Mathématiques générales I (MATH2007)

Année académique 2024-2025

Examen du 13 juin 2025

Questionnaire et corrigé

Version 20 mai 2025

QUESTIONNAIRE

QCM

Théorie

(1) Soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}$. Si $\bullet$ désigne le produit scalaire et $\wedge$ désigne le produit vectoriel, laquelle des expressions suivantes représente-t-elle un nombre ?

(a) ☐ $\vec{x} \wedge \vec{v}$

(b) ☐ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{x}$

(c) ☐ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{x}$

(d) ☐ $\vec{u} \wedge (\vec{v} \bullet \vec{x})$

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est **fausse** ?

(a) ☐ Pour qu'une fonction soit continue, il est suffisant qu'elle soit dérivable.

(b) ☐ Si une fonction est strictement décroissante, alors elle est injective.

(c) ☐ Pour qu'une fonction soit intégrable sur l'intervalle borné $[0, 1[$, il suffit qu'elle y soit continue.

(d) ☐ Une primitive d'une fonction est toujours une fonction dérivable.

(e) ☐ La différence entre deux solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants est toujours solution de l'équation homogène associée.

(3) On donne la fonction $f : x \mapsto x^{2\theta}$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

(a) ☐ Si f est intégrable en $+\infty$, alors $\theta < -1$.

(b) ☐ Si f est intégrable en $+\infty$, alors $\theta < 0$.

(c) ☐ Si $\theta > -1/2$ alors f est intégrable en $+\infty$.

(d) ☐ Si $\theta < 0$ alors f est intégrable en 0^+.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(4) Parmi les relations suivantes, laquelle fait intervenir la notion de linéarité ?

(a) ☐ On a $D(fg) = fDg + gDf$ pour toutes fonctions f, g dérivables sur $\mathbb{R}$.

(b) ☐ On a $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$ pour tous complexes z, z'.

(c) ☐ Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont des vecteurs alors $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

(d) ☐ On a $D(f - g) = Df - Dg$ pour toutes fonctions f, g dérivables sur $\mathbb{R}$.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(5) Dans un cas particulier, le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer comme suit :
≪ On considère une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]-1, 2[$, à valeurs réelles. Si la limite de f en $(-1)^+$ est nulle et si la limite de f en 2^- vaut $-\infty$, alors *quel que soit le réel strictement négatif, il existe toujours un réel appartenant à* $]-1, 2[$ *en lequel* f *prend la valeur du réel qu'on a fixé au départ.* ≫.

La partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit

(a) ☐ $\exists r \in]-1, 2[\;\text{ tel que }\; f(r) = R \quad \forall R \in]-\infty, 0[$.

(b) ☐ $\forall r \in]-1, 2[,\; \exists R \in]-\infty, 0[\;\text{ tel que }\; f(r) = R$.

(c) ☐ $\forall R \in]-\infty, 0[,\; \exists r \in]-1, 2[\;\text{ tel que }\; f(r) = R$.

(d) ☐ $\exists R \in]-\infty, 0[\;\text{ tel que }\; f(r) = R \quad \forall r \in]-1, 2[$.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices

(6) Que vaut $\sin(5\pi/3)$?

(a) ☐ $-\sqrt{3}/2$

(b) ☐ $-1/2$

(c) ☐ $1/2$

(d) ☐ $\sqrt{3}/2$

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Dans un repère orthonormé, soit la droite d'équation cartésienne $4x - 2y + 1 = 0$. Un vecteur orthogonal à cette droite a pour composantes

(a) ☐ $(2, 1)$.

(b) ☐ $(1, 2)$.

(c) ☐ $(-2, 1)$.

(d) ☐ $(-1, 2)$.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $1/|x|$, $x \in \mathbb{R}_0$ est la dérivée de la fonction

(a) ☐ $\ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}_0$.

(b) ☐ $\ln(x^2)\ x \in \mathbb{R}_0$.

(c) ☐ $1/x^2,\ x \in \mathbb{R}_0$.

(d) ☐ $-\ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}_0$.

(e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1

Définir géométriquement le cosinus du nombre 3.

Question 2

(2.1) Que signifie la notation $C_1(]1, 3[)$?

(2.2) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_1(]1, 3[)$.

(2.3) Quelle est la **définition** de l'intégrabilité en $+\infty$ d'une fonction continue sur $[1, +\infty[$?

(2.4) **En vous servant du point (2.3)** déterminer la condition nécessaire et suffisante sur le réel s pour que la fonction $x \mapsto x^s$ soit intégrable en $+\infty$.

Exercices

Question 3 ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***

Un mélange contient 45 litres d'eau salée et 30 litres d'eau pure. On désire en faire un mélange qui, sur 3 litres, contienne 8 décilitres d'eau salée. Quelle masse d'eau pure doit-on ajouter ?

Question 4

(4.1) Si $w = 1 - 2i$, calculer la partie imaginaire et le module de $z = w/(1 + w)$.

(4.2) Résoudre l'inéquation

$$\frac{1}{x - x^2} \leq \frac{1}{|x - 1|}$$

en l'inconnue réelle x.

(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$\cos(x) - 1 = \cos(2x).$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Question 5

Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1)\ \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)}{1-x} \qquad\qquad (5.2)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{|3+x|}$$

Question 6

Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1)\ \int_1^2 \frac{x}{4x^2-4x+1}\,dx \qquad\qquad (6.2)\ \int_1^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$$

Question 7

Les expressions suivantes sont-elles **définies** ? Justifier.

$$(7.1)\arcsin\left(\frac{-4\pi}{5}\right) \qquad (7.2)\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \qquad (7.3)\sqrt{\sin\left(-\frac{9\pi}{7}\right)} \qquad (7.4)\ln\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Question 8

Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$4D^2 f(x) + f(x) = e^{-2x}.$$

CORRIGÉ

QCM

Théorie

(1) Soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}$. Si $\bullet$ désigne le produit scalaire et $\wedge$ désigne le produit vectoriel, laquelle des expressions suivantes représente-t-elle un nombre ?

(a) □ $\vec{x} \wedge \vec{v}$

(b) ♣ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{x}$

(c) □ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{x}$

(d) □ $\vec{u} \wedge (\vec{v} \bullet \vec{x})$

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(2) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est **fausse** ?

(a) □ Pour qu'une fonction soit continue, il est suffisant qu'elle soit dérivable.

(b) □ Si une fonction est strictement décroissante, alors elle est injective.

(c) ♣ Pour qu'une fonction soit intégrable sur l'intervalle borné $[0, 1[$, il suffit qu'elle y soit continue.

(d) □ Une primitive d'une fonction est toujours une fonction dérivable.

(e) □ La différence entre deux solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants est toujours solution de l'équation homogène associée.

(3) On donne la fonction $f : x \mapsto x^{2\theta}$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

(a) □ Si f est intégrable en $+\infty$, alors $\theta < -1$.

(b) ♣ Si f est intégrable en $+\infty$, alors $\theta < 0$.

(c) □ Si $\theta > -1/2$ alors f est intégrable en $+\infty$.

(d) □ Si $\theta < 0$ alors f est intégrable en 0^+.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(4) Parmi les relations suivantes, laquelle fait intervenir la notion de linéarité ?

(a) □ On a $D(fg) = fDg + gDf$ pour toutes fonctions f, g dérivables sur $\mathbb{R}$.

(b) □ On a $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$ pour tous complexes z, z'.

(c) □ Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont des vecteurs alors $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

(d) ♣ On a $D(f - g) = Df - Dg$ pour toutes fonctions f, g dérivables sur $\mathbb{R}$.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(5) Dans un cas particulier, le théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer comme suit :
« On considère une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]-1, 2[$, à valeurs réelles. Si la limite de f en $(-1)^+$ est nulle et si la limite de f en 2^- vaut $-\infty$, alors *quel que soit le réel strictement négatif, il existe toujours un réel appartenant à* $]-1, 2[$ *en lequel* f *prend la valeur du réel qu'on a fixé au départ.* ».

La partie de l'énoncé qui est en italique s'écrit

(a) □ $\exists r \in]-1, 2[$ tel que $f(r) = R \quad \forall R \in]-\infty, 0[$.

(b) □ $\forall r \in]-1, 2[$, $\exists R \in]-\infty, 0[$ tel que $f(r) = R$.

(c) ♣ $\forall R \in]-\infty, 0[$, $\exists r \in]-1, 2[$ tel que $f(r) = R$.

(d) □ $\exists R \in]-\infty, 0[$ tel que $f(r) = R \quad \forall r \in]-1, 2[$.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices

(6) Que vaut $\sin(5\pi/3)$?

(a) ♣ $-\sqrt{3}/2$

(b) □ $-1/2$

(c) □ $1/2$

(d) □ $\sqrt{3}/2$

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(7) Dans un repère orthonormé, soit la droite d'équation cartésienne $4x - 2y + 1 = 0$. Un vecteur orthogonal à cette droite a pour composantes

(a) □ $(2, 1)$.

(b) □ $(1, 2)$.

(c) ♣ $(-2, 1)$.

(d) □ $(-1, 2)$.

(e) □ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(8) La fonction $1/|x|$, $x \in \mathbb{R}_0$ est la dérivée de la fonction

(a) □ $\ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}_0$.

(b) □ $\ln(x^2)\ x \in \mathbb{R}_0$.

(c) □ $1/x^2,\ x \in \mathbb{R}_0$.

(d) □ $-\ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}_0$.

(e) ♣ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1
Définir géométriquement le cosinus du nombre 3.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours.*

Question 2
(2.1) Que signifie la notation $C_1(]1,3[)$?
(2.2) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_1(]1,3[)$.
(2.3) Quelle est la définition de l'intégrabilité en $+\infty$ d'une fonction continue sur $[1, +\infty[$?
(2.4) En vous servant du point (2.3) déterminer la condition nécessaire et suffisante sur le réel s pour que la fonction $x \mapsto x^s$ soit intégrable en $+\infty$.

Pour la réponse : *voir cours enseigné et syllabus du cours.*

Exercices

Question 3 ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***
Un mélange contient 45 litres d'eau salée et 30 litres d'eau pure. On désire en faire un mélange qui, sur 3 litres, contienne 8 décilitres d'eau salée. Quelle masse d'eau pure doit-on ajouter ?

Exemple de résolution. Soit x le nombre de litres d'eau pure à ajouter au mélange. On a alors un mélange de $(75 + x)$ litres contenant 45 litres d'eau salée. Un litre de mélange contient ainsi $45/(75 + x)$ litres d'eau salée, donc trois litres de mélange contiennent $3 \times 45/(75 + x)$ litres d'eau salée.

Cela étant, comme on veut avoir 8 dl c'est-à-dire $0,8$ l d'eau salée pour 3 l de mélange, on a

$$3 \times \frac{45}{75 + x} = 0,8.$$

On obtient donc

$$3 \times \frac{45}{75 + x} = 0,8 \quad \Leftrightarrow \quad 30 \times 45 = 8\,(75 + x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{30 \times 45 - 8 \times 75}{8} = \frac{750}{8} = 93,75.$$

On doit donc ajouter $93,75$ litres d'eau pure. Comme la masse d'un litre d'eau pure est de 1 kg, on doit donc ajouter une masse de $93,75$ kg d'eau pure.

Question 4

(4.1) Si $w = 1 - 2i$, calculer la partie imaginaire et le module de $z = w/(1+w)$.

Solution. On a
$$z = \frac{1-2i}{2-2i} = \frac{(1-2i)(2+2i)}{8} = \frac{2+2i-4i+4}{8} = \frac{6-2i}{8} = \frac{3-i}{4}.$$
Dès lors la partie imaginaire de z vaut $-1/4$ et son module vaut
$$|z| = \frac{|3-i|}{4} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

(4.2) Résoudre l'inéquation
$$\frac{1}{x-x^2} \leq \frac{1}{|x-1|}$$
en l'inconnue réelle x.

Solution. L'exercice est défini si $x - x^2 = x(1-x) \neq 0$ et $|x-1| \neq 0$ donc si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\}$. De plus, comme la valeur absolue d'un réel est un réel positif et que $|x-1| = |1-x|$, l'inégalité peut s'écrire
$$\frac{|1-x|}{x(1-x)} \leq 1.$$

Cela étant, d'une part si $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ alors on a $0 < |1-x| = 1-x$ et on obtient
$$\frac{|1-x|}{x(1-x)} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-x}{x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow x < 0.$$
Dans ce cas, les solutions sont donc les réels de l'intervalle $]-\infty, 0[$.

D'autre part, si $x > 1$ alors on a $0 < |1-x| = x-1$ et on obtient
$$\frac{|1-x|}{x(1-x)} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x.$$
Dans ce cas, les solutions sont donc tous les réels de l'intervalle $]1, +\infty[$

Il s'ensuit que les solutions de l'inéquation de départ sont les réels de l'ensemble $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x
$$\cos(x) - 1 = \cos(2x).$$
Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Solution. On a successivement
$$\begin{aligned}
\cos(x) - 1 = \cos(2x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x) - 1 = 2\cos^2(x) - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x)\Big(1 - 2\cos(x)\Big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1/2 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi.
\end{aligned}$$

Cela étant, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont les réels $-\pi/2, -\pi/3, \pi/3, \pi/2$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1) \lim_{x \to 1^-} \frac{\ln(x)}{1-x} \qquad\qquad (5.2) \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{|3+x|}$$

Solution. **(5.1)** La fonction dont on doit étudier la limite en 1^- est définie sur $A =]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Comme tout intervalle centré en 1 rencontre cet ensemble, la limite peut être envisagée.

Cela étant, comme $\lim_{x \to 1} \ln(x) = 0 = \lim_{x \to 1}(1-x)$, on se trouve dans le cas d'indétermination « 0/0 ». Pour lever cette indétermination, appliquons le théorème de l'Hospital à la fonction donnée. Vérifions les autres hypothèses de ce théorème.

Dans $V =]0,1[$, considérons $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto 1-x$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables sur V.
2) La fonction g est non nulle sur V. De même la dérivée de g, d'expression explicite -1, est non nulle sur V.
3) De plus,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1/x}{-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x} = -1.$$

Les hypothèses sont donc vérifiées. Il s'ensuit que l'on a

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = -1.$$

(5.2) La fonction $x \mapsto \sqrt{3+x^2}/|3+x|$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.

On a directement

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{|3+x|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{3/x^2+1}}{-3-x} = 1.$$

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1)\quad \int_1^2 \frac{x}{4x^2-4x+1}\,dx \qquad\qquad (6.2)\quad \int_1^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$$

Solution. **(6.1)** La fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{4x^2-4x+1} = \frac{x}{(2x-1)^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1/2\}$, donc sur l'intervalle fermé borné $[1,2]$; elle est donc intégrable sur cet intervalle.

Cela étant, on a

$$\frac{x}{(2x-1)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2}, \quad \forall x \neq 1/2$$

où A, B sont des constantes réelles à déterminer. On a alors successivement

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(2x-1)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2},\ \forall x \neq 1/2 \quad &\Leftrightarrow \quad x = A(2x-1)+B,\ \forall x \neq 1/2\\
&\Leftrightarrow \quad x = A(2x-1)+B,\ \forall x \in \mathbb{R}(*)\\
&\Leftrightarrow \quad x = 2Ax - A + B,\ \forall x \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \quad 2A = 1 \text{ et } -A+B = 0\\
&\Leftrightarrow \quad A = 1/2 \text{ et } A = B
\end{aligned}$$

donc finalement

$$\frac{x}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2(2x-1)} + \frac{1}{2(2x-1)^2}, \quad \forall x \neq 1/2$$

(justification (*) : une égalité entre polynômes de degré n en au moins $n+1$ réels implique une égalité en tout réel).

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x}{(2x-1)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^2}\right) dx\\
&= \frac{1}{4}\int_1^2 \left(\frac{2}{2x-1} + \frac{2}{(2x-1)^2}\right) dx\\
&= \frac{1}{4}\left[\ln(2x-1) - \frac{1}{2x-1}\right]_1^2\\
&= \frac{1}{4}\left(\ln(3) - \frac{1}{3} - \ln(1) + 1\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\ln(3) + \frac{2}{3}\right).
\end{aligned}$$

(6.2) La fonction $f : x \mapsto xe^{-2x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle $[1, +\infty[$. On doit donc examiner l'intégrabilité en $+\infty$. Pour cela, repassons à la définition : la fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ si la limite suivante est finie

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t |f(x)|\ dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t xe^{-2x}\ dx.$$

Cela étant, par une intégration par parties (toutes les fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on intègre sur un intervalle fermé borné) puis par une variation de primitives, on obtient directement

$$\begin{aligned}
\int_1^t x\,e^{-2x}\ dx &= -\left[\frac{x}{2}\ e^{-2x}\right]_1^t + \frac{1}{2}\int_1^t e^{-2x}\ dx \\
&= -\frac{t}{2}\ e^{-2t} + \frac{1}{2}\ e^{-2} - \frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_1^t \\
&= -\frac{t}{2}\ e^{-2t} + \frac{1}{2}\ e^{-2} - \frac{1}{4}\ e^{-2t} + \frac{1}{4}\ e^{-2} \\
&= -\frac{2t+1}{4}\ e^{-2t} + \frac{3}{4}\ e^{-2}.
\end{aligned}$$

Dès lors, on a $\lim_{t\to+\infty} -(2t+1)/4 = -\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$. On se souvient alors que l'exponentielle domine toute puissance antagoniste en $+\infty$. Ainsi la limite en $+\infty$ du premier terme vaut 0 et on obtient finalement

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t x\ e^{-2x} = \frac{3\ e^{-2}}{4} = \frac{3}{4\ e^2}.$$

Comme cette limite est finie, la fonction f est bien intégrable sur $[1, +\infty[$ et comme elle y est à valeurs positives, on obtient directement

$$\int_1^{+\infty} f(x)\ dx = \frac{3}{4\ e^2}.$$

Question 7 Les expressions suivantes sont-elles définies ? Justifier.

$$(7.1) \arcsin\left(\frac{-4\pi}{5}\right) \qquad (7.2) \sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \qquad (7.3) \sqrt{\sin\left(-\frac{9\pi}{7}\right)} \qquad (7.4) \ln\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Solution. (7.1) La fonction arcsin est définie sur l'intervalle $[-1, 1]$; comme $-4\pi/5$ n'est pas un réel de cet intervalle, l'expression donnée en (7.1) n'est pas définie.

(7.2) La fonction arcos est définie sur $[-1, 1]$; comme $\sqrt{2}/2$ appartient à cet intervalle et que la fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, l'expression donnée en (7.2) est définie.

(7.3) La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine carrée sur $[0, +\infty[$. On a $\sin(-9\pi/7) = \sin(2\pi - 9\pi/7) = \sin(5\pi/7) > 0$ puisque $5\pi/7 \in [0, \pi]$. Par conséquent l'expression donnée en (7.3) est définie.

(7.4) La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est définie en tout réel strictement positif. Comme $\arctan(x) > 0$ pour tout $x > 0$, l'expression donnée en (7.4) est bien définie.

Question 8 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$4D^2 f(x) + f(x) = e^{-2x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

• L'équation homogène associée est $4D^2 f + f = 0$; le polynôme caractéristique est donc $z \mapsto 4z^2 + 1 = (2z - i)\,(2z + i)$ et ses zéros sont $-i/2$ et $i/2$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{-ix/2} + c_2 e^{ix/2},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

• Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto e^{-2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre g est l'exponentielle polynôme $x \mapsto 1 \times e^{-2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient -2 de la variable n'est pas un zéro du polynôme caractéristique, une solution particulière est du type $f_P(x) = A\,e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.

Comme
$$Df_P(x) = -2A\,e^{-2x} \quad \text{et} \quad D^2 f_P(x) = 4A\,e^{-2x},$$
on obtient
$$4D^2 f_P(x) + f_P(x) = e^{-2x} \;\Leftrightarrow\; 16\,Ae^{-2x} + A\,e^{-2x} = e^{-2x} \;\Leftrightarrow\; 17\,Ae^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow A = \frac{1}{17}.$$
Ainsi, $f_P(x) = e^{-2x}/17,\ x \in \mathbb{R}$.

• Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions
$$c_1 e^{-ix/2} + c_2 e^{ix/2} + \frac{e^{-2x}}{17},\ x \in \mathbb{R}$$
où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.