Remédiation 1 (MATH 2007): Rappels sur la matière de base du secondaire

1. Opérations et priorité

1) Fraction

- Les dénominateurs sont supposés non nuls, ils peuvent être entier ou non

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

Attention : il faut choisir le dénominateur commun judicieusement dans les exercices.

- Tout nombre entier est une fraction
  Exemple : $3=\frac{3}{1}$
  Donc $\frac{1}{4}:3=\frac{1}{4}:\frac{3}{1}=\frac{1}{4}.\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

- Attention aux parenthèses implicites
  $$\frac{x-2}{4}=\frac{x-2}{4}$$
  donc $\frac{x}{2}-\frac{x-2}{4}=\frac{2x}{4}-\frac{(x-2)}{4}=\frac{2x-x+2}{4}=\frac{x+2}{4}$
- Simplification : On peut simplifier quand on a des facteurs en communs. Parfois, on y parvient à l'aide d'une factorisation préalable.
  Exemples
  (1) $\frac{x-2}{4}$ ne se simplifie pas
  (2) $\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\frac{(x+2)(x+3)}{x+2}=x+3$ (si $x\neq -2$)
- Attention à la place et à la taille des barres de fractions
  Exemple : les deux fractions suivantes sont différentes
  $$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}:\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$$
  $$\frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{1}.\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$$

2) Puissances entières

Si $x\in\mathbb{R}$ et $m\in\mathbb{N}_0$ alors $x^m=x.x.\dots.x$ (le produit de m facteurs égaux à x)
Par convention $x^0=1$.
Si $x\in\mathbb{R}_0$ et $m\in\mathbb{N}$ alors $x^{-m}=\frac{1}{x^m}$
Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $n,m,p\in\mathbb{N}$. On a

$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^p = a^{pm}$$
$$(a.b)^m = a^m.b^m$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\ (b \neq 0)$$
$$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} (a \neq 0)$$

Exemples Simplifier et donner le résultat sans exposant négatif

a) $(a^{-3})^5$ b) $\left(\frac{x^4}{3x^3}\right)^{-2}$ c) $(-2y^5)^3$ d) $\frac{6x^{-3}y^5t^2}{t^3y^5x^{-4}4}$

3) Priorité opérations PE(MD)(AS)

Parenthèses, **E**xposant, **M**ultiplication, **D**ivision, **A**ddition, **S**oustraction

Rappel : Valeur absolue d'un réel x

$$|x| = \begin{cases} x & si\ \ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$$

Exemples

(1) $8: 4\times 2$
(2) $8 - 4 + 2$
(3) 3×2^2
(4) $15\times 4 - (6-3)\times 2^3$
(5) $|4^2 - 30| + 5^0\times 13$
(6) $\frac{40:8\times 3-7\times 15}{3^3+3-5\times 4}$

4) Exercices

1. Soient a, b, c, d des nombres strictement positifs. Que vaut l'inverse de l'opposé de $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$?
2. Si $\frac{9-a^2}{3+a} = 0{,}01$, que vaut a ?

2. Factorisation

1) Mise en évidence

$ab + ac = a(b+c)$

Remarque : $x + 3 = 3 + x$

$x - 3 = -(3 - x)$

Mais $x - 3$ ne peut pas se transformer en $x + 3$

2) Produits remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

On a aussi le développement du binôme de Newton

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} C_n^j \, a^j b^{n-j}$$

avec $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ et se lisent dans le « triangle de Pascal »

j \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	**6**	**4**	1		
5	1	5	10	**10**	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$C_n^j = C_{n-1}^{j-1} + C_{n-1}^j$$

3) **Regroupement**

Exemple :

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^2(x+3) - (x+3)$

$= (x+3)(x^2-1) = (x+3)(x-1)(x+1)$

4) **Méthode d'Horner**

La méthode d'Horner permet de mettre en évidence un facteur du type $(x-a)$.
Pour cela il faut

i. Chercher une racine évidente a du polynôme $P(x)$. On trouve cette racine parmi les diviseurs du terme indépendant et il faut que $P(a) = 0$.
ii. Placer a dans la case de gauche
iii. Reporter les coefficients du polynôme sur la première ligne dans l'ordre des exposants, attention à ne pas en oublier !
iv. « Descendre » le premier exposant sur la 3ème ligne.
v. Répéter jusqu'à la dernière case les opérations suivantes
   - Multiplier le nombre de la dernière ligne par a et placer le résultat sur la case située à droite sur la 2ème ligne.
   - Additionner les cases de la 1ère ligne et la 2ème ligne pour obtenir le nombre de la 3ème ligne.
vi. Les nombre de la 3ème ligne donnent les coefficients du polynôme de degré inférieur de 1 au polynôme de départ $P(x)$.

Exemple : Factoriser $P(x) = 2x^4 + x^3 + 2x + 1$.

Les diviseurs de 1 sont 1et -1. On a $P(-1) = 0$

	2	1	0	2	1
-1		-2	1	-1	-1
	2	-1	1	1	**0**

On a donc

$$P(x) = (2x^3 - x^2 + x + 1)(x+1)$$

5) **Factorisation d'un polynôme du second degré**

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Si $ax^2 + bx + c$ admet x_1 et x_2 comme racine, alors

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

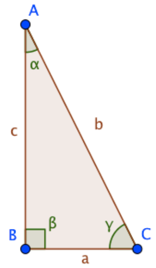
Attention, veiller à ne pas garder des fractions inutilement.

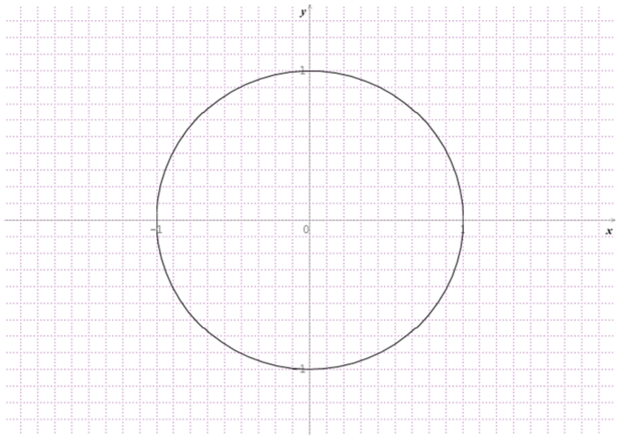
Rappel : Pour calculer x_1 et x_2 on calcul de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et si $\Delta \geq 0$ alors

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3. Trigonométrie

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$





4. Exercices

1. Factoriser les polynômes suivants :
   a) $x^3 + x^2 - 4x - 4$
   b) $x^3 + 4x^2 - 11x + 6$
   c) $x^2 + x - 1$
   d) $2x^2 + 5x - 3$
   e) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
2. Simplifier a) $\frac{2x^2+x-6}{6x^2-7x-3}$ b) $\frac{(y^2-9)(y^2+10y+25)}{y^2+8y+15}$
3. Résoudre a) $\frac{1}{x^2-4} + \frac{x-4}{x(x+2)} = \frac{1}{x(x-2)}$ b) $\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x-2} + \frac{2}{x^2-3x+2} = 0$
4. Résoudre les inéquations suivantes
   a) $\frac{x+1}{x+2} \geq \frac{3x+2}{2x+1}$
   b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} > \frac{3x+1}{x^2-1}$
5. Résoudre les équations suivantes
   a) $\sin x = \frac{1}{2}$
   b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   c) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
   d) $4\sin^4 x + 4\sin^2 x + 1 = 0$
   e) $\cos^6 x - 2\cos^3 x - 3 = 0$