5.2.5 Solutions de l'équation non homogène d'ordre 1

Remarques importantes

1) Si les coefficients de l'équation sont réels, si $g = \mathcal{R}G$ et si F vérifie

$$aD_xF(x) + bF(x) = G(x), \qquad x \in I$$

Cas des fonctions sinus et cosinus!
Parties réelle et imaginaire de e^{ix}

alors $f = \mathcal{R}F$ vérifie

$$aD_xf(x) + bf(x) = g(x), \qquad x \in I.$$

On peut aussi procéder de même avec la partie imaginaire.

2) Si le second membre g s'écrit $g = g_1 + \ldots + g_J$, et si $f_1, \ldots, f_J$ sont respectivement des solutions de l'équation avec second membre $g_1, \ldots, g_J$, alors la fonction

$$f = f_1 + \ldots + f_J$$

Exemple: g(x)=x+e^{2x}

g_1(x)=x et g_2(x)=e^{2x}

est une solution particulière de l'équation avec second membre g.

Méthode générale : la "variation des constantes"

Proposition 5.2.10 *Soit l'équation différentielle (d'ordre 1)*

$$aDf(x) + bf(x) = g(x),$$

où $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et g est continu sur un intervalle ouvert I.

Pour tout $x \in I$, désignons par $C(x)$ la solution[6] *de l'équation*

$$C(x)e^{-\frac{b}{a}x} = \frac{g(x)}{a}.$$

Si P est une primitive de C sur I alors les solutions de l'équation différentielle s'écrivent

$$(P(x) + c)\ e^{-\frac{b}{a}x},\ x \in I$$

où c est une constante arbitraire.

Preuve. Pour toute constante c, la fonction $f(x) = (P(x) + c)\ e^{-\frac{b}{a}x}$ est effectivement dérivable sur I et

$$Df(x) = \frac{1}{a}g(x) - \frac{b}{a}e^{-\frac{b}{a}x}\,(P(x) + c) = \frac{1}{a}g(x) - \frac{b}{a}f(x)$$

donc

$$aDf(x) + bf(x) = g(x),\ x \in I.$$

Réciproquement, toute solution est de cette forme. En effet, une solution est une somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène. Dès lors, comme la fonction $P(x)e^{-b/ax},\ x \in I$, est une solution particulière de l'équation, on conclut. □

Méthode lorsque le second membre est une fonction exponentielle polynôme

Lorsque le second membre g est une fonction qui s'écrit comme le produit d'un polynôme par une exponentielle $e^{\alpha x}$, il existe toujours une solution qui a une forme semblable.

6. On appelle cette méthode la "variation des constantes" (ici en fait, de la constante) car elle consiste à exprimer, à partir de la solution générale de l'équation homogène $f(x) = ce^{-(b/a)x}$, la constante c comme une fonction (de x).

Propriété 5.2.11 *Soit l'équation*

$$aDf(x) + bf(x) = P(x)e^{\alpha x}$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, P *polynôme et* $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si $\alpha \neq -\frac{b}{a}$, *il existe un polynôme* Q *de même degré que celui de* P *tel que*

$$f(x) = Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Si $\alpha = -\frac{b}{a}$, *il existe un polynôme* Q *de même degré que celui de* P *tel que*

$$f(x) = x\ Q(x)e^{-\frac{b}{a}x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Preuve. Résultat admis.□

Unicité

Le résultat d'existence et d'unicité qui suit est fondamental car il permet d'affirmer que si l'évolution d'un système est gouvernée par une équation différentielle de type étudié ici, alors l'évolution s'effectue de manière unique une fois que l'on a déterminé la condition initiale.

Théorème 5.2.12 *On considère l'équation* $aDf(x) + bf(x) = g(x)$ *où* $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ *et* $g \in C_0(I)$.

Soit $x_0 \in I$ *et soit un complexe* u_0. *L'équation* $aDf(x) + bf(x) = g(x)$ *admet une solution unique vérifiant* $f(x_0) = u_0$.

Preuve. Notons f_1 une solution particulière de cette équation. On cherche c tel que $f(x_0) = u_0$ avec $f(x) = f_1(x) + ce^{-\frac{b}{a}x}$. Le complexe $c = (u_0 - f_1(x_0))e^{\frac{b}{a}x_0}$ convient.

Supposons maintenant que f et f' soient deux solutions de l'équation vérifiant $f(x_0) = f'(x_0) = u_0$. Alors $F = f - f'$ est solution de l'équation homogène et s'annule en x_0 ; il existe donc $c \in \mathbb{C}$ tel que $F(x) = ce^{-\frac{b}{a}x}$ et $0 = ce^{-\frac{b}{a}x_0}$; dès lors $c = 0$ donc $F = f - f' = 0$.□

Exemples

Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes

$$(1)\ Df(x) + f(x) = \frac{1}{1+e^x}, \qquad (2)\ Df(x) + 2f(x) = xe^x.$$

Solution.

(1) L'équation caractéristique est $z + 1 = 0$; le réel -1 est l'unique solution. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc $\{ce^{-x}\ :\ c \in \mathbb{C}\}$.

Cherchons à présent une solution particulière. La fonction $g(x) = \frac{1}{e^x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$; déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\frac{e^x}{e^x+1}$: la fonction $\ln(1 + e^x)$ convient.

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de l'équation (1) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

$$\left\{e^{-x}\left(c + \ln(e^x + 1)\right) : c \in \mathbb{C}\right\}.$$

(2) L'équation caractéristique est $z + 2 = 0$; le réel -2 est l'unique solution. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc $\{ce^{-2x}\ :\ c \in \mathbb{C}\}$.

Le second membre $xe^x = xe^{1 \cdot x}$ est une fonction exponentielle polynôme. Comme 1 n'est pas solution de l'équation caractéristique et que x est un polynôme de degré 1, on sait qu'il existe une solution particulière de la forme $f(x) = (Ax + B)e^x$. Il faut maintenant déterminer A, B. On a

$$Df(x) = Ae^x + (Ax + B)e^x = (A + B + Ax)e^x$$

donc

$$Df + 2f = xe^x$$

si et seulement si

$$A + B + Ax + 2Ax + 2B = x$$

ou encore si et seulement si

$$\begin{cases} A + 3B = 0 \\ 3A = 1. \end{cases}$$

Ce système fournit les solutions $A = \frac{1}{3}$ et $B = -\frac{1}{9}$.

Finalement, l'ensemble des solutions de (2) est

$$\left\{ ce^{-2x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) e^x \; : \; c \in \mathbb{C} \right\}.$$

5.2.6 Solutions de l'équation non homogène d'ordre 2

Les méthodes de l'ordre 1 s'adaptent aussi aux équations d'ordre 2.

Les mêmes remarques préliminaires peuvent aussi être faites.

MÉTHODE GÉNÉRALE : LA "VARIATION DES CONSTANTES"

Proposition 5.2.13 *Soit l'équation différentielle (d'ordre 2)*

$$aD^2 f(x) + bDf(x) + cf(x) = g(x),$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et g est continu sur un intervalle ouvert I. Notons u_1, u_2 des solutions fondamentales de cette équation.

Soient C_1, C_2 les fonctions de $x \in I$ uniques solutions[7] *continues du système (en fait un système d'équations linéaires pour chaque $x \in I$)*

$$\begin{cases} C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x) & = & 0 \\ C_1(x)Du_1(x) + C_2(x)D_x u_2(x) & = & \frac{g(x)}{a}. \end{cases}$$

Si P_1, P_2 désignent deux primitives respectivement de C_1, C_2 alors les solutions de l'équation différentielle s'écrivent

$$(P_1(x) + c_1)) \; u_1(x) + (P_2(x) + c_2) \; u_2(x), \; x \in I$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Preuve. Nous admettrons[8] l'existence et la continuité des fonctions C_1, C_2.

Cela étant, démontrons que pour toutes constantes c_1, c_2, la fonction

$$f(x) = (P_1(x) + c_1)) \; u_1(x) + (P_2(x) + c_2) \; u_2(x), \; x \in I,$$

est bien solution de l'équation non homogène.

Cette fonction est, par construction, dérivable sur I et on a

$$\begin{aligned} Df(x) &= C_1(x)u_1(x) + (P_1(x) + c_1)Du_1(x) + C_2(x)u_2(x) + (P_2(x) + c_2)Du_2(x) \\ &= (P_1(x) + c_1)Du_1(x) + (P_2(x) + c_2)Du_2(x). \end{aligned}$$

La fonction Df est donc encore dérivable sur I et on a

$$\begin{aligned} D^2 f(x) &= C_1(x)Du_1(x) + (P_1(x) + c_1)D^2 u_1(x) + C_2(x)Du_2(x) + (P_2(x) + c_2)D^2 u_2(x) \\ &= \frac{g(x)}{a} + (P_1(x) + c_1)D^2 u_1(x) + (P_2(x) + c_2)D^2 u_2(x). \end{aligned}$$

7. On appelle cette méthode la "variation des constantes" car elle consiste à exprimer, à partir de la solution générale de l'équation homogène $f(x) = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}$ ou $f(x) = c_1 x e^{z_1 x} + c_2 e^{z_1 x}$, les constantes c_1, c_2 comme des fonctions (de x).

8. En fait, il suffit de résoudre explicitement, pour tout $x \in I$, ce système de deux équations linéaires à deux inconnues.

Dès lors

$$\begin{aligned} aD^2f(x)+bDf(x)+cf(x) &= a\left(\frac{g(x)}{a}+(P_1(x)+c_1)D^2u_1(x)+(P_2(x)+c_2)D^2u_2(x)\right) \\ &\quad + b\left((P_1(x)+c_1)Du_1(x)+(P_2(x)+c_2)Du_2(x)\right) \\ &\quad + c\left(P_1(x)+c_1\right)\, u_1(x)+\left(P_2(x)+c_2\right)\, u_2(x)) \\ &= g(x)+\left(P_1(x)+c_1\right)\,\left(aD^2u_1(x)+bDu_1(x)+cu_1(x)\right) \\ &\quad + \left(P_2(x)+c_2\right)\,\left(aD^2u_2(x)+bDu_2(x)+cu_2(x)\right) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Réciproquement, une solution est nécessairement une fonction de ce type. En effet, une telle fonction est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène. Comme une solution particulière s'écrit (vu ce qui précède) $P_1(x)u_1(x)+P_2(x)u_2(x),\ x\in I$, et comme les solutions de l'équation homogène s'écrivent $c_1u_1(x)+c_2(x)u_2(x),\ x\in \mathbb{R}$, on conclut. □

Méthode lorsque le second membre est une fonction exponentielle polynôme.

Lorsque le second membre g est une fonction qui s'écrit comme le produit d'un polynôme par une exponentielle $e^{\alpha x}$, il existe toujours une solution qui a une forme semblable.

Propriété 5.2.14 *Soit l'équation*

$$aD^2f(x)+bDf(x)+cf(x)=P(x)e^{\alpha x}$$

avec $a,b,c\in\mathbb{C},\ a\neq 0,\ P$ polynôme et $\alpha\in\mathbb{C}$.

Si α n'est pas un zéro du polynôme caractéristique, il existe un polynôme Q de même degré que celui de P tel que

$$f(x)=Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Si α est un zéro simple du polynôme caractéristique, il existe un polynôme Q de même degré que celui de P tel que

$$f(x)=x\ Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Si α est un zéro double du polynôme caractéristique, il existe un polynôme Q de même degré que celui de P tel que

$$f(x)=x^2\ Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Preuve. Résultat admis.□

Unicité

Le résultat d'existence et d'unicité qui suit est fondamental car il permet d'affirmer que si l'évolution d'un système est gouvernée par une équation différentielle de type étudié ici, alors l'évolution s'effectue de manière unique une fois que l'on a déterminé les conditions initiales.

Théorème 5.2.15 *On considère l'équation d'ordre 2 $aD^2f(x)+bDf(x)+cf(x)=g(x)$ $(a,b,c\in\mathbb{C},a\neq 0,\ g\in C_0(I))$.*

Soit $x_0\in I$ et soient deux complexes d_1 et d_2. Il existe une solution unique f de l'équation telle que $f(x_0)=d_1$ et $Df(x_0)=d_2$.

Preuve. Unicité. Si f_1, f_2 sont deux solutions sur I qui vérifient les conditions initiales, alors la fonction $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$ est solution de l'équation homogène sur I et vérifie les conditions initiales $h(x_0) = 0, Dh(x_0) = 0$. Vu le résultat relatif à l'unicité des solutions dans le cas homogène, on conclut que $f_1 = f_2$ sur I.

Existence. Soit f_0 une solution de l'équation (son existence est assurée par le résultat relatif à la méthode de variation des constantes). Vu le résultat relatif à l'existence des solutions de l'équation homogène vérifiant des conditions initiales, il existe une solution h de l'équation homogène vérifiant $h(x_0) = d_1 - f_0(x_0),\ Dh(x_0) = d_2 - Df_0(x_0)$. Il s'ensuit que la fonction $f = f_0 + h$ remplit les conditions de l'énoncé : c'est une solution de l'équation qui possède les conditions initiales demandées.□

Exemples

1) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$D^2f(x) + Df(x) = 3.$$

Rechercher ensuite la solution qui vérifie $f(0) = 0,\ Df(0) = 1$.

a) On commence par résoudre complètement l'équation homogène $D^2f(x) + Df(x) = 0$.

Le polynôme caractéristique de cette équation est $z^2 + z$; ses zéros sont donc 0 et -1. L'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène est donc l'ensemble des fonctions

$$f(x) = r_1 + r_2e^{-x}$$

où r_1, r_2 sont des constantes réelles arbitraires.

b) Une solution particulière de l'équation s'obtient ici directement : on voit immédiatement que $f(x) = 3x$ vérifie $D^2f(x) + Df(x) = 3$.

Si on ne voit pas immédiatement cette solution, on peut procéder comme suit. Le second membre est une exponentielle polynôme ; l'exponentielle qui intervient est $\exp(0x)$. Comme 0 est un zéro simple du polynôme caractéristique, il existe donc une solution particulière qui s'écrit $f(x) = Ax$ où A est une constante à déterminer. On a $Df(x) = A, D^2f(x) = 0$ donc f vérifie l'équation si et seulement si $A = 3$ et on trouve finalement qu'une solution particulière est donnée par $f(x) = 3x$.

c) L'ensemble des solutions réelles de l'équation $D^2f(x) + Df(x) = 3$ est donc l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$f(x) = r_1 + r_2e^{-x} + 3x$$

où r_1, r_2 sont des constantes réelles arbitraires.

d) Cherchons alors $f(x) = r_1 + r_2e^{-x} + 3x$ qui vérifie $f(0) = 0$ et $Df(0) = 1$. On a $f(0) = r_1 + r_2$ et $Df(0) = -r_2 + 3$. Il s'ensuit que f répond aux conditions si et seulement si

$$r_1 + r_2 = 0 \quad \text{et} \quad -r_2 + 3 = 1.$$

On trouve $r_2 = 2$ et $r_1 = -2$ donc la fonction qui répond à la dernière question est

$$f(x) = -2 + 2e^{-x} + 3x,\ x \in \mathbb{R}.$$

2) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$D^2f(x) + f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) On commence par résoudre l'équation homogène $D^2f + f = 0$.

L'équation caractéristique associée est $z^2 + 1 = 0$. Elle admet donc comme solutions les complexes i et $-i$. Il s'ensuit que l'ensemble des solutions complexes de cette équation est

$$\{c_1e^{ix} + c_2e^{-ix} : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\} = \{c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$$

et que l'ensemble des solutions réelles est

$$\{c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

b) Déterminons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ (car le second membre est défini et continu sur $\mathbb{R}$). Comme l'équation est à coefficients réels et que $\sin x = \Im(e^{ix})$, une solution particulière sera fournie par la partie imaginaire d'une solution particulière de l'équation

$$D^2f(x) + f(x) = e^{ix}.$$

Le second membre de cette dernière équation étant l'exponentielle polynôme $1.e^{ix}$, i étant zéro du polynôme caractéristique, on sait qu'une solution particulière est du type $f(x) = Axe^{ix}$. On a $D^2f(x) = 2Aie^{ix} - Axe^{ix}$ donc

$$D^2f(x) + f(x) = e^{ix}$$

si et seulement si

$$2iA - Ax + Ax = 1$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$A = -\frac{i}{2}.$$

Il s'ensuit que la fonction

$$\Im(-\frac{i}{2}xe^{ix}) = -\frac{x}{2}\cos x$$

est solution particulière de l'équation de départ.

Finalement, l'ensemble des solutions de $D^2 f(x) + f(x) = \sin x$ est l'ensemble des fonctions

$$\{-\frac{x}{2}\cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$$

et que l'ensemble des solutions réelles est

$$\{-\frac{x}{2}\cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

3) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$D^2 f(x) + f(x) = \frac{1}{\cos x},\ x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[.$$

Solution. a) On commence par résoudre l'équation homogène $D^2 f + f = 0$.

L'équation caractéristique associée est $z^2 + 1 = 0$. Elle admet donc comme solutions les complexes i et $-i$. Il s'ensuit que l'ensemble des solutions complexes de cette équation est

$$\{c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\} = \{c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$$

et que l'ensemble des solutions réelles est

$$\{c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

b) Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière. Pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, résolvons le système

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = 0 \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{array} \right.$$

Si $x \neq 0$, en multipliant la première équation par $\sin x$ et la seconde par $\cos x$, puis en additionnant les deux, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2(x) = 1 \\ C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = 0 \end{array} \right.$$

donc

$$C_2(x) = 1, \quad C_1(x) = -\operatorname{tg} x.$$

Pour $x = 0$, on trouve $C_1(x) = 0, C_2(x) = 1$, ce qui peut être écrit aussi sous la forme précédente.

Cela étant, une primitive de C_2 sur $\mathbb{R}$ est x, et une primitive de $C_1(x)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ est $\ln(\cos x)$.

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions réelles de l'équation $D^2 f(x) + f(x) = \frac{1}{\cos x}$ définies sur $]-\pi/2, \pi/2[$ est l'ensemble des fonctions

$$\{\ln(\cos x)\ \cos x\ +\ x\ \sin x\ +\ c_1 \cos x + c_2 \sin x\ :\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

4) Reprenons l'exemple de l'oscillateur entretenu c'est-a-dire de l'équation

$$D^2 f(t) + \frac{\gamma}{m} Df(t) + \frac{k}{m} f(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t).$$

Recherchons une solution particulière de cette équation. Cette équation est une équation à coefficients réels et le second membre

$$g(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t)$$

est la partie réelle de

$$G(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_0 t}.$$

Si $\gamma \neq 0$, la partie réelle des zéros du polynôme caractéristique est non nulle ; $i\omega_0$ n'est donc pas zéro du polynôme caractéristique. Si $\gamma = 0$, on a $\Delta = -4k/m < 0$; les zéros du polynôme caractéristique sont $i\omega$ et $-i\omega$ (où $\omega = \sqrt{k/m}$). Dès lors, plusieurs cas se présentent.