Année académique 2021-2022
Math2007

Erratum pour le syllabus de théorie : intégration par variation de primitive (cf cours du lundi 8 novembre 2021)

<u>Théorème.</u> Soit $f \in C_0([a,b])$ avec a, b réels et $a < b$.
1) Pour tous $t_0, t \in]a,b[$, on a

$$\int_{t_0}^{t} f(x)\ dx \ = \ F(t) - F(t_0)$$

où F est une primitive de f sur $]a,b[$.

2) Toute primitive de f sur $]a,b[$ admet des limites finies en a^+ et en b^- ; dès lors toute primitive sur $]a,b[$ se prolonge en une fonction continue sur $[a,b]$.

3) Si F est une primitive de f sur $]a,b[$ et si on note $F(a), F(b)$ respectivement les limites en a^+ et en b^- de F, on a

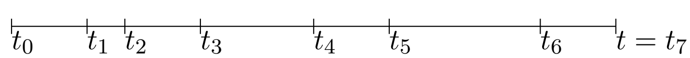
$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx \ = \ F(b) - F(a)$$

Preuve. On considère F à valeurs réelles. Le même résultat est valable lorsque F est à valeurs complexes car il suffit de procéder avec les parties réelles et imaginaires puis de faire une addition.

1) Supposons $t_0 < t$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tous réels t_j $(j = 1, \ldots, n)$ tels que $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < b$, on a

$$\begin{aligned}
&F(t) - F(t_0) \\
&\quad = \ F(t) - F(t_n) + F(t_n) - F(t_{n-1}) + F(t_{n-1}) - F(t_{n-2}) + \ldots + F(t_1) - F(t_0) \\
&\quad = \ \Big(F(t) - F(t_n)\Big) \ + \ \Big(F(t_n) - F(t_{n-1})\Big) \ + \Big(F(t_{n-1}) - F(t_{n-2})\Big) + \ldots + \ \Big(F(t_1) - F(t_0)\Big) \\
&\quad = \ \sum_{j=1}^{n+1} \Big(F(t_j) - F(t_{j-1})\Big)
\end{aligned}$$

en définissant $t_{n+1} = t$.



Cela étant, pour tous $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, puisque F est dérivable sur $]a,b[$ et que $a < t_{j-1} < t_j < b$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $u_j \in]t_{j-1}, t_j[$ tel que

$$F(t_j) - F(t_{j-1}) \ = \ (t_j - t_{j-1})\, DF(u_j) \ = \ (t_j - t_{j-1})\, f(u_j).$$

Si on désigne par σ_n le découpage formé par les t_j et les u_j (obtenus par le TAF), on a donc

$$F(t) - F(t_0) \ = \ \sum_{j=1}^{n+1} (t_j - t_{j-1})\, f(u_j).$$

La somme du second membre est une somme $S(f, \sigma_n)$ qui intervient dans la définition de l'intégrale de f sur $[t_0, t]$. Si on prend soin de considérer une suite σ_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ de découpages dont la largeur tend vers 0, on obtient donc

$$F(t) - F(t_0) \;=\; \lim_{n \to +\infty} S(f, \sigma_n) \;=\; \int_{t_0}^{t} f(x)\, dx$$

comme annoncé.

Pour $t_0 = t$, l'égalité annoncée est vraie aussi car par convention le membre de droite est nul et bien sûr $F(t) - F(t_0) = 0$ également.

Si $t_0 > t$, le même développement conduit à l'égalité

$$\int_{t}^{t_0} f(x)\, dx \;=\; F(t_0) - F(t)$$

et comme par convention $\int_{t_0}^{t} f(x)\, dx \;=\; -\; \int_{t}^{t_0} f(x)\, dx$, on obtient aussi

$$\int_{t_0}^{t} f(x)\, dx \;=\; F(t) - F(t_0).$$

2) Soit F une primitive de f sur $]a, b[$. Par le point précédent, pour tous $t_0, t \in]a, b[$ on a

$$\int_{t_0}^{t} f(x)\, dx \;=\; F(t) - F(t_0)$$

donc

$$F(t) \;=\; F(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x)\, dx \quad \text{et} \quad F(t_0) \;=\; F(t) - \int_{t_0}^{t} f(x)\, dx. \quad (*)$$

Comme f est intégrable sur $[a, b]$, on a

$$\lim_{t \to b^-} \int_{t_0}^{t} f(x)\, dx \;=\; \int_{t_0}^{b} f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \lim_{t_0 \to a^+} \int_{t_0}^{t} f(x)\, dx \;=\; \int_{a}^{t} f(x)\, dx$$

Les égalités (*) impliquent alors que F admet bien une limite finie en b^- et a^+ ; on note $F(b)$ et $F(a)$ la valeur de celles-ci.

3) Enfin, en reprenant 1) et 2), on obtient

$$\int_{t_0}^{b} f(x)\, dx \;=\; \lim_{t \to b^-} \int_{t_0}^{t} f(x)\, dx \;=\; F(b) - F(t_0)$$

puis

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx \;=\; \lim_{t_0 \to a^+} \int_{t_0}^{b} f(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a)$$

et on conclut. $\square$

On déduit du point 1 que, quel que soit $t_0 \in]a, b[$, la fonction

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} f(x)\, dx$$

est une primitive de f sur $]a, b[$. C'est même LA primitive qui s'annule en t_0.