MATH2007 *Mathématique*

1er bloc chimie, géologie & informatique

2020-2021

Maths générales : brève table des matières

Table des matières (premier quadrimestre)

Equations différentielles

- Définition d'une équation différentielle, de l'ordre d'une telle équation
- Exemples

Cas des équations linéaires à coefficients constants

Définition et structure des solutions

- En bref (avec notations à expliquer)

$$aDf + bf = g, \qquad aD^2f + bDf + cf = g$$

- Le cas « homogène »
- Signification du terme « linéaire »
- Structure de l'ensemble des solutions

Etant donnée la structure de l'ensemble des solutions, on voit que pour résoudre complètement une telle équation, il faut procéder en deux étapes.

$$aDf + bf = 0$$

où a, b, f ...

Caractérisation des solutions

L'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$f(x) = ce^{-\frac{b}{a}x}, \ \ x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante arbitraire.

Définition du polynôme caractéristique et rôle de son zéro

$$aD^2f + bDf + cf = 0$$

où a, b, c, f ...

Etude du polynôme caractéristique et de l'équation caractéristique associés

$$P(z) = az^2 + bz + c, \qquad P(z) = 0$$

Deux cas à distinguer pour les zéros du polynôme (avec impact important pour les solutions de l'équation différentielle) :

$$b^2 - 4ac = 0 \qquad b^2 - 4ac \neq 0$$

$$aD^2f + bDf + cf = 0$$

où a, b, c, f ...
On pose

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

et on désigne par

$$z_1, z_2$$

les solutions de l'équation caractéristique (ne pas oublier que si $\Delta = 0$ alors $z_1 = z_2 = -b/(2a)$).

Caractérisation des solutions

- Si $\Delta = 0$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'ordre 2 est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$(c_1 x + c_2) e^{-\frac{b}{2a}x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes arbitraires.

- Si $\Delta \neq 0$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'ordre 2 est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$c_1 e^{z_1 x} \ + \ c_2 e^{z_2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes arbitraires.

Définition des solutions fondamentales (et explication de l'emploi de ce terme)

Expression des solutions lorsque les coefficients sont réels et que $\Delta < 0$

Lorsque les coefficients a, b, c sont réels et que $\Delta < 0$, les solutions de l'équation caractéristique sont des complexes conjugués :

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, \qquad z_2 = \overline{z_1} = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

et la forme des solutions peut être revue en utilisant les fonctions sinus et cosinus.

Que peut-on dire quand au « nombre » de solutions ?

Pas d'unicité ! ! ! mais quand on fixe les « conditions initiales », alors . . .

Equation non homogène d'ordre 1

- Cas où le second membre est une fonction du type « exponentielle-polynôme »
- Le cas général

Cas des « exponentielle-polynôme »

$$\boxed{aDf(x) + bf(x) \;=\; P(x)e^{\alpha x}}$$

Si $\alpha = -\frac{b}{a}$, alors une solution est donnée par

$$f(x) = xQ(x)e^{\alpha x}$$

où ...

Si $\alpha \neq -\frac{b}{a}$, alors une solution est donnée par

$$f(x) = Q(x)e^{\alpha x}$$

où ...

Cas général

$$\boxed{aDf(x) + bf(x) \ = \ g(x)}$$

avec $g \in C_0(]a, b[)$.
Une solution (sur $]a, b[$) est donnée par

$$\frac{1}{a} \int g(x) e^{\frac{b}{a}x} dx \ \ e^{-\frac{b}{a}x}$$

On appelle cette méthode la « variation des constantes » car ...

Equation non homogène d’ordre 2

- Cas où le second membre est une fonction du type « exponentielle-polynôme »
- Le cas général

Cas des « exponentielle-polynôme »

$$\boxed{aD^2f(x) + bDf(x) + cf(x) \;=\; P(x)e^{\alpha x}}$$

- Si α n'est pas zéro du polynôme caractéristique alors une solution est donnée par

$$f(x) = Q(x)e^{\alpha x}$$

  où ...

- Si α est zéro simple du polynôme caractéristique alors (...)
- Si α est zéro double du polynôme caractéristique alors (...)

Cas des « exponentielle-polynôme »

$$\boxed{aD^2f(x) + bDf(x) + cf(x) \;=\; P(x)e^{\alpha x}}$$

- Si α n'est pas zéro du polynôme caractéristique alors (...)
- Si α est zéro simple du polynôme caractéristique alors une solution est donnée par

  $$f(x) = xQ(x)e^{\alpha x}$$

  où ...
- Si α est zéro double du polynôme caractéristique alors (...)

Cas des « exponentielle-polynôme »

$$\boxed{aD^2f(x) + bDf(x) + cf(x) \; = \; P(x)e^{\alpha x}}$$

- Si α n'est pas zéro du polynôme caractéristique alors $(\dots)$
- Si α est zéro simple du polynôme caractéristique alors $(\dots)$
- Si α est zéro double du polynôme caractéristique alors une solution est donnée par

$$f(x) = x^2 Q(x)e^{\alpha x}$$

Cas général

$$\boxed{aD^2f(x) + bDf(x) + cf(x) \;=\; g(x)}$$

avec $g \in C_0(]a, b[)$.
La méthode est encore appelée « méthode de variation des constantes » et consiste aussi à primitiver les solutions d'un système d'équations (linéaires).
Si u_1 et u_2 désignent deux solutions fondamentales de l'équation homogène et si P_1 et P_2 désignent de telles primitives, alors une solution (sur l'intervalle considéré) de l'équation est donnée par

$$P_1 u_1 + P_2 u_2$$

$$D^2 f + \frac{\gamma}{m} Df + \frac{k}{m} f = g$$

où f est l'inconnue, où g est fonction donnée, continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, où k, m sont des constantes strictement positives et où γ est une constante positive.