et la somme des longueurs de ces segments est

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} l_k.$$

Par application du théorème des accroissements finis, il existe $r_k \in ]x_{k-1}, x_k[$ $(k = 1, \dots, n)$ tels que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = Df(r_k)\ (x_k - x_{k-1}).$$

Dès lors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (Df(r_k))^2}\ (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} F(r_k)(x_k - x_{k-1})$$

avec

$$F(x) = \sqrt{1 + (Df(x))^2}.$$

Remplacer t_0, .., t_n par x_0,…,x_n

Cette fonction $F$ est, par hypothèse, continue sur $[a, b]$. Si on prend successivement des points $t_0, \dots t_n$ tels que la suite $\sup_{k=1,\dots,n}(x_k - x_{k-1})$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ converge vers 0, la définition de l'intégrale fournit

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b F(x)\ dx = \int_a^b \sqrt{1 + (Df(x))^2}\ dt.$$

La variable d'intégration est x et non t

On est ainsi amené à la définition suivante.

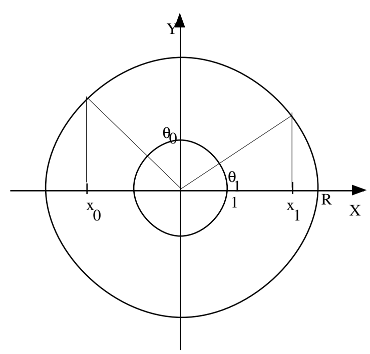
**Définition 4.5.1** *Soit une fonction $f$ dont la dérivée est continue sur $[a, b]$. La longueur de la courbe qui représente $f$ est définie par*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (Df(x))^2}\ dx.$$

La définition donnée ci-dessus se généralise au cas où $x \mapsto \sqrt{1 + (Df(x))^2}$ est une fonction intégrable sur $]a, b[$.

Exemple

Par exemple, calculons la longueur d'un arc de cercle.




Supposons que la courbe soit une partie de la représentation graphique de $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. On a

$$Df(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Si $\theta_0, \theta_1 \in [0, \pi]$ sont tels que $R\cos\theta_0 = x_0,\ R\cos\theta_1 = x_1$ alors

$$\begin{aligned}
L &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (Df(x))^2}\ dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\ dx \\
&= -R\int_{x_0}^{x_1} D\arcos(\frac{x}{R})\ dx = R\ \left(\arcos(\frac{x_0}{R}) - \arcos(\frac{x_1}{R})\right) \\
&= R\ (\theta_0 - \theta_1).
\end{aligned}$$