



Mathématiques générales I (MATH2007)

Année académique 2025-2026

EXAMEN DU 31 AOÛT 2026
QUESTIONNAIRE ET CORRIGÉ

Mathématiques générales I, MATH 2007

Examen du 31 août 2026, 8h45-12h00

Consignes

- *L'examen dure 3h15.*
- Compléter le tableau ci-dessous avant de *rendre vos copies accompagnées de cette feuille.*
- Sur *chaque* feuille, indiquer votre *NOM (en capitales, caractères d'imprimerie), votre prénom (en minuscules, sauf première lettre) et votre section.*
- *Répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.*
- *Justifier toutes vos réponses, SAUF celles du QCM.*
- Les calculatrices, montres connectées (style iWatch), gsm etc ... sont interdits.
- Le Journal de Bord (formulaire) sera fourni ; **NE RIEN ECRIRE SUR CE FORMULAIRE.**

NOM :

Prénom :

Matricule :

SECTION :

Signature :

Indiquer une CROIX dans la colonne correspondante
pour les QUESTIONS OUVERTES
AUXQUELLES VOUS NE REPONDEZ PAS.

Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Question 7	Question 8

QCM

Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède **sur cette feuille**.

Théorie

- (1) On donne des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}$ tels que $\|\vec{x}\| = 3$, $\|\vec{y}\| = 2$ et $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = 3$. Que vaut le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$?
- (a) ☐ $3\sqrt{3}$ ou $-3\sqrt{3}$
 - (b) ☐ $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$
 - (c) ☐ 3 ou -3
 - (d) ☐ Il n'y a pas assez de données pour répondre.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

- (2) Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?
- (a) ☐ Une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ est toujours injective.
 - (b) ☐ Pour qu'une fonction soit continue, il est nécessaire qu'elle soit dérivable.
 - (c) ☐ Pour qu'une fonction soit continue, il est suffisant qu'elle soit dérivable.
 - (d) ☐ Si f est une fonction croissante sur un intervalle, alors son carré l'est aussi.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (3) Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le paramètre réel s pour que la fonction $t \mapsto t^{|s-1|}$ soit intégrable en $+\infty$?
- (a) ☐ $s > 1$
 - (b) ☐ $s < 1$
 - (c) ☐ $s \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$
 - (d) ☐ $s \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (4) Si f, g sont deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ et si $g(x)$ appartient au domaine de définition de f quel que soit le réel x du domaine de définition de g , alors
- (a) ☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x)) = 3$.
 - (b) ☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(f(x)) = 3$.
 - (c) ☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x)) = 3$.
 - (d) ☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = 3$.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (5) Soit f une fonction à valeurs réelles dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Le théorème des accroissements finis appliqué à f affirme que *chaque fois qu'on prend deux réels strictement positifs et distincts, on peut trouver un réel t compris entre eux-ci qui est tel que la tangente au graphique de f au point d'abscisse t est parallèle à la droite passant par les points du graphique dont les abscisses sont les réels de départ*. Parmi les expressions suivantes, laquelle traduit l'énoncé en italique ?
- (a) ☐ $\forall r, s \in]0, +\infty[(s \neq r), f(r) = f(s) + (r - s) Df(t) \forall t \in]r, s[$ ou $\forall t \in]s, r[$
 - (b) ☐ $\exists t > 0$ tel que $f(r) = f(s) + (r - s) Df(t) \forall r, s > 0 (r \neq s)$
 - (c) ☐ $\forall r, s \in]0, +\infty[(s \neq r), \exists t \in]r, s[$ ou $\exists t \in]s, r[$ tel que $f(r) = f(s) + (s - r) Df(t)$
 - (d) ☐ $\forall r, s \in]0, +\infty[(s \neq r), \exists t \in]r, s[$ ou $\exists t \in]s, r[$ tel que $f(r) = f(s) + (r - s) Df(t)$
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices

- (6) Que vaut $\tan(38\pi/3)$?
- (a) ☐ $-\sqrt{3}/2$
 - (b) ☐ $-\sqrt{3}$
 - (c) ☐ $-1/2$
 - (d) ☐ $-\sqrt{2}/2$
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (7) Dans un repère orthonormé, soit la droite d'équation cartésienne $4x - 2y + 1 = 0$. Un vecteur orthogonal à cette droite a pour composantes
- (a) ☐ $(2, 1)$.
 - (b) ☐ $(1, 2)$.
 - (c) ☐ $(-2, 1)$.
 - (d) ☐ $(-1, 2)$.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (8) La fonction $1/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$ est la dérivée de la fonction
- (a) ☐ $\ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) ☐ $1/(1+x)$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - (c) ☐ $1 - 1/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - (d) ☐ $\arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1

Soient les complexes a, b, c et le polynôme $z \mapsto bz^2 + 2cz + a$.

(1.1) Quelle est la condition sur a, b, c pour que ce polynôme soit du second degré ?

(1.2) Sous la condition énoncée au point précédent et en supposant en plus que $c^2 - ab \neq 0$, démontrer que l'équation (en l'inconnue z) $bz^2 + 2cz + a = 0$ possède toujours deux solutions distinctes.

(1.3) Lorsque a, b, c sont réels et que $c^2 - ab < 0$, démontrer que les deux solutions dont il est question au point précédent sont des complexes conjugués.

Question 2

(2.1) Énoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit. Répondre UNIQUEMENT à cela.

(2.2) Énoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit. Répondre UNIQUEMENT à cela.

(2.3) Que signifient les notations $C_0(-\infty, 1[)$ et $C_1(-\infty, 1[)$?

(2.4) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_0(-\infty, 1[)$.

(2.5) On donne $f \in C_0([1, +\infty[)$. Quelle est la définition de l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$?

(2.6) En vous servant de la définition donnée au point (2.5), quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que la fonction $x \mapsto x^{2\alpha}$ soit intégrable sur $[1, +\infty[$? Justifier votre réponse.

Exercices

Question 3 On dispose d'un récipient contenant 1 litre de mélange d'alcool et d'eau et on sait l'alcool présent à une concentration de 30% en volume (du mélange complet). On chauffe le mélange. Il y a donc évaporation et on suppose que l'alcool s'évapore trois fois plus vite que l'eau. Sachant que celle-ci s'évapore à raison de 1 cm^3 par minute, quelle devra être la durée de l'opération de chauffage pour obtenir un mélange dans lequel on ne trouve plus que 25% d'alcool en volume ?

Question 4

(4.1) Calculer la partie imaginaire et le module de $z = i(1 + i^{1964})$.

(4.2) Résoudre l'inéquation

$$\frac{1}{(x-1)^3} > \frac{1}{|x-1|}$$

en l'inconnue réelle x .

(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$\cos^2(x) + \frac{\cos(2x)}{2} = 0.$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1) \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\cos(u)}{u^2}$$

$$(5.2) \lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan(\ln(t))$$

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

$$(6.2) \int_0^1 \ln(x) dx$$

Question 7 Les expressions suivantes sont-elles définies ? Justifier.

$$(7.1) \arctan(\cos(1964)) \quad (7.2) \ln\left(2 \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \quad (7.3) \sqrt{\ln\left(\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right)} \quad (7.4) \ln\left(\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

Question 8 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$-D^2 f(x) - 4f(x) = e^{-2x}.$$

CORRIGÉ

QCM

Théorie

- (1) On donne des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}$ tels que $\|\vec{x}\| = 3$, $\|\vec{y}\| = 2$ et $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = 3$. Que vaut le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$?
- (a) ☒ $3\sqrt{3}$ ou $-3\sqrt{3}$
 - (b) ☐ $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$
 - (c) ☐ 3 ou -3
 - (d) ☐ Il n'y a pas assez de données pour répondre.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (2) Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?
- (a) ☐ Une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ est toujours injective.
 - (b) ☐ Pour qu'une fonction soit continue, il est nécessaire qu'elle soit dérivable.
 - (c) ☒ Pour qu'une fonction soit continue, il est suffisant qu'elle soit dérivable.
 - (d) ☐ Si f est une fonction croissante sur un intervalle, alors son carré l'est aussi.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (3) Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le paramètre réel s pour que la fonction $t \mapsto t^{|s-1|}$ soit intégrable en $+\infty$?
- (a) ☐ $s > 1$
 - (b) ☐ $s < 1$
 - (c) ☐ $s \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$
 - (d) ☐ $s \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
 - (e) ☒ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (4) Si f, g sont deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ et si $g(x)$ appartient au domaine de définition de f quel que soit le réel x du domaine de définition de g , alors
- (a) ☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x)) = 3$.
 - (b) ☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(f(x)) = 3$.
 - (c) ☒ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x)) = 3$.
 - (d) ☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = 3$.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (5) Soit f une fonction à valeurs réelles dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Le théorème des accroissements finis appliqué à f affirme que *chaque fois qu'on prend deux réels strictement positifs et distincts, on peut trouver un réel t compris entre eux-ci qui est tel que la tangente au graphique de f au point d'abscisse t est parallèle à la droite passant par les points du graphique dont les abscisses sont les réels de départ*. Parmi les expressions suivantes, laquelle traduit l'énoncé en italique ?
- (a) ☐ $\forall r, s \in]0, +\infty[(s \neq r), f(r) = f(s) + (r - s) Df(t) \forall t \in]r, s[\text{ ou } \forall t \in]s, r[$
 - (b) ☐ $\exists t > 0$ tel que $f(r) = f(s) + (r - s) Df(t) \forall r, s > 0 (r \neq s)$
 - (c) ☐ $\forall r, s \in]0, +\infty[(s \neq r), \exists t \in]r, s[\text{ ou } \exists t \in]s, r[\text{ tel que } f(r) = f(s) + (s - r) Df(t)$
 - (d) ☒ $\forall r, s \in]0, +\infty[(s \neq r), \exists t \in]r, s[\text{ ou } \exists t \in]s, r[\text{ tel que } f(r) = f(s) + (r - s) Df(t)$
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Exercices

- (6) Que vaut $\tan(38\pi/3)$?
- (a) ☐ $-\sqrt{3}/2$
 - (b) ☒ $-\sqrt{3}$
 - (c) ☐ $-1/2$
 - (d) ☐ $-\sqrt{2}/2$
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (7) Dans un repère orthonormé, soit la droite d'équation cartésienne $4x - 2y + 1 = 0$. Un vecteur orthogonal à cette droite a pour composantes
- (a) ☐ $(2, 1)$.
 - (b) ☐ $(1, 2)$.
 - (c) ☒ $(-2, 1)$.
 - (d) ☐ $(-1, 2)$.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- (8) La fonction $1/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$ est la dérivée de la fonction
- (a) ☐ $\ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) ☐ $1/(1+x)$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - (c) ☐ $1 - 1/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - (d) ☒ $\arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - (e) ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Questions ouvertes

Théorie

Question 1

Soient les complexes a, b, c et le polynôme $z \mapsto bz^2 + 2cz + a$.

- (1.1) Quelle est la condition sur a, b, c pour que ce polynôme soit du second degré ?
- (1.2) Sous la condition énoncée au point précédent et en supposant en plus que $c^2 - ab \neq 0$, démontrer que l'équation (en l'inconnue z) $bz^2 + 2cz + a = 0$ possède toujours deux solutions distinctes.
- (1.3) Lorsque a, b, c sont réels et que $c^2 - ab < 0$, démontrer que les deux solutions dont il est question au point précédent sont des complexes conjugués.

Question 2

- (2.1) Énoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit. Répondre **UNIQUEMENT** à cela.
- (2.2) Énoncer la propriété de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit. Répondre **UNIQUEMENT** à cela.
- (2.3) Que signifient les notations $C_0([-\infty, 1])$ et $C_1([-\infty, 1])$?
- (2.4) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction à valeurs réelles appartenant à $C_0([-\infty, 1])$.
- (2.5) On donne $f \in C_0([1, +\infty[)$. Quelle est la définition de l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$?
- (2.6) En vous servant de la définition donnée au point (2.5), quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que la fonction $x \mapsto x^{2\alpha}$ soit intégrable sur $[1, +\infty[$? Justifier votre réponse.

Pour la réponse : voir cours enseigné et syllabus du cours.

Exercices

Question 3 Problème élémentaire : rédiger votre réponse.

On dispose d'un récipient contenant 1 litre de mélange d'alcool et d'eau et on sait l'alcool présent à une concentration de 30% en volume (du mélange complet). On chauffe le mélange. Il y a donc évaporation et on suppose que l'alcool s'évapore trois fois plus vite que l'eau. Sachant que celle-ci s'évapore à raison de 1 cm^3 par minute, quelle devra être la durée de l'opération de chauffage pour obtenir un mélange dans lequel on ne trouve plus que 25% d'alcool en volume ?

Exemple de résolution. Soit x la durée de l'opération de chauffage en minutes.

Vu que 1 l est égal à $1\text{ dm}^3 = 1000\text{ cm}^3$, au départ on a un mélange constitué de $1000 \times 30/100 = 300\text{ cm}^3$ d'alcool et donc de 700 cm^3 d'eau. Vu les données, après x minutes, on a $x\text{ cm}^3$ d'eau évaporée et $3x\text{ cm}^3$ d'alcool évaporé ; il reste donc $1000 - 4x\text{ cm}^3$ de mélange et $300 - 3x\text{ cm}^3$ d'alcool.

Cela étant, le fait que le mélange ne contienne plus que 25% d'alcool se traduit alors par

$$(1000 - 4x) \times \frac{25}{100} = 300 - 3x.$$

On a successivement

$$(1000 - 4x) \times \frac{25}{100} = 300 - 3x \Leftrightarrow 250 - x = 300 - 3x \Leftrightarrow 2x = 50 \Leftrightarrow x = 25.$$

En conclusion, on doit chauffer le mélange pendant 25 minutes pour obtenir un mélange ne comprenant que 25% d'alcool.

Question 4

(4.1) Calculer la partie imaginaire et le module de $z = i(1 + i^{1964})$.

Solution. On a $i^{1964} = (i^4)^{491} = 1$ donc $z = 2i$. Dès lors la partie imaginaire de z vaut 2, de même que son module.

(4.2) Résoudre l'inéquation

$$\frac{1}{(x-1)^3} > \frac{1}{|x-1|}$$

en l'inconnue réelle x .

Solution. L'inéquation est définie si $x \neq 1$ donc si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Cela étant, d'une part si $x < 1$, alors $(x-1)^3 < 0$ et comme la valeur absolue d'un réel est un réel positif, il n'y a pas de solution.

D'autre part, si $x > 1$, alors on a $|x-1| = x-1$ et on obtient

$$\frac{1}{(x-1)^3} > \frac{1}{|x-1|} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > 1 \Leftrightarrow 1 > (x-1)^2 \Leftrightarrow 1 - (x-1)^2 > 0.$$

Comme on a la factorisation $1 - (x-1)^2 = (1 - (x-1))(1 + (x-1)) = (2-x)x$, on obtient

$$1 - (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x(2-x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 2[.$$

On ne considère ici que des réels $x > 1$; il s'ensuit que les solutions de l'inéquation de départ sont les réels de l'intervalle $]1, 2[$.

(4.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$\cos^2(x) + \frac{\cos(2x)}{2} = 0.$$

Donner ensuite la ou les éventuelles solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$.

Solution. Pour tout réel x , on a $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$ donc

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2}.$$

Il s'ensuit que l'on a successivement

$$\begin{aligned} \cos^2(x) + \frac{\cos(2x)}{2} = 0 &\Leftrightarrow \cos(2x) + \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} : 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} : x = -\frac{\pi}{3} + k\pi. \end{aligned}$$

Cela étant, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ sont les réels $4\pi/3$ et $5\pi/3$.

Question 5 Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(5.1) \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\cos(u)}{u^2}$$

$$(5.2) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan(\ln(t))$$

Solution. **(5.1)** Cet exercice est vraiment analogue à celui de juin 2026.

Le domaine de définition de la fonction dont on doit évaluer la limite est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ensemble non majoré. On peut donc envisager la limite.

Cela étant, on ne peut pas conclure tout de suite en regardant la limite des numérateur et dénominateur car la limite du numérateur n'existe pas. Cependant, quel que soit le réel strictement positif u , on a

$$0 \leq \left| \frac{\cos^2(u)}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2};$$

comme

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u^2} = 0,$$

on en déduit par le théorème de l'étau que la limite à examiner vaut 0.

(5.2) Voir l'examen de juin 2026.

Question 6 Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$(6.1) \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

$$(6.2) \quad \int_0^1 \ln(x) dx$$

Solution. **(6.1)** La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)}$$

est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, donc sur l'intervalle fermé non borné $[2, +\infty[$. On doit donc examiner l'intégrabilité en $+\infty$. Pour cela, repassons à la définition : la fonction est intégrable sur $[2, +\infty[$ si la limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t |f(x)| dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} dx$$

est finie.

Pour tous $x \neq -1$, $x \neq 1$, on a

$$\frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right);$$

dès lors on obtient

$$\begin{aligned} \int_2^t \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} dx &= \frac{1}{2} \left[\ln(x - 1) - \ln(x + 1) \right]_2^t \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) \right]_2^t \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{t - 1}{t + 1} \right) + \ln(3) \right). \end{aligned}$$

Cela étant, par la propriété régissant les limites de fonctions de fonction, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{t - 1}{t + 1} \right) = \lim_{y \rightarrow 1} \ln(y) = 0,$$

et dès lors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{t - 1}{t + 1} \right) + \ln(3) \right) = \frac{\ln(3)}{2}.$$

En repassant à la définition comme indiqué au début, on obtient finalement que f est intégrable sur $[2, +\infty[$ et que son intégrale est égale à

$$\frac{\ln(3)}{2}.$$

(6.2) La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc sur $]0, 1]$, intervalle borné non fermé. Comme la fonction est à valeurs négatives sur ce dernier intervalle, la fonction sera intégrable sur celui-ci si la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 |f(x)| dx = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 f(x) dx$$

est finie.

Une primitive de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$ est obtenue par une primitivation par parties ; de fait, on a (toutes les fonctions qui interviennent sont dérivables sur $]0, +\infty[$)

$$\int \ln(x) dx = \int D x \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \times \frac{1}{x} dx \simeq x \ln(x) - x.$$

On obtient donc

$$\int_t^1 f(x) dx = \ln(1) - 1 - (t \ln(t) - t) = -1 + t - t \ln(t).$$

Cela étant, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (t \ln(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t)}{1/t}.$$

Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{D \ln(t)}{D(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t^2}{t} = 0,$$

le théorème de l'Hospital donne

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (t \ln(t)) = 0.$$

Finalement on obtient

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 |f(x)| dx = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 f(x) dx = 1,$$

donc f est intégrable sur $]0, 1]$ et son intégrale est égale à

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 f(x) dx = -1.$$

Question 7 Les expressions suivantes sont-elles définies ? Justifier.

$$(7.1) \arctan(\cos(1964)) \quad (7.2) \ln\left(2 \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \quad (7.3) \sqrt{\ln\left(\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right)} \quad (7.4) \ln\left(\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

Solution. (7.1) La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ et à image dans $[-1, 1]$; la fonction arctan est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$; l'expression donnée en (7.1) est donc définie.

(7.2) La fonction $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$; l'expression $\ln(\sqrt{3}/2)$ est donc définie. Par ailleurs, on a

$$2 \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) ;$$

comme $3/4 < 1$, on a $\ln(3/4) < 0$. Il s'ensuit que l'expression donnée en (7.2) n'est pas définie.

(7.3) La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$ et la fonction racine carrée sur $[0, +\infty[$. Puisque $7\pi/9 \in]\pi/2, \pi[$, on a $\cos(7\pi/9) \in]-1, 0[$ donc $\ln(\cos(7\pi/9))$ n'est pas défini. Par conséquent, l'expression donnée en (7.3) n'est pas définie.

(7.4) La fonction arcos est définie sur $[-1, 1]$, à valeurs dans $[0, \pi]$, nulle si et seulement si $x = 1$ et la fonction $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$. Comme $-\sqrt{3}/3 \in]-1, 0[$, l'expression $\arccos(-\sqrt{3}/3)$ est bien définie et comme $\arccos(-\sqrt{3}/3) > 0$, l'expression donnée en (7.4) est donc finalement bien définie.

Question 8 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$-D^2 f(x) - 4f(x) = e^{-2x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

- L'équation homogène associée est $-D^2f - 4f = 0$; le polynôme caractéristique est donc $z \mapsto -z^2 - 4$ et ses zéros sont $-2i$ et $2i$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{-2ix} + c_2 e^{2ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

- Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto e^{-2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre g est l'exponentielle polynôme $x \mapsto 1 \times e^{-2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient -2 de la variable n'est pas zéro du polynôme caractéristique, une solution particulière est du type $f_P(x) = A e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.

Comme

$$Df_P(x) = -2A e^{-2x} \quad \text{et} \quad D^2f_P(x) = 4A e^{-2x},$$

on obtient

$$-D^2f_P(x) - 4f_P(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow -4A e^{-2x} - 4A e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow -8A e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow A = -\frac{1}{8}.$$

Ainsi, $f_P(x) = -e^{-2x}/8$, $x \in \mathbb{R}$.

- Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$c_1 e^{-2ix} + c_2 e^{2ix} - \frac{e^{-2x}}{8}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.