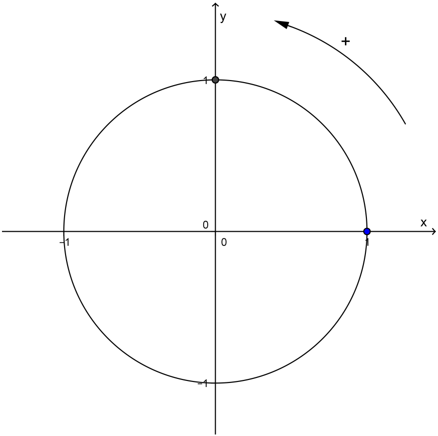
Activités préparatoires Mathématiques (2) : trigonométrie (2019-2020)

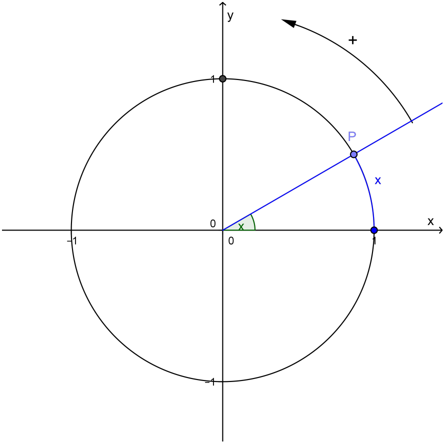
Définitions

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle centré à l'origine et de rayon 1. Il est orienté positivement lorsqu'on le parcourt dans le sens inverse des aiguilles d'une montre si les axes sont orientés comme sur la figure ci-contre. Ce cercle est appelé cercle trigonométrique.

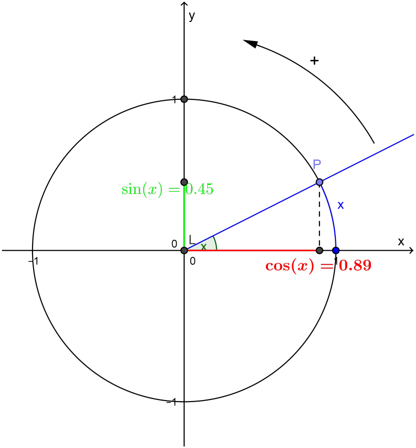


A tout réel x on associe un point P du cercle trigonométrique de la façon suivante.

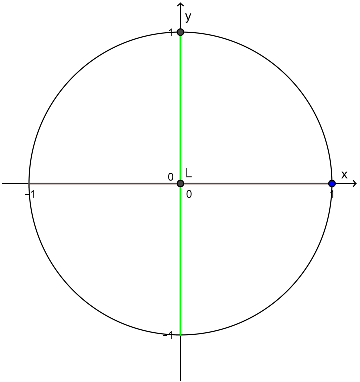
- Si $x \geq 0$, on parcourt le cercle dans le sens positif à partir du point de coordonnées $(1, 0)$ jusqu'à ce que l'arc décrit soit de longueur x.
- Si $x < 0$, on parcourt le cercle dans l'autre sens à partir du même point jusqu'à ce que l'arc décrit soit de longueur $-x$.



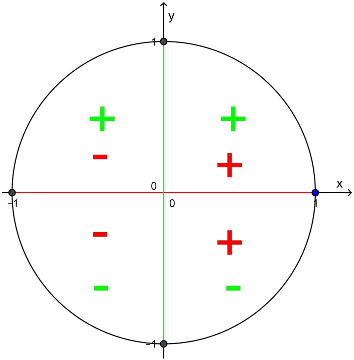
L'abscisse du point P est le réel $\cos x$;
son ordonnée est le réel $\sin x$.
Dès lors, le point P a pour coordonnées $(\cos x, \sin x)$.



Ces réels $\sin x$ et $\cos x$ varient dans $[-1, 1]$, ensemble dans lequel varient les abscisses et les ordonnées des points du cercle trigonométrique.

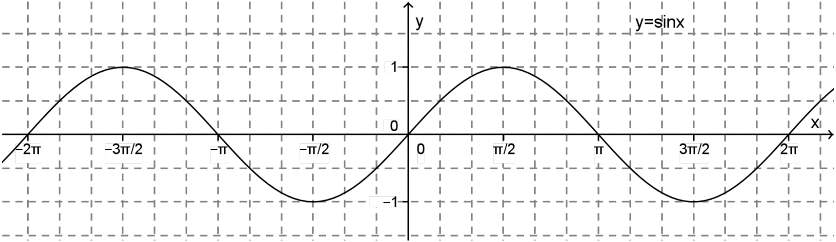


Selon le quadrant dans lequel se trouve P, on peut déduire le signe de ces réels.
Ainsi, l'image du sinus et du cosinus est l'ensemble $[-1, 1]$ tandis que leur domaine de définition est l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.



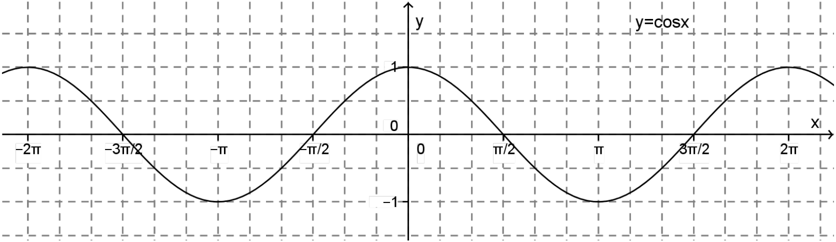
Enfin, la longueur du cercle étant égale à $2\ \pi$, aux réels x et $x + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) on associe le même point P ; on a donc $\cos(x + 2k\pi) = \cos x,\ \sin(x + 2k\pi) = \sin x,\ k \in \mathbb{Z}$ et on dit que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $2\ \pi$.

Graphiques et variations



x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\ \pi}{2}$		$2\ \pi$
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Graphiques et variations

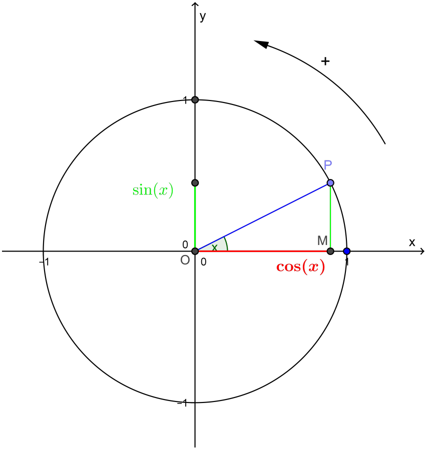


x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\ \pi}{2}$		$2\ \pi$
$\cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Formule fondamentale

Par application du théorème de Pythagore dans le triangle OMP, rectangle en M, on a $|OM|^2 + |MP|^2 = |OP|^2$ ce qui équivaut à

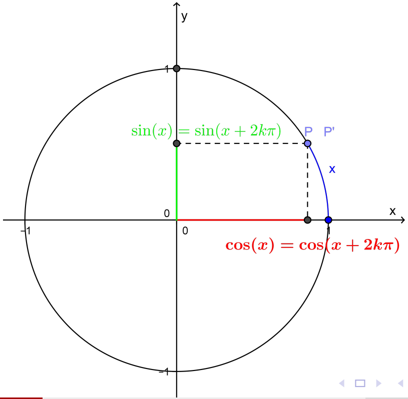
$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$



Formules des angles associés

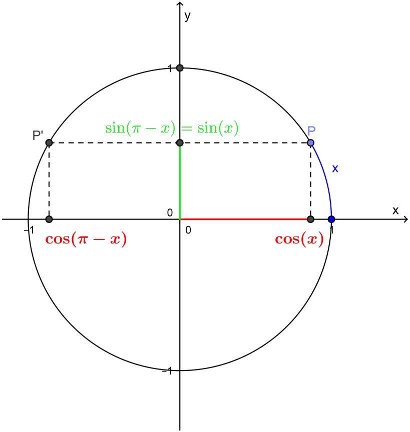
Soit le point P associé au réel x et P' à l'autre réel considéré.
Angles égaux : soient les réels x et $x + k\ 2\ \pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$;
les points P et P' sont confondus et on a

$$\boxed{\sin(x + 2k\pi) = \sin x \qquad\qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x,\ \ k \in \mathbb{Z}}$$



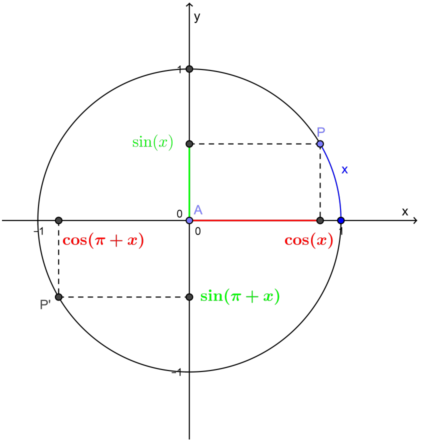
Soit le point P associé au réel x et P' à l'autre réel considéré.
Angles supplémentaires : soient les réels x et $\pi - x$;
les points P et P' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et on a

$$\boxed{\sin(\pi - x) = \sin x \qquad\qquad \cos(\pi - x) = -\cos x}$$



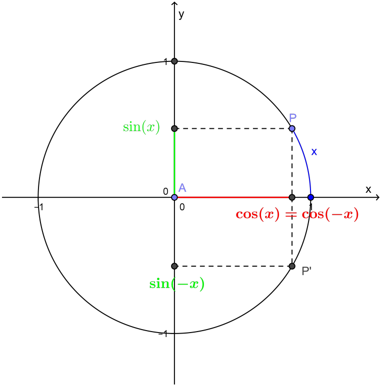
Soit le point P associé au réel x et P' à l'autre réel considéré.
Angles anti-supplémentaires : soient les réels x et $\pi + x$;
les points P et P' sont symétriques par rapport à l'origine des axes et on a

$$\boxed{\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad\qquad \cos(\pi + x) = -\cos x}$$



Soit le point P associé au réel x et P' à l'autre réel considéré.
Angles opposés : soient les réels x et $-x$;
les points P et P' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et on a

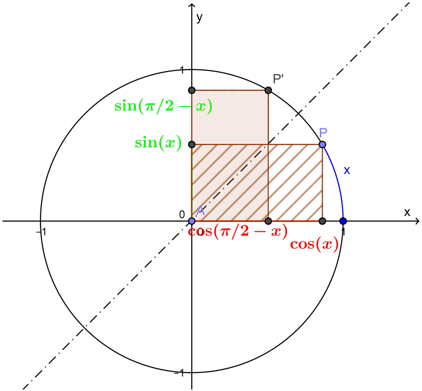
$$\boxed{\sin(-x) = -\sin x \qquad\qquad \cos(-x) = \cos x}$$



Ainsi, la fonction sinus est une fonction impaire alors que la fonction cosinus est paire.

Soit le point P associé au réel x et P' à l'autre réel considéré.
Angles complémentaires : soient les réels x et $\frac{\pi}{2} - x$;
les points P et P' sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$) et on a

$$\boxed{\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \qquad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x}$$



Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

tangente et cotangente

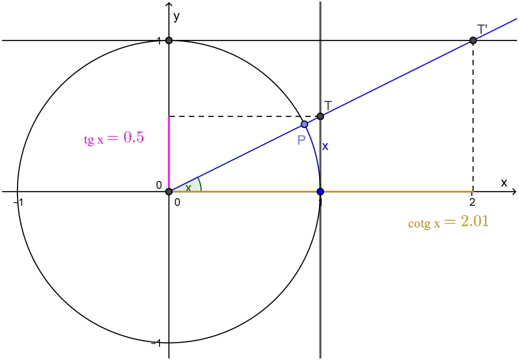
Les fonctions tangente et cotangente se définissent de la manière suivante

$$\mathrm{tg} : x \mapsto \mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{cotg} : x \mapsto \mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

pour autant que leur dénominateur soit différent de zéro.
Vu ces définitions,
le domaine de définition de la tg est l'ensemble des réels dont on retire ceux qui annulent le cosinus c'est-à-dire $\mathrm{dom}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
le domaine de définition de la cotangente est l'ensemble des réels dont on exclut ceux pour lesquels le sinus vaut zéro c'est-à-dire $\mathrm{dom}(\mathrm{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
L'image de ces deux fonctions est $\mathbb{R}$.
Si $x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, on a $\mathrm{tg}\ x\ .\ \mathrm{cotg}\ x = 1$; ces deux réels sont donc **toujours de même signe**.

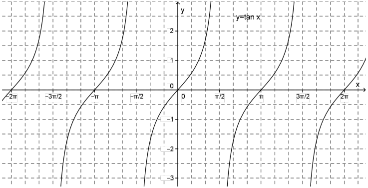
Interprétation graphique

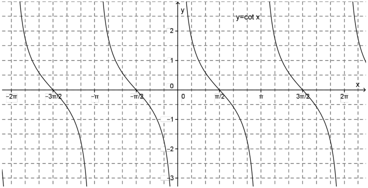
Si P est le point associé au réel $x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ alors $\operatorname{tg} x$ est l'ordonnée du point T et $\operatorname{cotg} x$ est l'abscisse du point T'.



Ces deux fonctions sont positives dans le premier et le troisième quadrant (là où sinus et cosinus sont de même signe) et négatives dans les deux autres quadrants ; elles sont également **impaires** et **périodiques** de période π.

Graphiques





A partir de la **formule fondamentale**, on a

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \operatorname{cotg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})}$$

A partir des **formules des angles associés** vues pour le sinus et le cosinus, on peut déduire

$\operatorname{tg}(x + 2\ k\pi) = \operatorname{tg}\ x$	et	$\operatorname{cotg}(x + 2\ k\pi) = \operatorname{cotg}\ x\ (k \in \mathbb{Z})$
$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\ \operatorname{tg}\ x$	et	$\operatorname{cotg}(\pi - x) = -\ \operatorname{cotg}\ x$
$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg}\ x$	et	$\operatorname{cotg}(\pi + x) = \operatorname{cotg}\ x$
$\operatorname{tg}(-x) = -\ \operatorname{tg}\ x$	et	$\operatorname{cotg}(-x) = -\ \operatorname{cotg}\ x$
$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{cotg}\ x$	et	$\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{tg}\ x$

A partir des **valeurs particulières** du sinus et du cosinus, on a

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathrm{tg}\ x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n'existe pas
$\mathrm{cotg}\ x$	n'existe pas	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

exercices

1. Sans calculette, calcule

1) $\sin\dfrac{\pi}{4}\ .\ \mathrm{tg}\ \dfrac{\pi}{6} - \cos\dfrac{\pi}{6}\ .\ \mathrm{tg}\ \dfrac{\pi}{3} =$

2) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}} =$

3) $\sin^2\dfrac{\pi}{2} - \cos^2\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{3} =$

4) $\mathrm{cotg}^2\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{\sin^2\frac{\pi}{6}} - \dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}} =$

5) $\sin\dfrac{2\pi}{3} =$

6) $\cos(\dfrac{-7\pi}{4}) =$

7) $\mathrm{tg}\ \dfrac{11\pi}{6} =$

8) $\mathrm{cotg}\ \dfrac{16\pi}{3} =$

exercices

2. Sans calculette, détermine la valeur des autres nombres trigonométriques de x sachant que

1) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ avec $x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

2) $\cos x = \frac{-1}{7}$ avec $x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$

3) $\mathrm{tg}\ x = 2\sqrt{2}$ avec $x \in]\pi, 2\pi[$

4) $\mathrm{cotg}\ x = -1$ avec $\cos x > 0$

exercices

3. Simplifie les expressions suivantes (supposées définies)

1) $\sin(\frac{\pi}{2}+x)\ .\ \cos(x-\pi)\ .\ \mathrm{cotg}(\frac{3\pi}{2}-x)$
$$+\sin(\frac{\pi}{2}-x)\ .\ \sin(\frac{3\pi}{2}-x)\ .\ \mathrm{cotg}(\frac{3\pi}{2}+x)$$

2) $\mathrm{tg}(x+3\pi)+\mathrm{cotg}\ x+\mathrm{tg}(x-\dfrac{\pi}{2})$

3) $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)\ .\ \cos(\pi-x)\ .\ \mathrm{tg}(2\pi+x)}{\sin(x-\frac{\pi}{2})\ .\ \sin(x-2\pi)}$

4) $\dfrac{\sin(\frac{3\pi}{2}-x)\ .\ \cos(x-\frac{\pi}{2})}{\mathrm{cotg}(-x)\ .\ \sin^2(-x)}$

5) $\dfrac{\sin(\frac{3\pi}{2}-a)\ .\ \mathrm{tg}(\pi-b)}{\mathrm{tg}(\pi+b)\ .\ \cos(\pi-a)}+\dfrac{\mathrm{cotg}(\frac{\pi}{2}+a)\ .\ \sin(c-\frac{\pi}{2})}{\cos(\pi-c)\ .\ \mathrm{tg}(-a)}$

Rappel relatif au produit scalaire de deux vecteurs

a) **Définition** : le produit scalaire des vecteurs **non nuls** $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ est le réel

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\ ||\overrightarrow{v}|| \cos\theta$$

où $\theta \in [0, \pi]$ est la mesure de l'angle non orienté entre ces deux vecteurs. Le produit scalaire est nul si l'un des vecteurs est nul.

b) **Expression du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée** : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de composantes respectivement (u_1, u_2) et (v_1, v_2) dans la base orthonormée $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ du plan alors

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Formules d'addition et de duplication

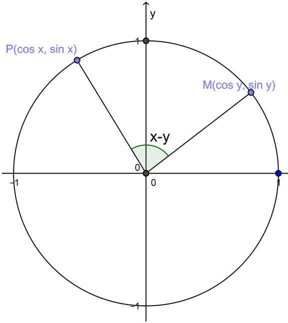
$$\boxed{\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y}$$

Les points P et M ayant respectivement comme coordonnées $(\cos x, \sin x)$ et $(\cos y, \sin y)$, en calculant le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OM}$ de deux façons différentes, on a

$$\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OM} = ||\overrightarrow{OP}||\ ||\overrightarrow{OM}|| \cos(x-y) = \cos(x-y)$$

puisque la norme des deux vecteurs vaut 1 mais encore

$$\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OM} = \cos x \cos y \ + \ \sin x \sin y.$$



Dès lors, en égalant les deux expressions du produit scalaire, on obtient l'égalité annoncée.

A partir de cette formule, on peut établir sans difficulté les suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
&\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \\
&\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x \\
&\sin(2x) = 2\ \sin x \cos x \\
&\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x
\end{aligned}}$$

Pour la première, on écrit $x + y$ sous la forme $x - (-y)$ et on tient compte des formules des angles opposés.
Pour les deux suivantes, on utilise les angles complémentaires et pour les deux dernières, on prend $y = x$.

Les deux formules suivantes (dites de Carnot) sont également souvent utiles.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \end{aligned}}$$

Elles sont obtenues à partir de $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ et de la formule fondamentale.

Des formules analogues existent pour la tangente :

$$
\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \text{ pour autant que} (x+y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
&= \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\
&= \frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \text{ pour autant que } x \text{ et } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
&= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}
\end{aligned}
$$

On obtient donc :

$$\boxed{\begin{aligned}
\tan(x-y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \tan y} \quad \text{si } x, y, (x-y) \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y} \quad \text{si } x, y, (x+y) \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \\
\tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \quad \text{si } x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ et si } x \neq \tfrac{\pi}{4} + k\tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}}$$

Formules de Simpson

Ces formules s'obtiennent à partir des formules d'addition.
Par exemple, en additionnant membre à membre les deux égalités

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x,$$

on a $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y.$

Ces formules peuvent être transformées afin d'être plus facilement utilisables, en posant $p = x + y$ et $q = x - y$:

$$\begin{cases} p + q = 2x \\ p - q = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p+q}{2} \\ y = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

et on obtient $$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Les autres égalités s'obtiennent de façon analogue.

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin p+\sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
\sin p-\sin q &= 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}\\
\cos p+\cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
\cos p-\cos q &= -\,2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}}$$

Il peut être intéressant également de transformer des produits en sommes, donc de lire les formules dans "l'autre sens".

$$\begin{aligned}
2\sin x\cos y &= \sin(x+y)+\sin(x-y)\\
2\cos x\cos y &= \cos(x+y)+\cos(x-y)\\
2\sin x\sin y &= \cos(x-y)-\cos(x+y)
\end{aligned}$$

Exercices

4. Vérifie les identités suivantes (supposées définies)

1) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos(2\alpha)$

2) $\sin(a+b)\sin(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a$

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\ a + \operatorname{tg}\ b}{\operatorname{cotg}\ a + \operatorname{cotg}\ b} = \operatorname{tg}\ a \ .\ \operatorname{tg}\ b$

4) $\operatorname{tg}\ a \ .\ \operatorname{tg}\ b \ .(\operatorname{cotg}\ a + \operatorname{cotg}\ b) = \operatorname{tg}\ a + \operatorname{tg}\ b$

5) $(1+\operatorname{tg}\ x)^2 + (1-\operatorname{tg}\ x)^2 = \dfrac{2}{\cos^2 x}$

6) $\sin^2(a+b) - \sin^2(a-b) = \sin(2a)\ .\ \sin(2b)$

7) $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 4\cos^2(\frac{a-b}{2})$

8) $\dfrac{\operatorname{cotg}\ x - \operatorname{tg}\ x}{\operatorname{cotg}\ x + \operatorname{tg}\ x} = \cos(2x)$

exercices

5. Calcule et simplifie

1) $\sin(\frac{\pi}{4}+x)-\sin(\frac{\pi}{4}-x)$

2) $\sin(\frac{\pi}{6}+x)+\cos(\frac{\pi}{6}-x)$

3) $\sin(\frac{\pi}{12})$

4) $\operatorname{tg}(\frac{7\pi}{12})$

6. Calcule les nombres trigonométriques de $a+b+c$ sachant que $\sin a = 0,6$ avec $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos b = \frac{12}{13}$ avec $\sin b < 0$ et $\operatorname{tg} c = 1$ avec $\pi < c < \frac{3\pi}{2}$.

exercices

7. Montre que chacune des expressions suivantes est indépendante de x

1) $\sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(x + \frac{4\pi}{3})$ 2) $\cos^2(x + \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x - \frac{\pi}{4})$

8. Transforme en une somme ou en une différence

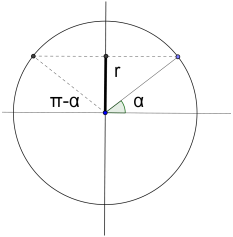
1) $2\cos x \cos 3x$
2) $4\sin x \sin 5x$
3) $\sin(\frac{\pi}{4} - x)\sin(\frac{\pi}{4} + x)$
4) $\sin(x + y)\cos(x - y)$
5) $\sin(y - 2x)\cos(x - 2y)$
6) $\cos(\frac{\pi}{3} + x)\cos(\frac{2\pi}{3} + 3x)$

En sinus :

$\boxed{\sin x = \sin \alpha}$ (α donné)

Les solutions sont données par

$$x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$\Longleftrightarrow x = \alpha + 2\ k\pi \text{ ou } \ x = \pi - \alpha + 2\ k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Remarques :

1) $\sin x = -\ \sin \alpha \Leftrightarrow \sin x = \sin(-\alpha)$

2) $\sin x = \cos \alpha \Leftrightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

3) si on a $\sin x = r$ (r réel donné) alors

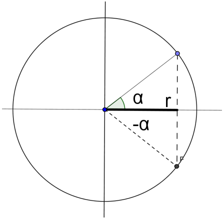
soit $|r| > 1$ et l'équation est impossible,

soit $|r| \leq 1$ et on écrit r sous la forme de $\sin \alpha$, généralement en utilisant une calculette.

En cosinus :

$\boxed{\cos x = \cos \alpha}$ (α donné)

Les solutions sont données par



$$x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ -\alpha + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow x = \alpha + 2\ k\pi \text{ ou } \ x = -\alpha + 2\ k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Remarques :

1) $\cos x = - \ \cos \alpha \Leftrightarrow \cos x = \cos(\pi - \alpha)$

2) $\cos x = \sin \alpha \Leftrightarrow \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

3) si on a $\cos x = r$ (r réel donné) alors

soit $|r| > 1$ et l'équation est impossible,

soit $|r| \leq 1$ et on écrit r sous la forme de $\cos \alpha$, généralement en utilisant une calculette.

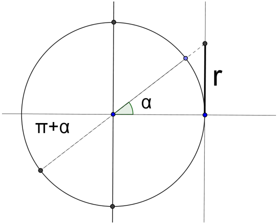
En tangente :

$\boxed{\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha}$ $(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ donné $)$

Les solutions (différentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ pour que la tangente existe) sont données par

$$x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ \pi + \alpha + 2k\pi \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow x = \alpha + \ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$



Remarques :

1) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-\alpha)$

2) $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} \alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

3) si on a $\operatorname{tg} x = r$ (r réel donné) alors on écrit r sous la forme de $\operatorname{tg}\alpha$, généralement en utilisant une calculette.

Equations quelconques

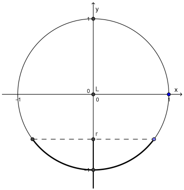
D'une manière générale, pour résoudre une équation trigonométrique, on essaie de la transformer en une ou plusieurs équations élémentaires. Pour ce faire, on utilise d'une part les moyens algébriques classiques (réduction au même dénominateur, factorisation, règle du produit nul...) et d'autre part les formules de trigonométrie.
Ainsi, par exemple,

$$\begin{aligned} 6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0 &\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(3\sin x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 &\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Résoudre $\sin x \leq r$ ($r \in \mathbb{R}$) :

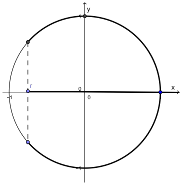
Si $r > 1$, cette inéquation est toujours vérifiée.
Si $r < -1$, elle est impossible.



Dans les autres cas, on place sur le cercle trigonométrique les points d'ordonnée r. On détermine à l'aide du dessin l'intervalle de $[0, 2\pi[$ dans lequel l'inégalité est vérifiée. L'ensemble solution est alors constitué de l'union des intervalles obtenus en ajoutant les multiples de 2π

Résoudre $\cos x \geq r$ $(r \in \mathbb{R})$:

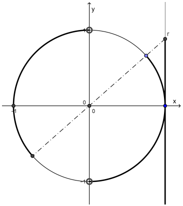
Si $r < -1$, cette inéquation est toujours vérifiée.
Si $r > 1$, elle est impossible.



Dans les autres cas, on place sur le cercle trigonométrique les points d'abscisse r. On détermine à l'aide du dessin l'intervalle de $[-\pi, \pi[$ dans lequel l'inégalité est vérifiée. L'ensemble solution est alors constitué de l'union des intervalles obtenus en ajoutant les multiples de 2π

Résoudre $\tan x \leq r$ $(r \in \mathbb{R})$:

Comme dans toute inéquation comportant un dénominateur, on commence par exprimer les conditions d'existence.



Ensuite on reporte la valeur r en ordonnée sur la parallèle à l'axe des y menée par le point de coordonnées $(1, 0)$. On détermine à l'aide du dessin l'intervalle de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans lequel l'inégalité est vérifiée. L'ensemble solution est alors constitué de l'union des intervalles obtenus en ajoutant les multiples entiers de π.

Exercices

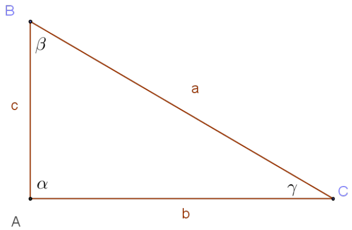
9. Résous les équations et inéquations suivantes en toute généralité puis donne les solutions dans $]-\pi, \pi]$ $(x \in \mathbb{R})$

1) $\cos(3x + \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2) $4\cos^2(x) - 4\cos(x) - 3 = 0$
3) $\cos^2(x) + \cos(2x) = -\frac{1}{4}$
4) $\cos(6x) + \sin(3x) = 1$
5) $\sin(5x) + \cos(2x) = 0$
6) $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$
7) $3\ \mathrm{tg}(\frac{x}{3}) + \sqrt{3} \geq 0$
8) $\sin^2 x + \sin x > 0$
9) $\cos(2x) = \cos(x) - 1$

Relations dans les triangles

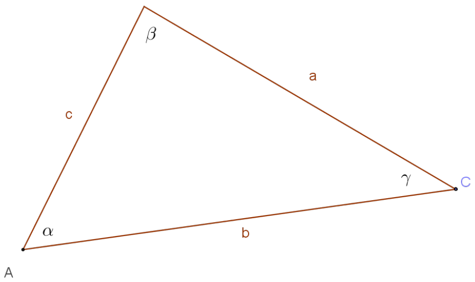
On désigne par A, B, C les sommets d'un triangle et par a, b, c les longueurs des côtés opposés respectivement à ces sommets.
Enfin, les mesures des angles (orientés positivement) de ce triangle sont respectivement appelés α, β, γ.

Triangle rectangle



Le côté opposé à l'angle droit (ici α) se nomme hypoténuse.
On a les formules suivantes :
$\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.
$b = a \sin\beta = a \cos\gamma = c \operatorname{tg} \beta = c \operatorname{cotg} \gamma$.
$c = a \sin\gamma = a \cos\beta = b \operatorname{tg} \gamma = b \operatorname{cotg} \beta$.
$a^2 = b^2 + c^2$

Triangle quelconque



On a les formules suivantes :

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\ \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\ \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\ \gamma$

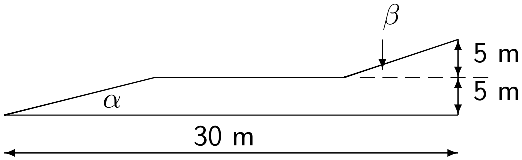
$$\frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{b}{\sin\ \beta} = \frac{c}{\sin\ \gamma}$$

Exercices

10. Un avion décolle sous un angle de 10 degrés et vole à une vitesse constante de 75m/s. Combien de temps l'avion mettra-t-il pour atteindre une altitude de 4 500 m ?

11. Voici le plan d'un toboggan d'une piscine. Quelle est la longueur totale, au mètre près, de ce toboggan ?

$\alpha = 25^0$
$\beta = 35^0$



Exercices

12. A partir d'un point A situé à 8 mètres au-dessus du sol, l'angle d'élévation du sommet d'un bâtiment est de 30 degrés et l'angle de déression de la base du bâtiment est de 15 degrés. Calculer la hauteur du bâtiment.

13. Un poteau haut de 12 mètres est planté sur le flanc d'une colline qui forme un angle de 17 degrés avec l'horizontale. Calculez la longueur minimale d'un câble tendu entre le sommet du poteau et un point en contrebas distant de 21,6 mètres de la base du poteau.

Exercices

14. A l'origine, la Tour de Pise était perpendiculaire à la surface du sol et mesurait 54 mètres de haut. Comme elle s'enfonce dans le sol, elle penche maintenant d'un angle α par rapport à la perpendiculaire. Lorsque le sommet de la tour est observé à partir d'un point distant de 45 mètres du centre de sa base, l'angle d'élévation est de 53 degrés. Calculer l'angle α et la distance d qui exprime de combien le centre du sommet de la tour s'est éloigné de la perpendiculaire.

Réponses des exercices

Exercice 1.

1) $\frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$
2) $-2 - \sqrt{3}$
3) $\frac{13}{4}$
4) -7
5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
7) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
8) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Réponses des exercices

Exercice 2.

1) $\cos x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; $\mathrm{tg} x = \dfrac{-1}{2}$; $\mathrm{cotg} x = -2$

2) $\sin x = \dfrac{-4\sqrt{3}}{7}$; $\mathrm{tg} x = 4\sqrt{3}$; $\mathrm{cotg} x = \frac{\sqrt{3}}{12}$

3) $\cos x = \dfrac{-1}{3}$; $\sin x = \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$; $\mathrm{cotg} x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

4) $\mathrm{tg} x = -1$; $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

Réponses des exercices

Exercice 3.

1) 0 2) $\mathrm{tg} x$ 3) 1 4) 1 5) 0

Exercice 5.

1) $\sqrt{2}\sin x$

2) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$

3) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4) $-2-\sqrt{3}$

Réponses des exercices

Exercice 6.

$$\sin(a+b+c) = \frac{-79\sqrt{2}}{130}$$

$$\cos(a+b+c) = \frac{-47\sqrt{2}}{130}$$

$$\mathrm{tg}(a+b+c) = \frac{79}{47}$$

$$\mathrm{cotg}(a+b+c) = \frac{47}{79}$$

Réponses des exercices

Exercice 7.

1) 0   2) 1

Exercices 8.

1) $\cos 4x + \cos 2x$

2) $2(\cos 4x - \cos 6x)$

3) $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2}$

4) $\sin x \cos x + \sin y \cos y$

5) $\frac{-1}{2}(\sin(x+y) + \sin(3x - 3y))$

6) $\frac{1}{2}(-\cos 4x + \cos(2x + \frac{\pi}{3}))$

Réponses des exercices

Exercice 9. Les solutions dans $]-\pi, \pi]$ sont

1) $\frac{-11\pi}{12}$, $\frac{-\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$, $\frac{-5\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$

2) $\pm\frac{2\pi}{3}$

3) $\pm\frac{\pi}{3}$, $\pm\frac{2\pi}{3}$

4) $\frac{-2\pi}{3}$, $\frac{-\pi}{3}$, 0 , $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$, π ; $\frac{-11\pi}{18}$, $\frac{\pi}{18}$, $\frac{13\pi}{18}$; $\frac{-7\pi}{18}$, $\frac{5\pi}{18}$, $\frac{17\pi}{18}$

5) $\frac{-5\pi}{6}$, $\frac{-\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$; $\frac{-13\pi}{14}$, $\frac{-9\pi}{14}$, $\frac{-5\pi}{14}$, $\frac{-\pi}{14}$; $\frac{3\pi}{14}$, $\frac{11\pi}{14}$

6) $\pm\frac{3\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{2\pi}{3}$

7) dans $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$

8) dans $]0, \pi[$

9) $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3}$

Réponses des exercices

Exercice 10. Il lui faudra approximativement 345,53 secondes pour atteindre cette altitude

Exercice 11. La longueur totale de ce toboggan est de 32,685 mètres

Exercice 12. La hauteur du bâtiment est approximativement de 25,24 mètres.

Exercice 13. La longueur minimale du cable est approximativement de 27,607 mètres.

Exercice 14. L'angle α vaut approximativement 4,72 degrés et le centre du sommet de la tour s'est éloigné de la perpendiculaire d'une distance d de 4,44 mètres.