MATH2007 *Mathématiques générales I*

1er bloc chimie, géologie, informatique

2020-2021

Table des matières (premier quadrimestre)

Il s'agit en fait de limites particulières : le domaine de définition des fonctions considérées est l'ensemble des naturels (ou une partie) et la limite est prise « à l'infini ».

Quelques exemples . . .

Définitions (et interprétation)

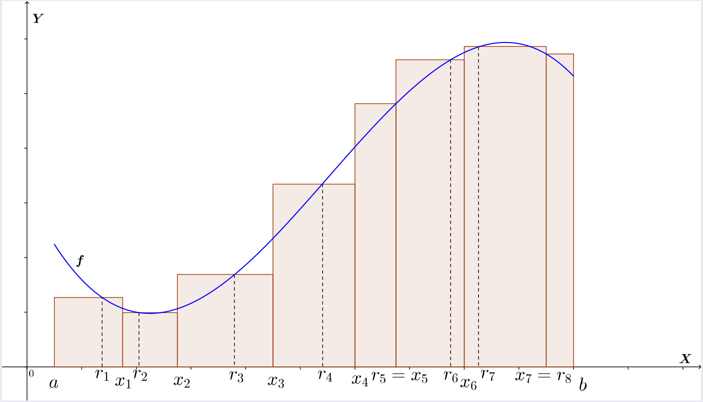
- Découpage « à la Riemann » de $[a, b]$ (notation classique : σ)
- Largeur d'un découpage (notation classique : $L(\sigma)$)
- Somme intervenant dans la définition de l'intégrabilité d'une fonction f (notation : $S(\sigma, f)$) et interprétation

Définition et interprétation

$$S(\sigma, f) = \sum_{m=1}^{M} f(r_m)(x_m - x_{m-1}).$$

Cette somme dépend du choix des x_m, des r_m et de f. Si f est à valeurs réelles, elle représente la somme des aires des rectangles (avec leur signe, car $f(r_m)$ peut être négatif) de côtés $x_m - x_{m-1}$ et $f(r_m)$ $(m = 1, \ldots, M)$.

Définition et interprétation



Définition de l'intégrabilité et de l'intégrale (d'une fonction f définie sur $[a, b]$)

On dit que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ lorsque la suite $S(\sigma_N, f)$ $(N \in \mathbb{N}_0)$ converge vers une limite fine quelle que soit la suite de découpages σ_N $(N \in \mathbb{N}_0)$ dont les largeurs constituent une suite qui converge vers 0.
On démontre alors que les limites sont les mêmes et la valeur de la limite est, par définition, l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.
Notation :

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

ou encore ...

Exemples fondamentaux

- Fonctions constantes
- Fonctions continues

Exemples fondamentaux

- Fonctions constantes
- Fonctions continues

Interprétation de l'intégrale et remarques

- Interprétation graphique dans le cas d'une fonction à valeurs réelles positives
- Définition de
$$\int_a^b f(x)\, dx$$
lorsque $a \geq b$.
- Toutes les fonctions définies sur $[a, b]$ n'y sont pas intégrables ! !

Premières propriétés de l'intégrale

- Linéarité
- Sous-intervalles
- Inégalités (avec ou sans modules)
- Propriété (limite) bien utile pour voir les généralisations (sur des intervalles non bornés fermés)

Intégration par variation de primitive

Théorème

Si f est continu sur $[a, b]$ alors toute primitive F de f sur $]a, b[$ admet des limites finies en a et en b (notées $F(a)$, $F(b)$) et on a

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

La preuve consiste à utiliser le théorème des accroissement finis dans la définition de l'intégrale. (Preuve au tableau.)

Considérons le cas d'une fonction continue sur $[a,b[$. Pour les autres intervalles ...

Définitions

La fonction $f \in C_0([a,b[)$ est dite intégrable sur $[a,b[$ si

$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t |f(x)|\, dx \quad \text{est fini.}$$

Lorsque cette limite est infinie et que

$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\, dx \quad \text{est fini}$$

on dit que f admet un intégrale fléchée en b.

Remarques : sens et différence entre les deux cas

On considère le cas d'une fonction continue sur $[a, b[$.

Propriété

Si f est intégrable sur $[a, b[$ alors

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\ dx \quad \text{est fini}$$

On considère le cas d'une fonction continue sur $[a, b[$.

Propriété

Si f est intégrable sur $[a, b[$ alors

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\ dx \quad \text{est fini}$$

Définition

Si f est intégrable sur $[a, b[$, l'intégrale de f sur cet intervalle est la valeur de la limite

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\ dx$$

Propriétés

Cf les propriétés de l'intégrale sur un intervalle fermé borné

Les cas de référence

Soit un réel s. La fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^s}$$

• est intégrable sur $[1, +\infty[$ (on dit ≪ intégrable à l'infini ≫) si et seulement si $s > 1$

• est intégrable sur $]0, 1]$ (on dit ≪ intégrable en 0 ≫) si et seulement si $s < 1$

Preuve : au tableau.

Interprétation graphique : au tableau.

Des critères d'intégralité

- Le critère de comparaison
- Cas du prolongement continu
- Des critères pratiques (qui reposent sur le critère de comparaison et sur les cas de référence)

Preuve (en partie) : au tableau.

Méthodes d'intégration

- Par variation de primitive
- Par parties
- Par changement de variables

Exemples

Quelques exemples-exercices

Quelques applications

Longueur d'une courbe, intégrale curviligne, . . .