alors

$$20 + x \;=\; 0,4 \times (100 + x) \Leftrightarrow 20 + x = 40 + 0,4x \Leftrightarrow 0,6x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{100}{3}.$$

On doit donc ajouter $100/3 \approx 33,33$ ml d'acide pur à la solution donnée pour obtenir une concentration à 40 %.

Question 4

(4.1) Calculer la partie imaginaire et le module de $z = (1 - i^{2026})/i$.

Solution. On a

$$z = \frac{1 - i^{2026}}{i} = \frac{1 - i^2}{i} = \frac{2}{i} = \frac{2i}{-1} = -2i.$$

Dès lors la partie imaginaire de z vaut -2 et son module vaut 2.

(4.2) Résoudre l'inéquation

$$\left|\frac{3}{x}\right| > 5 - 2x$$

en l'inconnue réelle x.

Solution. L'inéquation est définie si $x \neq 0$ donc si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Cela étant, d'une part si $x < 0$, alors on a $|3/x| = -3/x$ et on obtient

$$\left|\frac{3}{x}\right| > 5 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3}{x} > 5 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{x} < 2x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 5x - 3 < 0.$$

Comme les zéros du polynôme du second degré $x \mapsto 2x^2 - 5x - 3$ sont $-1/2$ et 3, celui-ci est strictement négatif si et seulement si $x \in]-1/2, 3[$. Comme $x < 0$, les solutions sont donc tous les réels de l'intervalle $]-1/2, 0[$.

D'autre part, si $x > 0$, alors on a $|3/x| = 3/x$ et on obtient

$$\left|\frac{3}{x}\right| > 5 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{x} > 5 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 5x + 3 > 0.$$

Comme les zéros du polynôme du second degré $x \mapsto 2x^2 - 5x + 3$ sont 1 et $3/2$, celui-ci est strictement positif si et seulement si $x \in]-\infty, 1[\cup]3/2, +\infty[$. Comme $x > 0$, les solutions sont donc tous les réels de l'intervalle $]0, 1[\cup]3/2, +\infty[$.

Il s'ensuit que les solutions de l'inéquation de départ sont les réels de l'ensemble $]-1/2, 0[\,\cup\,]0, 1[\,\cup\,]3/2, +\infty[$.

(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$2\sin^2(x) = \sin(2x).$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$.

Solution. On a successivement

$$\begin{aligned}
2\sin^2(x) = \sin(2x) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin^2(x) = 2\sin(x)\cos(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(x)\Big(\sin(x) - \cos(x)\Big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = \cos(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

Cela étant, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$ sont les réels $\pi, 5\pi/4, 2\pi$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} \qquad\qquad (5.2)\ \lim_{y \to 0^+} \arctan(\ln(y))$$

Solution. **(5.1)** Le domaine de définition de la fonction dont on doit évaluer la limite est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ensemble non majoré. On peut donc envisager la limite.

Cela étant, on ne peut pas conclure tout de suite en regardant la limite des numérateur et dénominateur car la limite du numérateur n'existe pas. Cependant, quel que soit le réel strictement positif x, on a

$$0 \leq \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x};$$

comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

on en déduit par le théorème de l'étau que la limite à examiner vaut 0.

(5.2) Le domaine de définition de la fonction ln est $]0,+\infty[$ et celui de la fonction arctan est $\mathbb{R}$. Le domaine de définition de la fonction dont on doit évaluer la limite est donc $]0,+\infty[$. Comme tout intervalle ouvert du type $]0,r[$ où $r>0$ rencontre ce domaine, la limite peut être envisagée.

Cela étant, on a

$$\lim_{y\to 0^+} \ln(y) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}.$$

Le théorème régissant la limite d'une fonction de fonction permet donc de dire que

$$\lim_{y\to 0^+} \arctan(\ln(y)) = \lim_{t\to-\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}.$$

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1) \int_2^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+1}\, dx \qquad\qquad (6.2) \int_0^{\pi/2} x\ \sin(x)\, dx$$

Solution. **(6.1)** La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{4x^2+4x+1} = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1/2\}$, donc sur l'intervalle fermé non borné $[2,+\infty[$. On doit donc examiner l'intégrabilité en $+\infty$. Pour cela, repassons à la définition : la fonction est intégrable sur $[2,+\infty[$ si la limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t |f(x)|\ dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t f(x)\ dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{(2x+1)^2}\ dx$$

est finie.

Or, on a

$$\begin{aligned}
\int_2^t \frac{1}{(2x+1)^2}\ dx &= \frac{1}{2}\int_2^t \frac{2}{(2x+1)^2}\ dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2x+1}\right]_2^t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2t+1}+\frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

Cela étant, on a $\lim_{t\to+\infty}[-1/(2t+1)] = 0$. Dès lors, on obtient finalement

$$\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{(2x+1)^2}\ dx = \frac{1}{10}.$$

Comme cette limite est finie, la fonction f est bien intégrable sur $[2,+\infty[$ et comme elle y est à valeurs positives, on obtient directement

$$\int_2^{+\infty} f(x)\ dx \ = \ \frac{1}{10}.$$

(6.2) La fonction $f : x \mapsto x\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle fermé borné $[0,\pi/2]$; elle est donc intégrable sur $[0,\pi/2]$.

Cela étant, par une intégration par parties (toutes les fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on intègre sur un intervalle fermé borné) puis par une variation de primitives, on obtient directement

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} x\ \sin(x)\ dx &= -\int_0^{\pi/2} x\, D\cos(x)\ dx \\
&= \Big[-x\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)\ dx \\
&= -0+0+\int_0^{\pi/2}\cos(x)\ dx \\
&= \sin(\pi/2)-\sin(0) = 1.
\end{aligned}$$

<u>Question 7</u> Les expressions suivantes sont-elles <u>définies</u> ? Justifier.

$$(7.1)\mathrm{arcos}\left(\cos(2026)\right) \quad (7.2)\exp\left(-2\ln\left(\sqrt{3}\right)\right) \quad (7.3)\sqrt{\ln\left(\sin\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right)} \quad (7.4)\arctan\left(\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

Solution. (7.1) La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ et à image dans $[-1,1]$; la fonction arcos est définie sur l'intervalle $[-1,1]$; l'expression donnée en (7.1) est donc définie.

(7.2) La fonction ln est définie sur $]0,+\infty[$ et à image dans $\mathbb{R}$ où la fonction exp est définie ; comme $\sqrt{3}$ est strictement positif, l'expression donnée en (7.2) est définie.

(7.3) La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction ln sur $]0,+\infty[$ et la fonction racine carrée sur $[0,+\infty[$. Comme $\sin(7\pi/9) \in]0,1[$ puisque $7\pi/9 \in]0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi[$, $\ln\left(\sin\left(7\pi/9\right)\right)$ est défini mais est strictement négatif. Par conséquent, l'expression donnée en (7.3) n'est pas définie.

(7.4) La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$ et la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Comme $-\sqrt{3}/3 \in]-1,0[$, l'expression donnée en (7.4) est bien définie.

<u>Question 8</u> Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) - 4f(x) = e^{-2x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

• L'équation homogène associée est $D^2f - 4f = 0$; le polynôme caractéristique est donc $z \mapsto z^2 - 4 = (z-2)(z+2)$ et ses zéros sont -2 et 2. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

• Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto e^{-2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre g est l'exponentielle polynôme $x \mapsto 1 \times e^{-2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient -2 de la variable est un zéro simple du polynôme caractéristique, une solution particulière est du type $f_P(x) = Ax\,e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.

Comme

$$Df_P(x) = (-2Ax + A)\,e^{-2x} \quad \text{et} \quad D^2f_P(x) = (4Ax - 4A)\,e^{-2x},$$

on obtient

$$D^2f_P(x) - 4f_P(x) = e^{-2x} \ \Leftrightarrow\ (4Ax - 4A)\,e^{-2x} - 4(Ax\,e^{-2x}) = e^{-2x} \ \Leftrightarrow\ -4\,Ae^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow A = \frac{-1}{4}.$$

Ainsi, $f_P(x) = -xe^{-2x}/4,\ x \in \mathbb{R}$.

• Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} - \frac{xe^{-2x}}{4},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.