Annexe A

Petit formulaire pour les mathématiques et les sciences

A.1 L'alphabet grec

alpha	α	iota	ι	rhô	ρ
bêta	β	kappa	κ	sigma	σ, Σ
gamma	γ, Γ	lambda	λ, Λ	tau	τ
delta	δ, Δ	mu	μ	upsilon	υ, Υ
epsilon	ϵ, ε	nu	ν	phi	ϕ, φ, Φ
zêta, dzêta	ζ	xi, ksi	ξ, Ξ	khi	χ
êta	η	omicron	o	psi	ψ, Ψ
thêta	$\theta, \vartheta, \Theta$	pi	π, Π	omega	ω, Ω

A.2 Symboles usuels du langage mathématique

Notations habituelles pour les ensembles classiques de nombres

$\mathbb{N}$	ensemble des naturels positifs ou nul
$\mathbb{N}_0$	ensemble des naturels strictement positifs
$\mathbb{Z}$	ensemble des nombres entiers
$\mathbb{Z}_0$	ensemble des nombres entiers non nuls
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{Q}_0$	ensemble des nombres rationnels non nuls
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_0$	ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}_0$	ensemble des nombres complexes non nuls

Notations relevant de la théorie des ensembles

Un ensemble est désigné soit explicitement, en notant ses éléments entre accolades, soit de façon générique en utilisant (le plus souvent) une lettre majuscule. Ainsi, l'ensemble dont les éléments sont a, b, c, d, e est noté explicitement $\{a, b, c, d, e\}$. Lorsque l'ensemble contient une infinité d'éléments, on adapte cette notation.

Dans ce qui suit, A, B désignent deux ensembles.

Notation	Signification
$a \in A$	a appartient à l'ensemble A ou a est un élément de A
$A \subset B$	l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B
	c'est-à-dire tout élément de A est un élément de B
$A = B$	les ensembles A et B sont les mêmes
	c'est-à-dire tout élément de A est élément de B et tout élément de B est élément de A
	c'est-à-dire $A \subset B$ et $B \subset A$
$A \cap B$	ensemble intersection de A et de B
	c'est-à-dire l'ensemble des élements qui appartiennent à la fois à A et à B
$A \cup B$	ensemble union de A et de B
	c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B
	c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A et pas à B, soit à B et pas à A, soit à A et à B
$\emptyset$	ensemble vide
	c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément
$A \setminus B$	ensemble A moins B
	c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B

Par exemple, l'ensemble des réels en lesquels la fonction cosinus s'annule est l'ensemble des réels qui sont égaux à $\pi/2$ auquel on ajoute un multiple entier de π ; cet ensemble est noté

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

L'ensemble de définition de la fonction tangente, quotient de la fonction sinus par la fonction cosinus, est l'ensemble des réels pour lesquels le cosinus ne s'annule pas ; il s'agit donc de l'ensemble

$$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Notations relevant de la logique élémentaire

Soient P, Q deux propositions

Notation	Signification
$P \Rightarrow Q$	si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie ;
	on dit aussi
	- *il suffit que la proposition P soit vraie pour que Q le soit aussi,*
	- *il est nécessaire que la proposition Q soit vraie pour que P soit vrai,*
	- *pour que la proposition Q soit vraie, il est suffisant que P soit vrai*
	- *pour que la proposition P soit vraie, il est nécessaire que Q soit vrai*
$P \Leftrightarrow Q$	P et Q sont des propositions équivalentes
	c'est-à-dire $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$
$\forall$	pour tout
$\forall x \in A$ on a ...	pour tout (ou quel que soit) l'élément x de l'ensemble A, on a ...
$\exists$	il existe
$\exists x \in A$ tel que ...	il existe un élément x de l'ensemble A tel que ...

A.3 Rappels sur les triangles et les angles

Cas d'égalité des triangles

Deux triangles sont dits égaux s'ils sont « superposables » c'est-à-dire si on obtient l'un à partir de l'autre par un déplacement dans le plan (qui n'affecte pas leur rigidité) ou encore si on obtient l'un à partir de l'autre par une translation suivie d'une rotation.

Deux triangles sont égaux dans chacun des cas suivants :
- ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun
- ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun
- ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

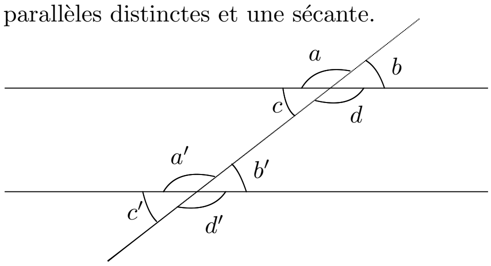
Cas de similitude des triangles

Deux triangles sont dits semblables si on obtient l'un à partir de l'autre par une similitude. (En géométrie, une similitude est une transformation qui conserve les rapports de distances.)

Deux triangles sont semblables dans chacun des cas suivants :
- ils ont deux angles égaux chacun à chacun
- ils ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels
- ils ont les trois côtés proportionnels
- ils ont leurs côtés parallèles chacun à chacun
- ils ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun.

Cas d'égalité des angles

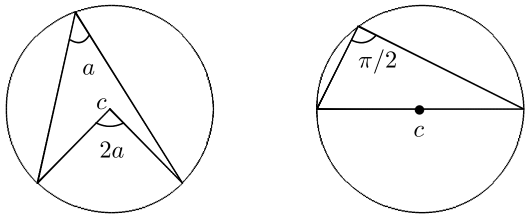
Considérons deux droites parallèles distinctes et une sécante.



Les angles alternes internes $c,\ b'$ (resp. $d,\ a'$) sont égaux.
Les angles alternes externes $a,\ d'$ (resp. $b,\ c'$) sont égaux.
Les angles opposés par le sommet b et c (resp. a et d, b' et c', a' et d') sont égaux.
Les angles correspondants a et a'(resp. b et b', c et c', d et d') sont égaux.

Angles et cercle

Un angle inscrit dans un cercle a la mesure de la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



A.4 Quelques relations fondamentales de trigonométrie

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 2π. On a

$$\sin x = 0 \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi; \qquad \cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Pour tout réel x qui n'annule pas le dénominateur, on a

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

On a les relations suivantes (et de nombreuses conséquences !) pour tous réels x, y

$\cos(-x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ $\qquad$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\qquad$ $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Relations dans les triangles

On désigne par A, B, C les sommets d'un triangle et par a, b, c les longueurs des côtés opposés respectivement à ces sommets. Enfin, les mesures des angles (orientés positivement) de ce triangle sont respectivement appelées α, β, γ.

Triangle quelconque

On a les formules suivantes.

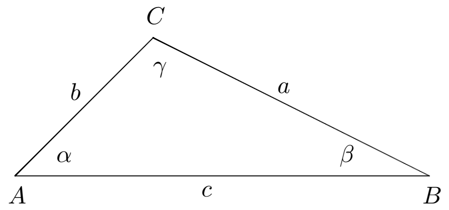
$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\ \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\ \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\ \gamma$

$$\frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{b}{\sin\ \beta} = \frac{c}{\sin\ \gamma}$$



Triangle rectangle

Dans le cas particulier des triangles rectangles, les relations ci-dessus se simplifient de la manière suivante.

Le côté opposé à l'angle droit (ici α) se nomme hypoténuse.

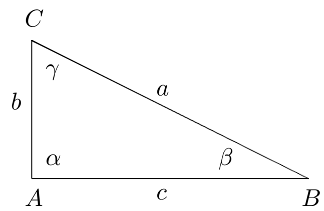
On a les formules suivantes :

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ avec un des angles égal à $\pi/2$

$b = a\ \sin\beta = a\ \cos\gamma = c\ \tan\ \beta = c\ \text{cotan}\ \gamma$

$c = a\ \sin\gamma = a\ \cos\beta = b\ \tan\ \gamma = b\ \text{cotan}\ \beta$

$a^2 = b^2 + c^2$

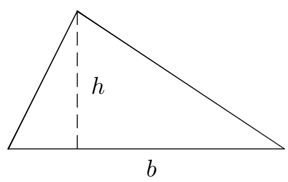


Dans un triangle rectangle, la longueur d'un côté de l'angle droit est égale à
- la longueur de l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé ou le cosinus de l'angle adjacent
- la longueur de l'autre côté multipliée par la tangente de l'angle opposé ou la cotangente de l'angle adjacent.

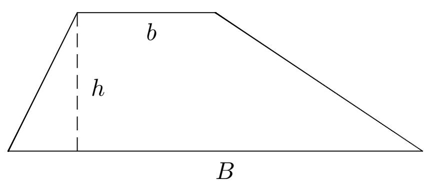
Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

A.5 Aires et volumes

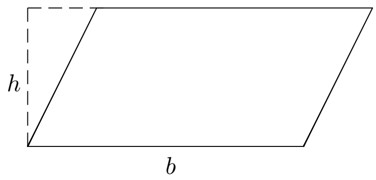
Aire d'un triangle =
la moitié du produit de la longueur d'un côté (b) et de la hauteur correspondante (h) c'est-à-dire $bh/2$



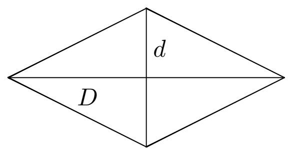
Aire d'un trapèze =
la moitié du produit de sa hauteur (h) par la somme des longueurs de ses bases (B et b) c'est-à-dire $(B + b)h/2$



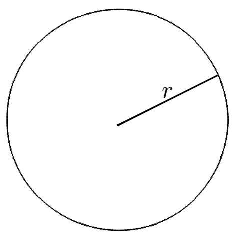
Aire d'un parallélogramme =
le produit de la longueur d'un côté (b) par la hauteur correspondante (h) c'est-à-dire bh



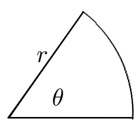
Aire d'un losange =
la moitié du produit des longueurs de ses diagonales (D et d) c'est-à-dire $Dd/2$



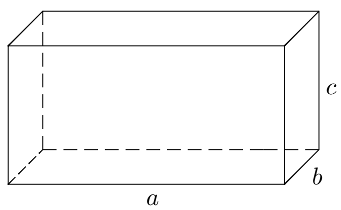
Aire d'un disque de rayon de longueur r =
le produit de π par le carré de la longueur du rayon (r) c'est-à-dire πr^2
Longueur de la circonférence (cercle) =
le double du produit de π par la longueur de son rayon (r) c'est-à-dire $2\pi r$



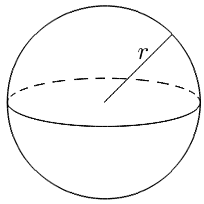
Aire d'une partie de disque de rayon r =
la moitié du produit de la mesure de l'angle en radian (θ) par le carré de la longueur du rayon (r) c'est-à-dire $\theta r^2/2$.
Longueur d'une partie de circonférence (cercle) =
le produit de la mesure de l'angle en radian (θ) par la longueur du rayon (r) c'est-à-dire θr



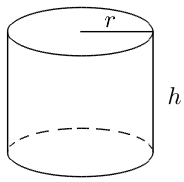
Volume d'un parallélépipède (dont les arêtes ont pour longueur a, b, c) = abc
Aire totale des 6 faces d'un parallélépipède = $2ab + 2ac + 2bc$



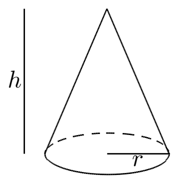
Volume d'une boule dans l'espace (volume sphérique) de rayon r =
le produit du cube de la longueur du rayon (r) par quatre tiers de π c'est-à-dire $4\pi r^3/3$
Aire d'une sphère =
le quadruple du produit du carré de la longueur du rayon (r) par π c'est-à-dire $4\pi r^2$



Volume d'un corps cylindrique de rayon r et de hauteur h =
le produit de l'aire du disque par la hauteur (h) du cylindre c'est-à-dire $\pi r^2 h$
Aire latérale d'un cylindre (surface cylindrique), sans compter les disques des bases =
le produit de la longueur du cercle par la hauteur (h) du cylindre c'est-à-dire $2\pi rh$



Volume d'un corps conique de hauteur h et dont la base a un rayon r =
le tiers du volume du cylindre de hauteur h et de base de même rayon c'est-à-dire $\pi r^2 h/3$
Aire latérale d'un cône, sans compter le disque de base = $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$



A.6 Dérivées des fonctions élémentaires

Dans ce qui suit, x désigne une variable réelle, m désigne un naturel strictement positif et r désigne un réel. Certaines dérivées peuvent être obtenues à partir d'autres ; il y a également de nombreuses autres expressions que l'on peut obtenir à partir de celles-ci !

Expression fonction	Domaine de définition et de continuité	Domaine de dérivabilité	Expression dérivée
r	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^m	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	mx^{m-1}
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotan} x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x}$
$\exp x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\exp x$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcotan} x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{x}$
x^r	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	rx^{r-1}