Année académique 2022-2023

Corrigé de l'examen de MATH2007 du 16 juin 2023

Version 16 juin 2023

QUESTIONNAIRE

Théorie 1.
(1.1) Enoncer la propriété fondamentale de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(1.2) Enoncer la propriété fondamentale de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit. Démontrer cette propriété en vous servant du point précédent.

Théorie 2.
(2.1) On donne une fonction continue sur l'intervalle $]0,2]$. Donner la **définition** de l'intégrabilité de cette fonction sur l'intervalle considéré (on demande donc la définition, et non une condition suffisante d'intégrabilité).
(2.2) **Utiliser la définition donnée au point précédent** pour établir la condition nécessaire et suffisante sur s sous laquelle la fonction $x \mapsto x^{2s}$ est intégrable sur $]0,2]$ ($s \in \mathbb{R}$).

Théorie 3. $\boxed{\text{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)
Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et **colorier complètement** la case qui la précède sur cette feuille.

(3.1) Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?
□ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction qui, à tout réel de A, associe un et un seul réel.
□ Par définition, une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction qui vérifie la propriété suivante : $\forall x, y \in A \ : \ x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$.
□ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction qui vérifie la propriété suivante : $\forall a, b \in A \ : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
□ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction monotone sur A.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.2) On donne la fonction $f : x \mapsto x^{\theta^2}, \ \theta \in \mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours correcte ?
□ Si $\theta < 0$ alors f est intégrable en $+\infty$.
□ La fonction est toujours intégrable en 0^+.
□ Si f est intégrable en 0^+, alors $\theta < -1$.
□ Si f est intégrable en $+\infty$, alors $\theta < 1$.
□ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3.3) Soient f, g deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$. Si la limite des valeurs de f en $+\infty$ est un réel et si la limite des valeurs de g en $+\infty$ est nulle alors la limite des valeurs du quotient f/g en $+\infty$
□ est toujours un réel.
□ n'est jamais un réel.
□ n'est jamais infinie.
□ est toujours infinie.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.4) Si une fonction continue sur un intervalle ouvert I est à valeurs négatives, alors
□ la fonction est décroissante sur l'intervalle.
□ toute primitive de f est décroissante sur l'intervalle.
□ la fonction est intégrable sur l'intervalle.
□ la dérivée de la fonction est décroissante sur l'intervalle.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.5) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours exacte ?
□ Si f_1 et f_2 sont solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, alors $f_1 f_2$ est solution de cette même équation.
□ Si on ajoute une constante à une solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, alors la nouvelle fonction est toujours aussi solution de l'équation.

□ Si f_1 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène et $2f_2$ solution de l'équation homogène associée, alors $f_1 + f_2$ est solution de l'équation non homogène.
□ Si f_1 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, alors $2f_1$ est solution de cette même équation.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

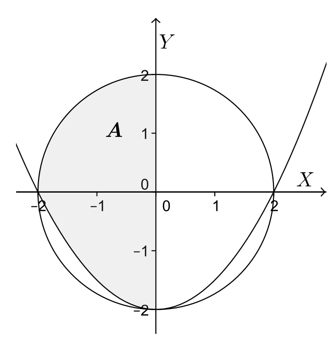
Exercices

1. (1.1) Si x est un réel strictement négatif, déterminer les solutions de l'équation
$$\left|x^2 - |x^4|\right| = 2.$$
(1.2) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante
$$\ln\left(-\sqrt{e^3}\ \ \sin(-5\pi/6)\right).$$
(1.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x.
$$\cos(2x) + \sin^2(x) = \cos(x)$$
Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-3\pi/2, 0]$.

2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.
$$(2.1)\ \lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x^2)}{x-1} \qquad\qquad (2.2)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan(1/x)}{x}$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.
$$(3.1)\ \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{9x^2-16}\, dx \qquad\qquad (3.2)\ \int_{-1}^{0} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\, dx$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé grisé suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est un cercle et l'autre est une parabole).



5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$D^2f(x) - 2Df(x) = 1 + e^{2x}.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
Un radiateur contient 8 *l d'un mélange d'eau et d'antigel. Si* 40 % *du mélange est de l'antigel, quelle quantité du mélange initial doit-on enlever et remplacer par de l'antigel pur pour que le mélange final contienne* 60 % *d'antigel ?*

7. $\boxed{\text{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

(7.1) Que vaut le cosinus de 4 ?

☐ $\sqrt{1-\sin^2(4)}$

☐ $|\sin(4))|\ \mathrm{cotan}(4)$

☐ $2\cos(2)$

☐ n'existe pas

☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.2) Quelle est la partie imaginaire du complexe $\dfrac{i-2}{1+i^3}$?

☐ -1

☐ $-1/2$

☐ $-i$

☐ $-i/2$

☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.3) Que vaut la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(\cos(x))$?

☐ $x \mapsto -\sin(\cos(x))$

☐ $x \mapsto -\cos(\sin(x))$

☐ $x \mapsto -\sin(\sin(x))\ \sin(x)$

☐ $x \mapsto \sin(\cos(x))\ \sin(x)$

☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.
(1.1) Enoncer la propriété fondamentale de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
(1.2) Enoncer la propriété fondamentale de la fonction logarithme qui fait intervenir une somme et un produit. Démontrer cette propriété en vous servant du point précédent.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 2.
(2.1) On donne une fonction continue sur l'intervalle $]0,2]$. Donner la définition de l'intégrabilité de cette fonction sur l'intervalle considéré (on demande donc la définition, et non une condition suffisante d'intégrabilité).
(2.2) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir la condition nécessaire et suffisante sur s sous laquelle la fonction $x \mapsto x^{2s}$ est intégrable sur $]0,2]$ $(s \in \mathbb{R})$.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 3. QCM

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et colorier complètement la case qui la précède sur cette feuille.

(3.1) Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?
☐ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction qui, à tout réel de A, associe un et un seul réel.
☐ Par définition, une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction qui vérifie la propriété suivante : $\forall x, y \in A \; : \; x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$.
♣ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction qui vérifie la propriété suivante : $\forall a, b \in A \; : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
☐ Une fonction injective sur A et à valeurs réelles est une fonction monotone sur A.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.2) On donne la fonction $f : x \mapsto x^{\theta^2}, \; \theta \in \mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours correcte ?
☐ Si $\theta < 0$ alors f est intégrable en $+\infty$.
♣ La fonction est toujours intégrable en 0^+.
☐ Si f est intégrable en 0^+, alors $\theta < -1$.
☐ Si f est intégrable en $+\infty$, alors $\theta < 1$.
☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3.3) Soient f, g deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$. Si la limite des valeurs de f en $+\infty$ est un réel et si la limite des valeurs de g en $+\infty$ est nulle alors la limite des valeurs du quotient f/g en $+\infty$
☐ est toujours un réel.
☐ n'est jamais un réel.
☐ n'est jamais infinie.
☐ est toujours infinie.
♣ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.4) Si une fonction continue sur un intervalle ouvert I est à valeurs négatives, alors
☐ la fonction est décroissante sur l'intervalle.
♣ toute primitive de f est décroissante sur l'intervalle.
☐ la fonction est intégrable sur l'intervalle.
☐ la dérivée de la fonction est décroissante sur l'intervalle.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.5) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours exacte ?
□ Si f_1 et f_2 sont solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, alors $f_1 f_2$ est solution de cette même équation.
□ Si on ajoute une constante à une solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, alors la nouvelle fonction est toujours aussi solution de l'équation.
♣ Si f_1 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène et $2f_2$ solution de l'équation homogène associée, alors $f_1 + f_2$ est solution de l'équation non homogène.
□ Si f_1 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, alors $2f_1$ est solution de cette même équation.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Exercices

1. **(1.1) Si x est un réel strictement négatif, déterminer les solutions de l'équation**

$$\left|x^2 - |x^4|\right| = 2.$$

Solution. Comme $x^4 \geq 0$ et $x^2 \geq 0$ quel que soit le réel x, on a

$$|x^2 - x^4| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\ |1 - x^2| = 2.$$

Par définition, on a aussi

$$|1 - x^2| \ = \ \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} \quad 1 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad 1 - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$|1 - x^2| \ = \ \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[. \end{cases}$$

Dès lors, puisque x est strictement négatif (on ne doit chercher que les solutions strictement négatives), si $-1 \leq x < 0$, on a

$$|x^2 - x^4| = 2 \ \Leftrightarrow \ x^2(1 - x^2) - 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 2 = 0,$$

équation du second degré en la variable x^2 qui n'a pas de solution réelle puisque $\Delta = 1 - 8 < 0$.
Et si $x \leq -1$, on a

$$|x^2 - x^4| = 2 \ \Leftrightarrow \ x^2(x^2 - 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 1) = 0.$$

Le facteur $x^2 + 1$ étant toujours strictement positif (puisque x est réel), la solution strictement négative de cette équation est $-\sqrt{2}$.
En conclusion la seule solution strictement négative de l'équation de départ est $-\sqrt{2}$.

(1.2) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\ln\left(-\sqrt{e^3} \quad \sin(-5\pi/6)\right).$$

Solution. Le domaine de définition du logarithme népérien est $]0, +\infty[$; on doit donc voir si son argument $-\sqrt{e^3} \quad \sin(-5\pi/6)$ est un réel strictement positif.
Comme $\sin(-5\pi/6) = -\sin(5\pi/6) = -\sin(\pi - \pi/6) = -\sin(\pi/6) = -1/2$ et comme le premier facteur $-\sqrt{e^3}$ est strictement négatif, le produit est strictement positif et égal à $e^{3/2}/2$.
Ainsi, l'expression est définie et est égale à

$$\ln\left(-\sqrt{e^3} \quad \sin(-5\pi/6)\right) = \ln\left(\frac{e^{3/2}}{2}\right) = \ln\left(e^{3/2}\right) - \ln(2) = \frac{3}{2}\ln(e) - \ln(2) = 3/2 - \ln(2)$$

puisque $\ln(e) = 1$.

(1.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x.

$$\cos(2x) + \sin^2(x) = \cos(x)$$

Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-3\pi/2, 0]$.

Solution. L'équation est définie pour tout réel x. Cela étant, comme $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, on obtient

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) + \sin^2(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \cos^2(x) - \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1.$$

D'une part on a

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

et d'autre part, on a

$$\cos(x) = 1 \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} : x = 0 + 2k\pi.$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[-3\pi/2, 0]$ sont $-3\pi/2,\ -\pi/2$ et 0.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$(2.1)\ \lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{arcos}(x^2)}{x-1} \qquad\qquad (2.2)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan(1/x)}{x}$$

Solution. **(2.1)** La fonction $x \mapsto \left(\operatorname{arcos}(x^2)\right)/(x-1)$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x^2 \leq 1,\ x - 1 \neq 0\} = [-1, 1[.$$

Puisque tout intervalle ouvert contenant 1 rencontre $A \cap]-\infty, 1[= A$ le calcul de la limite en 1^- peut donc être envisagé.

Pour lever l'indétermination $\ll\ 0\ /\ 0\ \gg$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées. En effet, si $V =]-1, 1[$, on a

1) $f : x \mapsto \operatorname{arcos}(x^2)$ et $g : x \mapsto x - 1$ sont dérivables sur V

2) $Dg(x) = 1 \neq 0$ dans V

3) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname{arcos}(1) = 0^+$ et $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0^-$

4) $\lim_{x\to 1^-} (Df(x)/Dg(x)) = \lim_{x\to 1^-} \left(-2x/\sqrt{1-x^4}\right) = -\infty$ puisque

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2x}{x^2\sqrt{1/x^4 - 1}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{\sqrt{1/x^4 - 1}}.$$

Dès lors, la limite cherchée vaut $-\infty$.

(2.2) La fonction

$$x \mapsto \frac{\arctan(1/x)}{x}$$

est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non majoré ; le calcul de la limite en $+\infty$ peut donc être envisagé. Cette fonction peut aussi s'écrire sous la forme

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x} \arctan(1/x)\right).$$

Comme $\lim_{x\to +\infty} (1/x) = 0^+$ et $\lim_{y\to 0^+} \arctan(y) = 0^+$, vu le théorème des limites de fonctions de fonction, on a $\lim_{x\to +\infty} \arctan(1/x) = 0^+$. Enfin, comme la limite d'un produit de fonctions est égal au produit des limites si elles existent et sont finies, on a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan(1/x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x} \arctan(1/x)\right) = 0^+\ .\ 0^+ = 0^+.$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

(3.1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{9x^2-16}\, dx$ (3.2) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\, dx$

Solution. **(3.1)** La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{9x^2-16} = \frac{1}{(3x-4)(3x+4)}$$

est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-4/3, 4/3\}$ donc sur $]-\infty, -2]$, ensemble fermé non borné. Examinons l'intégrabilité en $-\infty$ de f en utilisant la définition ; la fonction étant à valeurs positives sur l'intervalle donné, on obtiendra simultanément la valeur de l'intégrale.
Comme f est une fraction rationnelle propre mais pas simple, effectuons la décomposition en fractions simples. On a

$$\frac{1}{(3x-4)(3x+4)} = \frac{A}{3x-4} + \frac{B}{3x+4}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-4/3, 4/3\}$$

où A, B sont des constantes réelles à déterminer. Pour $x \neq -4/3$ et $x \neq 4/3$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{(3x-4)(3x+4)} &= \frac{A(3x+4)+B(3x-4)}{(3x-4)(3x+4)}\\ &= \frac{3(A+B)\,x+4(A-B)}{(3x-4)(3x+4)}.\end{aligned}$$

Ces égalités sont équivalentes à

$$1 = 3(A+B)\,x + 4(A-B), \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-4/3, 4/3\}.$$

Le polynôme $x \mapsto 3(A+B)\,x+4(A-B)-1$ étant nul en plus d'un point et étant de degré 0 ou 1, il est nul partout. Il s'ensuit que les coefficients des puissances de la variable sont nuls, donc on obtient le système

$$\begin{cases} A+B=0\\ A-B=1/4,\end{cases}$$

ce qui donne $A = 1/8$ et $B = -1/8$.
Ainsi, on obtient

$$\frac{1}{9x^2-16} = \frac{1}{8\,(3x-4)} - \frac{1}{8\,(3x+4)}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-4/3, 4/3\}$$

et dès lors, quel que soit $t < -2$ on a

$$\begin{aligned}\int_t^{-2} \frac{1}{9x^2-16}\, dx &= \frac{1}{8}\int_t^{-2}\left(\frac{1}{3x-4} - \frac{1}{3x+4}\right) dx\\ &= \frac{1}{24}\int_t^{-2}\Big(D\ln(|3x-4|) - D\ln(|3x+4|)\Big)\, dx\\ &= \frac{1}{24}\int_t^{-2} D\ln\left(\frac{3x-4}{3x+4}\right) dx\\ &= \frac{1}{24}\ln\left(\frac{10}{2}\right) - \frac{1}{24}\ln\left(\frac{3t-4}{3t+4}\right)\\ &= \frac{1}{24}\ln(5) - \frac{1}{24}\ln\left(\frac{3t-4}{3t+4}\right).\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^{-2}\frac{1}{9x^2-16}\, dx = \frac{1}{24}\ \ln(5) - \frac{1}{24}\lim_{t\to-\infty}\ln\left(\frac{3t-4}{3t+4}\right)$$

Cela étant, on a

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{3t-4}{3t+4}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 1}\ln(y)=0$$

donc, par le théorème des limites de fonctions de fonction, on obtient

$$\lim_{t\to-\infty}\ln\left(\frac{3t-4}{3t+4}\right) \;=\; \lim_{y\to 1}\ln(y) \;=\; 0.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^{-2}\frac{1}{9x^2-16}\,dx = \frac{1}{24}\ln(5).$$

Ainsi, comme la limite

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^{-2}\frac{1}{9x^2-16}\,dx$$

est finie, la fonction donnée est donc intégrable sur $]-\infty,-2]$ et puisqu'elle y est à valeurs positives, cette limite est aussi la valeur de l'intégrale. On a donc

$$\int_{-\infty}^{-2}\frac{1}{9x^2-16}\,dx \;=\; \frac{1}{24}\ln(5).$$

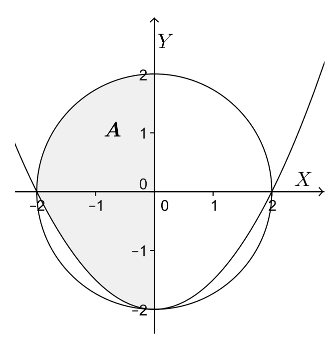
(3.2) La fonction $x\mapsto \arctan(x)/(1+x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[-1,0]$. Cela étant, comme

$$D\arctan(x)=\frac{1}{x^2+1},$$

on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\Big[\arctan^2(x)\Big]_{-1}^{0}\\ &= \frac{1}{2}\Big(\arctan^2(0)-\arctan^2(-1)\Big)\\ &= -\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2\\ &= -\frac{\pi^2}{32}.\end{aligned}$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé grisé suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est un cercle et l'autre est une parabole).



Solution. Le cercle de rayon 2 centré à l'origine du repère a pour équation cartésienne $x^2+y^2=4$ et la parabole représentée a pour équation cartésienne $y = x^2/2-2$. Pour les abscisses négatives les coordonnées des points d'intersection entre les deux courbes sont $(-2,0)$ et $(0,-2)$.
D'une part, on a

$$x^2+y^2=4 \Leftrightarrow x=-\sqrt{4-y^2} \text{ ou } x=\sqrt{4-y^2}.$$

D'autre part, on a

$$y=\frac{x^2}{2}-2 \Leftrightarrow x^2=2y+4 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2y+4} \text{ ou } x=\sqrt{2y+4}.$$

Dès lors, l'ensemble fermé grisé est décrit analytiquement par

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-2,0]\,,\; x \in \left[-\sqrt{2y+4}, 0\right]\right\}$$
$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2]\,,\; x \in \left[-\sqrt{4-y^2}, 0\right]\right\}.$$

5. **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2 f(x) - 2Df(x) = 1 + e^{2x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) - 2Df(x) = 0$; dès lors, le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 - 2z$ dont les zéros sont 0 et 2. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1\, e^{0x} + c_2\, e^{2x} = c_1 + c_2\, e^{2x},\; x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto 1 + e^{2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une somme de deux fonctions, cherchons tout d'abord une solution particulière de $D^2 f(x) - 2Df(x) = 1$ (*).
On voit immédiatement que la fonction $f_1(x) = -x/2, x \in \mathbb{R}$ est solution de (*). Sinon, on résout cette équation de la façon suivante.
Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1.e^{0x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient 0 de l'argument est solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_1(x) = Ax\, e^{0x} = Ax,\; x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. Comme $Df_1(x) = A$ et $D^2 f_2(x) = 0$, en remplaçant dans (*), on a

$$-2A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $f_1(x) = -x/2,\; x \in \mathbb{R}$.
Cherchons à présent une solution particulière de $D^2 f(x) - 2Df(x) = e^{2x}$ (**).
Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1.e^{2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient 2 de l'argument est solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_2(x) = Ax\, e^{2x},\; x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.
Comme $Df_2(x) = A(1+2x)e^{2x}$ et $D^2 f_2(x) = 4A(1+x)e^{2x}$, en remplaçant dans (**), on a

$$4A(1+x)e^{2x} - 2A(1+2x)e^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow 4A(1+x) - 2A(1+2x) = 1 \Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $f_2(x) = x\, e^{2x}/2,\; x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 + \left(c_2 + \frac{1}{2}x\right) e^{2x} - \frac{x}{2},\; x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un radiateur contient* 8 *l* *d'un mélange d'eau et d'antigel. Si* 40 % *du mélange est de l'antigel, quelle quantité du mélange initial doit-on enlever et remplacer par de l'antigel pur pour que le mélange final contienne* 60 % *d'antigel ?

Solution. Soit $x > 0$ le nombre de litres de mélange à retirer et à remplacer par de l'antigel pur. On aura donc $(8 - x)$ litres de mélange à 40% et x litres d'antigel pur pour obtenir un mélange de

8 litres à 60%.

Dès lors, en égalant la quantité d'antigel pur, on obtient l'équation

$$(8-x)\times\frac{40}{100}+x=8\times\frac{60}{100}.$$

On a alors les équivalences suivantes

$$32-4\,x+10\,x=48\Leftrightarrow 6\,x=16\Leftrightarrow x=\frac{8}{3}.$$

Ainsi, on doit enlever 8/3 de litres (donc approximativement 2, 66 litres) du mélange initial et le remplacer par de l'antigel pur pour obtenir un mélange final contenant 60% d'antigel.

7. (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Questionnaire A

(7.1) Que vaut le cosinus de 4 ?
□ $\sqrt{1-\sin^2(4)}$
□ $|\sin(4))|\ \mathrm{cotan}(4)$
□ $2\cos(2)$
□ n'existe pas
♣ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.2) Quelle est la partie imaginaire du complexe $\dfrac{i-2}{1+i^3}$?
□ -1
♣ $-1/2$
□ $-i$
□ $-i/2$
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.3) Que vaut la dérivée de la fonction $x\mapsto\cos(\cos(x))$?
□ $x\mapsto-\sin(\cos(x))$
□ $x\mapsto-\cos(\sin(x))$
□ $x\mapsto-\sin(\sin(x))\ \sin(x)$
♣ $x\mapsto\sin(\cos(x))\ \sin(x)$
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.