Année académique 2022-2023

Corrigé de l'examen de MATH2007 du lundi 21 août 2023

Version 18 juillet 2023

QUESTIONNAIRE

Théorie 1.
Si α et β sont des réels vérifiant l'inégalité $\alpha^2 - 4\beta > 0$, **démontrer que le polynôme** $x \mapsto x^2 + \alpha x + \beta$ (où x désigne l'inconnue réelle) possède **exactement** deux zéros réels.

Théorie 2.
(2.1) On donne une fonction continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Donner la **définition** de l'intégrabilité de cette fonction sur l'intervalle considéré (on demande donc la définition, et non une condition suffisante d'intégrabilité).
(2.2) Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le réel θ pour que la fonction $x \mapsto 1/x^{\theta^2}$ soit intégrable sur $[1, +\infty[$?
(2.3) **Utiliser la définition donnée en (2.1)** pour démontrer que la condition donnée en (2.2) est bien nécessaire et suffisante à l'intégrabilité de $x \mapsto 1/x^{\theta^2}$ sur $[1, +\infty[$.

Théorie 3. QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)
Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et **colorier complètement** la case qui la précède sur cette feuille.

(3.1) Parmi les fonctions f suivantes, laquelle est injective ?
□ $f(x) = x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$
□ $f(x) = \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$
□ $f(x) = \ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}_0$
□ $f(x) = e^{x^2},\ x \in \mathbb{R}$
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.2) Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ et soit g une fonction à valeurs réelles, dérivable sur $]c, d[$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?
□ Si l'image de g est incluse dans $]a, b[$ alors $F = fog$ est dérivable sur $]c, d[$ et on a $DF = Df\,Dg$ sur $]c, d[$.
□ Si l'image de g contient l'intervalle $]a, b[$ alors $F = fog$ est dérivable sur $]a, b[$ et on a $DF = Df\,Dg$ sur $]a, b[$.
□ Si l'image de g est incluse dans $]a, b[$ alors $F = fog$ est dérivable sur $]c, d[$ et on a $DF(x) = Df(y)\,Dg(x)$ sur $]c, d[$, avec $y = g(x)$.
□ Si l'image de g contient l'intervalle $]a, b[$ alors $F = fog$ est dérivable sur $]a, b[$ et on a $DF(x) = Df(y)\,Dg(x)$ sur $]a, b[$, avec $y = g(x)$.
□ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3.3) Soient f, g deux fonctions définies sur $]0, 1]$. Si la limite des valeurs de f en 0^+ est infinie et si la limite des valeurs de g en 0^+ est un réel alors la limite des valeurs du quotient f/g en 0^+
□ est toujours un réel.
□ n'est jamais un réel.
□ n'est jamais infinie.
□ est toujours infinie.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.4) Soit f une fonction dérivable sur $]0, 3[$, à valeurs réelles et telle que $f(1) = f(2)$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours exacte ?
□ Pour au moins un réel $r \in]1, 2[$ la tangente au graphique de f en $(r, f(r))$ est horizontale.
□ La fonction est constante sur $]1, 2[$.
□ La fonction est injective sur $]1, 2[$.
□ La dérivée de la fonction est monotone sur $]1, 2[$.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.5) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est erronée ?
□ Si f_1 et f_2 sont solutions d'une même équation différentielle linéaire à coefficients constants alors $f_1 + f_2$

est solution de cette même équation.
□ Si f_1 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants et f_2 solution de l'équation homogène associée alors $f_1 - f_2$ est solution de l'équation non homogène.
□ Si f_1 et f_2 sont solutions d'une même équation différentielle linéaire à coefficients constants alors $f_1 - f_2$ est solution de l'équation homogène associée
□ La fonction $f(x) = e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ est la seule solution de $Du(x) - 2u(x) = 0$ vérifiant $f(1/2) = e$
□ Au moins une des propositions précédentes est erronée.

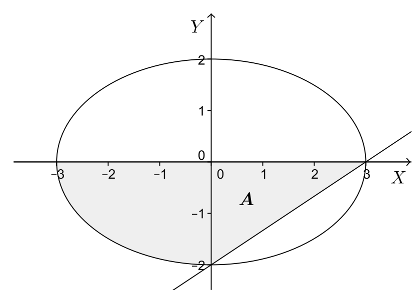
Exercices

1. (1.1) Si $x \leqslant 1/4$, déterminer les solutions de l'inéquation
$$\left|-x^2 - |1-2x|\right| < 1.$$
(1.2) Si $w = 1 - i$, calculer la partie imaginaire ainsi que le module de $z = w/(1-w)$.
(1.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x
$$\sin(2x) - \cos(2x) = 1.$$
Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-3\pi/2, 0]$.

2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.
$$\text{(2.1)} \quad \lim_{x\to(-1/2)^-} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x+1}\right) \qquad\qquad \text{(2.2)} \quad \lim_{x\to+\infty} (\ln(x+1)\ \exp(-x))$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.
$$\text{(3.1)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)}\ dx \qquad\qquad \text{(3.2)} \quad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(x)\ \sin(x)\ \ dx$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé grisé suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une ellipse et l'autre est une droite).



5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$D^2 f(x) + 9Df(x) = e^{2x}.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
Un radiateur contient 8 *l d'un mélange d'eau et d'antigel. Si* 60 % *du mélange est de l'antigel, quelle quantité du mélange initial doit-on enlever et remplacer par de l'eau pure pour que le mélange final contienne* 50 % *d'antigel ?*

7. QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)
(7.1) Que vaut le sinus de $\pi/2 - 4$?
□ $\sqrt{1 - \sin^2(4)}$
□ $|\sin(4))|\ \text{cotan}(4)$

☐ $2\cos(2)$
☐ n'existe pas
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.2) Que vaut $\arccos(-1/\sqrt{2})$?
☐ $-\pi/4$
☐ $\pi/4$
☐ $3\pi/4$
☐ $5\pi/4$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(7.3) Que vaut la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(\sin(x))$?
☐ $x \mapsto -\sin(\cos(x))$
☐ $x \mapsto -\sin(\sin(x))$
☐ $x \mapsto -\sin(\sin(x))\,\cos(x)$
☐ $x \mapsto \sin(\cos(x))\,\sin(x)$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

CORRIGE

Théorie

Théorie 1, 2.
Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 3. QCM

(3.1) Parmi les fonctions f suivantes, laquelle est injective ?
□ $f(x) = x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$
□ $f(x) = \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$
□ $f(x) = \ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}_0$
□ $f(x) = e^{x^2},\ x \in \mathbb{R}$
♣ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.2) Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ et soit g une fonction à valeurs réelles, dérivable sur $]c, d[$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?
□ Si l'image de g est incluse dans $]a, b[$ alors $F = fog$ est dérivable sur $]c, d[$ et on a $DF = Df\, Dg$ sur $]c, d[$.
□ Si l'image de g contient l'intervalle $]a, b[$ alors $F = fog$ est dérivable sur $]a, b[$ et on a $DF = Df\, Dg$ sur $]a, b[$.
♣ Si l'image de g est incluse dans $]a, b[$ alors $F = fog$ est dérivable sur $]c, d[$ et on a $DF(x) = Df(y)\, Dg(x)$ sur $]c, d[$, avec $y = g(x)$.
□ Si l'image de g contient l'intervalle $]a, b[$ alors $F = fog$ est dérivable sur $]a, b[$ et on a $DF(x) = Df(y)\, Dg(x)$ sur $]a, b[$, avec $y = g(x)$.
□ Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

(3.3) Soient f, g deux fonctions définies sur $]0, 1]$. Si la limite des valeurs de f en 0^+ est infinie et si la limite des valeurs de g en 0^+ est un réel alors la limite des valeurs du quotient f/g en 0^+
□ est toujours un réel.
□ n'est jamais un réel.
□ n'est jamais infinie.
♣ est toujours infinie.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.4) Soit f une fonction dérivable sur $]0, 3[$, à valeurs réelles et telle que $f(1) = f(2)$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est toujours exacte ?
♣ Pour au moins un réel $r \in]1, 2[$ la tangente au graphique de f en $(r, f(r))$ est horizontale.
□ La fonction est constante sur $]1, 2[$.
□ La fonction est injective sur $]1, 2[$.
□ La dérivée de la fonction est monotone sur $]1, 2[$.
□ Aucune des autres propositions n'est correcte.

(3.5) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est erronée ?
♣ Si f_1 et f_2 sont solutions d'une même équation différentielle linéaire à coefficients constants alors $f_1 + f_2$ est solution de cette même équation.
□ Si f_1 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants et f_2 solution de l'équation homogène associée alors $f_1 - f_2$ est solution de l'équation non homogène.
□ Si f_1 et f_2 sont solutions d'une même équation différentielle linéaire à coefficients constants alors $f_1 - f_2$ est solution de l'équation homogène associée
□ La fonction $f(x) = e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ est la seule solution de $Du(x) - 2u(x) = 0$ vérifiant $f(1/2) = e$
□ Au moins une des propositions précédentes est erronée.

Exercices

1. **(1.1) Si $x \leqslant 1/4$, déterminer les solutions de l'inéquation**

$$\left|-x^2 - |1-2x|\right| < 1.$$

Solution. D'une part, comme le carré d'un réel est un réel positif et comme la valeur absolue d'un réel est un réel positif également, on a $\left|-x^2 - |1-2x|\right| = x^2 + |1-2x|$ quel que soit x. D'autre part, $|1-2x| = 1-2x$ si $x \leq 1/2$ et $|1-2x| = 2x-1$ si $x \geq 1/2$. Cela étant, comme on ne doit considérer que $x \leq 1/4$ (cf énoncé), on a $x \leq 1/2$ et donc $|1-2x| = 1-2x$. Ainsi, pour $x \leq 1/4$, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\left|-x^2 - |1-2x|\right| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 - 2x < 1\\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x < 0\\ &\Leftrightarrow \quad x(x-2) < 0.\end{aligned}$$

On a $x(x-2) < 0$ si et seulement si $x \in]0,2[$; comme on ne doit considérer que des réels x inférieurs ou égaux à $1/4$, les solutions de l'inéquation de départ sont les réels de l'intervalle $]0,1/4]$.

(1.2) Si $w = 1-i$, calculer la partie imaginaire ainsi que le module de $z = w/(1-w)$.
Solution. On a

$$z = \frac{w}{1-w} = \frac{1-i}{i} = -1-i$$

et dès lors

$$\Im(z) = -1, \quad |z| = \sqrt{2}.$$

(1.3) Résoudre l'équation suivante en l'inconnue réelle x

$$\sin(2x) - \cos(2x) = 1.$$

Donner ensuite les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-3\pi/2, 0]$.
Solution. On a successivement

$$\begin{aligned}\sin(2x) - \cos(2x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin(x)\,\cos(x) = 1 + \cos(2x)\\ &\Leftrightarrow \quad 2\sin(x)\,\cos(x) = 2\cos^2(x)\\ &\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = \cos(x)\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}\ : x = \pi/2 + k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z}\ : x = \pi/4 + k\pi.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-3\pi/2, 0]$ sont les réels

$$-\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}.$$

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$(2.1) \quad \lim_{x\to(-1/2)^-} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x+1}\right) \qquad\qquad (2.2) \quad \lim_{x\to+\infty} (\ln(x+1)\,\exp(-x))$$

Solution. **(2.1)** La fonction dont on doit chercher la limite en $(-1/2)^-$ est définie sur $[-2,2] \setminus \{-1/2\}$; comme tout intervalle ouvert centré en $-1/2$ rencontre cet ensemble, on peut envisager la limite demandée.
Cela étant, on a

$$\lim_{x\to(-1/2)^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-1/4} = \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to(-1/2)^-} (2x+1) = 0^-;$$

il s'ensuit que

$$\lim_{x\to(-1/2)^-}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x+1}\right) \;=\; -\infty.$$

(2.2) La fonction dont on doit chercher la limite en $+\infty$ est définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, ensemble non majoré ; on peut donc envisager la limite demandée.
Cela étant, comme on a $\lim_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\exp(-x)=0$, on se trouve devant le cas indéterminé $\ll\ \infty\times 0\ \gg$. Pour essayer de lever l'indétermination en utilisant le théorème de l'Hospital, on écrit alors

$$\ln(x+1)\ \exp(-x) \;=\; \frac{\ln(x+1)}{\exp(x)}.$$

Pour lever l'indétermination $\ll\ \infty/\infty\ \gg$, en utilisant le théorème de l'Hospital, il faut en vérifier les hypothèses d'application. Avec $V=]0,+\infty[$, on a
1) $f:x\mapsto\ln(x+1)$ et $g:x\mapsto\exp(x)$ dérivables sur V
2) $Dg(x)=\exp(x)\neq 0,\ \forall x\in V$
3) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$
et
4)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Df(x)}{Dg(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)\exp(x)}\right)=0$$

Dès lors, la limite cherchée vaut 0.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

(3.1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\,dx$ (3.2) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(x)\,\sin(x)\,dx$

Solution. **(3.1)** La fonction $x\mapsto 1/(x(x+1))$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, donc sur l'intervalle fermé non borné $[1,+\infty[$. Comme cette fonction est à valeurs positives sur cet intervalle, elle y est intégrable si la limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x(x+1)}\,dx$$

est finie et l'intégrale sur $[1,+\infty[$ est alors la valeur de cette limite.
Cela étant, quel que soit le réel x différent de 0 et de -1, on a

$$\frac{1}{x(1+x)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int_1^t\frac{1}{x(1+x)}\,dx &= \int_1^t\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx\\
&= \int_1^t D\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx\\
&= \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)+\ln(2).
\end{aligned}$$

Comme on a

$$\lim_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)=\lim_{y\to1}\ln(y)=0,$$

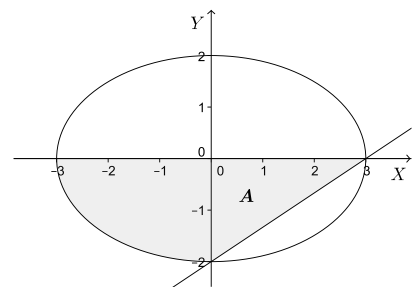
on en déduit que

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}\,dx \;=\; \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x(x+1)}\,dx \;=\; \ln(2).$$

(3.2) La fonction $x \mapsto \cos(x)\,\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle $[\pi/4, \pi/2]$; comme celui-ci est fermé borné, la fonction y est intégrable. Cela étant, comme $\cos(x)\,\sin(x) = \sin(2x)/2$ quel que soit le réel x, une intégration par variation de primitive donne directement

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(x)\sin(x)\ dx &= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(2x)\ dx\\ &= -\frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/2} D\cos(2x)\ dx\\ &= -\frac{1}{4}\big(\cos(\pi)-\cos(\pi/2)\big)\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé grisé suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une ellipse et l'autre est une droite).**



Solution. L'ellipse représentée a pour équation cartésienne $x^2/9 + y^2/4 = 1$. La droite représentée passe par les points de coordonnées $(0, -2)$ et $(3, 0)$; elle a donc pour équation cartésienne $x/3 = (y+2)/2$ ou encore $2x - 3y = 6$. Dès lors, la description demandée pour A est la suivante :

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-3,0],\ -2\sqrt{1-x^2/9} \leq y \leq 0\Big\} \cup \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,3],\ 2x/3-2 \leq y \leq 0\Big\}.$$

5. **Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle**

$$D^2 f(x) + 9Df(x) = e^{2x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f + 9Df = 0$; dès lors, le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 9z$ dont les zéros sont 0 et -9. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1\, e^{0x} + c_2\, e^{-9x} = c_1 + c_2\, e^{-9x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto e^{2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une fonction de type « exponentielle-polynôme » et que 2 n'est pas zéro du polynôme caractéristique, une solution particulière a la forme $f_P(x) = Ae^{2x}$ ($x \in \mathbb{R}$), où A est une constante a déterminer. On a

$$D^2 f_P(x) + 9Df_P(x) = 4Ae^{2x} + 18Ae^{2x} = e^{2x} \ \Leftrightarrow\ 22A = 1 \Leftrightarrow\ A = 1/22.$$

Une solution particulière est donc la fonction

$$f_P(x) = \frac{e^{2x}}{22},\ x \in \mathbb{R}.$$

En conclusion les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$x \mapsto c_1 + c_2\, e^{-9x} + \frac{e^{2x}}{22},\ x \in \mathbb{R},$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un radiateur contient 8 l ***d'un mélange d'eau et d'antigel. Si*** 60 % ***du mélange est de l'antigel, quelle quantité du mélange initial doit-on enlever et remplacer par de l'eau pure pour que le mélange final contienne*** 50 % ***d'antigel ?***

   Solution. Soit $x > 0$ le nombre de litres de mélange à retirer et à remplacer par de l'eau pure. On aura donc $8 - x$ litres de mélange à 60% et x litres d'eau pure pour obtenir un mélange de 8 litres à 50%. Dès lors, en égalant la quantité d'antigel pur, on obtient l'équation

$$(8-x) \times \frac{60}{100} = 8 \times \frac{50}{100}.$$

   On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} (8-x) \times \frac{60}{100} = 8 \times \frac{50}{100} \quad &\Leftrightarrow \quad (8-x) \times 6 = 8 \times 5 \\ &\Leftrightarrow \quad (8-x) \times 3 = 4 \times 5 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 4/3. \end{aligned}$$

   Ainsi, on doit enlever $4/3$ de litres du mélange initial et le remplacer par de l'eau pure pour obtenir un mélange final contenant 50% d'antigel.

7. **(7.1)** Que vaut le sinus de $\pi/2 - 4$?
☐ $\sqrt{1 - \sin^2(4)}$
☐ $|\sin(4))| \operatorname{cotan}(4)$
☐ $2\cos(2)$
☐ n'existe pas
♣ Aucune des autres propositions n'est correcte.

   (7.2) Que vaut $\arccos(-1/\sqrt{2})$?
☐ $-\pi/4$
☐ $\pi/4$
♣ $3\pi/4$
☐ $5\pi/4$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

   (7.3) Que vaut la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(\sin(x))$?
☐ $x \mapsto -\sin(\cos(x))$
☐ $x \mapsto -\sin(\sin(x))$
♣ $x \mapsto -\sin(\sin(x))\,\cos(x)$
☐ $x \mapsto \sin(\cos(x))\,\sin(x)$
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.