Faculté des Sciences

MATHEMATIQUES GENERALES I, F. Bastin

# INFORMATIONS POUR LES REPETITIONS DE MATH2007

Première année de bachelier en

Chimie, Géologie et Informatique (Q1)

Année académique 2021-2022

Ch Amory et J Crasborn

# Introduction

## Informations relatives aux répétitions

### Compétences à entraîner

Lors des répétitions, avec l'aide des assistants, il est attendu que les étudiants s'entraînent aux compétences suivantes :

1) **la communication (orale et écrite)**
   — structurée (contexte, justifications, conclusion . . . ),
   — précise (vocabulaire et symboles adéquats, reflet exact de la pensée . . . ) ;
2) **le sens critique** (l'exercice a-t-il un sens ? le résultat est-il plausible ? . . . ) ;
3) **le raisonnement logique et la compréhension** (et non l'application d'une technique de calcul sans réflexion, par imitation . . . ) ;
4) **l'autonomie**
   — dans la recherche de pistes ou d'idées par l'utilisation, dans un premier temps, de documents (syllabus du cours, fascicule intitulé "'Bases", le livre "Maths 1350 cm$^3$ d'exercices corrigés pour la licence 1", le livre "Maths L1 - Je me trompe donc j'apprends" . . . ) et, éventuellement dans un second temps, par une demande d'aide auprès de personnes-ressources pour répondre aux questions ou difficultés rencontrées,
   — dans l'organisation et la planification de son travail ;
5) **la maîtrise des connaissances de base des mathématiques comme outil pour les sciences.**

### Consignes pour préparer une répétition

1. Lire le rappel théorique relatif à la répétition dans le livre d'exercices "Maths 1350 cm$^3$ d'exercices corrigés pour la licence 1" (Dunod)
2. Répondre soigneusement aux questions de théorie relatives à la répétition.
3. Il est vivement conseillé
   — de prendre connaissance des exercices de base du livre d'exercices (Dunod) afin de détecter les difficultés qui pourraient être rencontrées lors de la résolution,
   — de dresser alors une liste de questions sur les difficultés rencontrées, questions à poser à l'assistant lors de la répétition

### Déroulement des répétitions

1. Dans le cas de notions habituellement non vues dans l'enseignement secondaire ou qui semblent souvent poser problème aux étudiants, l'assistant résout 1 ou 2 exercices "modèle" pour leur permettre de se familiariser avec les exercices ayant trait à ces matières ; il fait participer les étudiants à leur résolution. Ensuite, l'assistant fera une synthèse du processus de résolution en mentionnant les éléments de théorie utilisés.
2. Ensuite, chaque étudiant résout, seul ou avec son voisin, les exercices proposés dans la liste "pour s'entraîner" en cherchant les informations nécessaires dans ses documents. S'il reste bloqué malgré tout, il appelle alors l'assistant qui l'aidera dans sa recherche.

Tous les exercices prévus pour la répétition doivent être résolus au plus tard pour la répétition suivante ; la plupart des étudiants seront obligés d'achever à domicile. Dans ce cas, s'ils rencontrent certaines difficultés, ils peuvent toujours en parler lors d'une séance de remédiation ou envoyer un courriel à l'un des assistants.

Les solutions des exercices “pour s’entraîner” se trouvent à la suite des énoncés.

**Les étudiants doivent savoir résoudre les exercices de base et les exercices pour s’entraîner du livre d’exercices “Maths 1350 cm$^3$ d’exercices corrigés pour la licence 1” (Dunod) (sauf indication). Les exercices plus élaborés sont laissés aux étudiants qui souhaitent aller plus loin.**

## Table des matières des répétitions : $1^{er}$ quadrimestre 2021-2022

1. Problèmes élémentaires, unités et puissances de 10.
2. Equations, inéquations et puissances de nombres réels
3. Trigonométrie.
4. Droites et calcul vectoriel.
5. Coniques et représentation d’ensembles.
6. Nombres complexes.
7. Eléments de base relatifs aux fonctions.
8. Polynômes et fractions rationnelles.
9. Limites, continuité et dérivation.
10. Application du théorème de l’Hospital.
11. Primitivation (1).
12. Primitivation (2).
13. Calcul intégral sur un ensemble borné fermé (1).
14. Calcul intégral sur un ensemble non borné fermé (2).
15. Calcul intégral (3).
16. Equations différentielles (1).
17. Equations différentielles (2).
18. Equations différentielles (3).

**Il est possible que ce planning soit légèrement modifié en fonction de l’avancement du cours théorique. Toute modification sera mentionnée sur la page web du cours dont l’adresse suit**

**http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html**

**Il est donc indispensable de la consulter régulièrement.**

L’équipe des assistants
Année académique 2021 - 2022

# Liste 1 : problèmes élémentaires, unités et puissances de 10

**Matière de la répétition**

**Problèmes élémentaires :**
Exercices de base : p 7 à 12
Exercices pour s'entraîner : p 12 et 13

**Unités de mesure et puissances de** 10 **:** p 21 à 23

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Problème élémentaire

Schéma de résolution d'un problème :

1. Que cherche-t-on ?
2. Quelles sont les données ?
3. Si on nomme $x$ l'inconnue, que représente $x$ de façon précise ? (Mentionner l'unité si nécessaire) [1]
4. Que peut-on calculer successivement en utilisant l'inconnue ?
5. Quelle est l'équation obtenue ?
6. La résoudre.
7. Donner la solution du problème en rédigeant une conclusion.

### II. Unités et puissances de 10

1. Dans le système international SI quelle est l'unité de référence pour mesurer
   a) une longueur ? b) une masse ?
2. Découlant des précédentes, quelle est l'unité pour mesurer
   a) une aire ? b) un volume c) une capacité ?
   d) Quel est le lien entre capacité et volume ?
3. Que vaut a) 1 ca ? b) 1 a ? c) 1 ha ?
4. Comment passe-t-on d'une unité de longueur, de masse ou de capacité à l'unité directement
   a) inférieure ? b) supérieure ?
5. Même question pour les unités d'aire, de volume.
6. Définir $10^n$ avec $n$ naturel. Comment peut-on écrire rapidement la valeur de ce nombre ?
7. Définir $10^{-n}$ avec $n$ naturel. Comment peut-on écrire rapidement, sous forme décimale, la valeur de ce nombre ?
8. Comment multiplie-t-on un nombre décimal par $10^n$ si $n$ est un naturel ?
9. Même question dans le cas d'une division.

---

Exemples d'application

En sciences, on est fréquemment amené à résoudre des problèmes et à rédiger leur solution. Bien souvent on doit transformer une unité en une autre afin de rester cohérent. Dès lors, les puissances de 10 jouent un grand rôle, une division par $10^n$ avec $n$ naturel équivalant à une multiplication par $10^{-n}$
.

**Lors de la répétition, les exercices 1 niveau 1 p 12 et 2 niveau 3 p 13 seront résolus par l'assistant.**
**Les autres exercices sont à résoudre pendant la répétition et à achever à domicile si nécessaire.**

1. Plusieurs inconnues sont parfois nécessaires ; dans ce cas, on aura un système d'équations.

# Liste 2 : Équations, inéquations et puissances de nombres réels

**Matière de la répétition**

**Nombres réels :**
Exercices de base : p 23 à 25
Exercices pour s'entraîner : p 26 à 28

**Equations et inéquations :**
Exercices de base : p 33 à 43
Exercices pour s'entraîner : p 44 et 45

**Erratum**

Page 47, résolution de l'exercice 2 (b)
rejeter la valeur $x = 1$ si $\lambda = 3/2$ puisque, dans ce cas, on cherche des valeurs strictement négatives de $x$.
Page 48, supprimer aussi la valeur 1 pour $\lambda = 3/2$.

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Définitions et résolution d'équations

1. a) Définir une équation du premier degré à **une** inconnue en indiquant de façon précise ce que représente chaque lettre utilisée.
   b) Comment résout-on une équation de ce type ? Exprimer avec précision les opérations utilisées (addition, soustraction, multiplication, division)
   c) Une équation du premier degré à une inconnue peut-elle parfois avoir plus d'une (ou moins d'une) solution ? Si oui, à quelle(s) condition(s) ?
2. Définir une équation du premier degré à **deux** inconnues.
   Dans un repère cartésien du plan, comment se représente graphiquement une telle équation ? Répondre de façon précise en envisageant tous les cas possibles.
3. a) Définir une équation du second degré à une inconnue en indiquant de façon précise ce que représente chaque lettre utilisée.
   b) Comment résout-on une équation de ce type ?
4. Donner les formules des produits remarquables (carré et cube)
5. Quels sont les processus possibles pour résoudre une équation de degré strictement supérieur à 2 ?
   Si vous manquez d'imagination, voir le fascicule "bases pour les mathématiques" à l'adresse
   http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html
6. a) Définir une équation fractionnaire.
   b) Quel est le processus de résolution d'une telle équation ?

### II. Valeur absolue et équations

1. Définir en français et en symboles mathématiques la valeur absolue d'un réel.
2. Si deux réels ont la même valeur absolue, que peut-on dire de ces réels ? Exprimer la réponse à cette question en français (par une phrase complète) et en symboles mathématiques.
3. Si on prend la valeur absolue d'un réel, quel type de réel obtient-on ? Rédiger une phrase complète.
4. a) Si $x$ est un réel et $n$ un naturel non nul, que peut-on dire du signe de $x^{2n}$ ? de $x^{2n+1}$ ?
   b) En tenant compte de ces renseignements, que vaut $|x^{2n}|$ ? $|x^{2n+1}|$ ?

### III. Résolution d'inéquations

1. Quelle différence fondamentale existe-t-il entre la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue et celle d'une inéquation du même type ?

2. Comment résout-on une inéquation à une inconnue d'un degré autre que le premier ? Décrire de façon précise les différentes étapes de la résolution.
3. Que sait-on du signe
   a) d'un binôme du premier degré ?
   b) d'un trinôme du second degré ?
4. Quelle différence fondamentale existe-t-il entre la résolution d'une équation fractionnaire et celle d'une inéquation fractionnaire ?
5. Si la valeur absolue d'un réel est
   a) supérieure à un réel strictement positif donné, que peut-on dire de l'un par rapport à l'autre ?
   b) même question en remplaçant "supérieure" par "inférieure".

**IV. Racines de réels et puissances**

a) Pour quels réels une racine d'indice pair est-elle définie ? Quel est le signe de sa valeur ?
b) Mêmes questions dans le cas d'une racine d'indice impair.

**V. Sommes et symboles sommatoires**

a) Ecrire explicitement la somme des $N$ premières puissances naturelles d'un réel ($N$ est un naturel non nul) puis l'écrire avec des symboles sommatoires.
b) Que vaut cette somme ?

---

Exemples d'application

Bien des problèmes en sciences donnent lieu à des équations ou inéquations qu'on doit pouvoir résoudre.

— Ainsi, par exemple, un mouvement rectiligne uniforme donne lieu à une équation du premier degré décrivant la position du mobile en fonction du temps. Graphiquement, le mouvement se représente donc par une droite. Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, on est en présence d'une équation du second degré pour décrire la position du mobile en fonction du temps et la représentation graphique est une parabole.
— Si l'on souhaite rechercher le point de rencontre de deux mobiles, on détermine les coordonnées du point d'intersection des graphiques représentant leurs positions en fonction du temps ; analytiquement, on résout un système de deux équations.
— En optique, l'agrandissement d'un objet situé à une distance $p$ d'une lentille convexe de distance focale $f$ ($f > p$) est donné par $A = \dfrac{f}{f-p}$, ce qui nécessite la résolution d'une équation fractionnaire si $p$ est inconnu ou d'une inéquation si l'agrandissement doit être au moins égal à une valeur donnée.
— Pour calculer la norme de la résultante de deux forces de directions perpendiculaires, après application du théorème de Pythagore, on est amené à calculer une racine carrée.
— Le rayon d'une sphère dont on connaît le volume (excès de liquide lorsqu'on plonge une bille dans un récipient rempli d'eau par exemple) exige le calcul d'une racine cubique.
— Quant aux valeurs absolues, on les utilise notamment pour exprimer la distance entre deux réels donc lorsqu'on travaille avec des valeurs approchées à $\varepsilon$ près ou encore pour les erreurs absolue ou relative.

etc !

**Lors de la répétition, les exercices 2 (5) et 3 (2) p 26 ainsi que 1 (d-e-f), 2 (d-i) et 4 p 44 seront résolus par l'assistant.**
**Les autres exercices sont à résoudre pendant la répétition et à achever à domicile si nécessaire.**

# Liste 3 : Trigonométrie

**Matière de la répétition**

Exercices de base : p 99 à 107
Exercices pour s'entraîner : p 107 et 110

## A préparer AVANT de venir à la répétition

**Trigonométrie**

1. a) Comment associe-t-on un point du cercle trigonométrique à un réel donné ?
   b) Etant donné un point du cercle trigonométrique associé à un réel $x$, comment définir le sinus et le cosinus de ce réel ?
2. a) Pour quelle(s) valeur(s) de $x$ le réel $\sin(x)$ est-il nul ?
   b) Même question pour $\cos(x)$.
   c) Déduire des points précédents pour quelle(s) valeur(s) de $x$ les réels $\tan(x)$ et $\text{cotan}(x)$ sont définis.
   Remarque : $\tan(x)$ et $\text{cotan}(x)$ se notent aussi respectivement $\text{tg}(x)$ et $\text{cotg}(x)$.
3. a) Quelles sont les formules de trigonométrie qui lient au moins 2 des réels $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ et $\text{cotan}(x)$ si $x$ est un réel ? Les citer.
   b) Quels signes ont ces nombres dans les différents quadrants ?
4. Quelles sont les formules de trigonométrie qui permettent de passer de sommes ou différences de nombres trigonométriques à des produits de tels nombres ? Les citer.
5. a) Comment peut-on transformer le cosinus d'un réel en un sinus sans utiliser la formule fondamentale de trigonométrie ?
   b) Si les sinus de 2 réels sont égaux, que peut-on dire de ces réels à un multiple entier de $2\pi$ près ?
6. Si les cosinus de 2 réels sont égaux, que peut-on dire de ces réels à un multiple entier de $2\pi$ près ?

---

Exemples d'application

On utilise notamment la trigonométrie en mécanique (plan incliné, mouvement circulaire), en électricité (courant alternatif), pour étudier les phénomènes ondulatoires (vagues, ondes sismiques, son, lumière, ondes radio ...). Beaucoup de phénomènes naturels varient de façon périodique (alternance d'inspirations et d'expirations dans la respiration, hauteur de la marée à un endroit précis ...) et il est parfois possible de représenter de tels comportements grâce à des fonctions trigonométriques.

Classiquement, on définit un *nombre trigonométrique* comme étant une valeur d'une fonction trigonométrique (sinus, cosinus, tangente, cotangente). Les nombres trigonométriques sont fondamentaux dans l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du plan à l'aide des coordonnées polaires et dans la forme trigonométrique (ou polaire) des nombres complexes.

En analyse, les fonctions trigonométriques sont des fonctions définies sur l'ensemble des réels ou sur une partie de celui-ci. La définition géométrique contient celle de la notion de « mesure d'angle » en radians. Une autre mesure d'angle est bien sûr le degré, $2\pi$ radians correspondant à 360 degrés. *Avez-vous une idée d'où provient la mesure en degrés (et ... pourquoi 360 degrés ?) et connaissez-vous un avantage primordial de la mesure en radians ?*

**Lors de la répétition, les exercices 1 (2) et 2 (g) p 107 ainsi que 3 (1) et 4 (c) p 108 seront résolus par l'assistant.**
**Les autres exercices sont à résoudre pendant la répétition et à achever à domicile si nécessaire.**

# Liste 4 : droites et calcul vectoriel

**Matière de la répétition**

Exercices de base : p 50 à 53 ainsi que p 129 à 139 (sauf les exercices 7 et 8 laissés aux étudiants qui souhaitent aller plus loin)
Exercices pour s'entraîner : p 54 à 56 ainsi que p 139 à 141

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Equations cartésiennes de droites

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Quelle est la forme canonique de l'équation cartésienne d'une droite dans le plan ? Indiquer ce que représente chacune des lettres utilisées.
2. a) Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par le point de coordonnées cartésiennes $(x_1, y_1)$ et de coefficient angulaire $m$ ($x_1, y_1, m$ sont des réels) ?
   b) Si cette droite a pour vecteur directeur le vecteur de composantes $(a, b)$, quel lien existe-t-il entre $m$ et $(a, b)$ ? $a$ et $b$ peuvent-ils être des réels quelconques ? Expliquer.
   c) Quel lien existe-t-il entre le coefficient angulaire d'une droite et la mesure de l'angle $\theta \in [0, \pi]$ que cette droite forme avec l'axe des abscisses ?
3. a) Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par les points distincts de coordonnées cartésiennes respectives $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ ? Envisager tous les cas possibles.
   b) Si cette droite a pour vecteur directeur le vecteur de composantes $(a, b)$, quel lien existe-t-il entre $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ et $(a, b)$ ?
4. Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par le point de coordonnées cartésiennes $(x_1, y_1)$ et parallèle à
   a) l'axe des abscisses ?
   b) l'axe des ordonnées ?
5. Si deux droites non parallèles aux axes sont
   a) orthogonales entre elles, que peut-on dire de leurs coefficients angulaires ?
   b) parallèles entre elles, que peut-on dire de leurs coefficients angulaires ?
6. Soit la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes $(x_1, y_1)$ et dont un vecteur directeur a pour composantes $(a, b)$. Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de cette droite.

### II. Résolution de systèmes linéaires

Quels sont les processus les plus fréquemment utilisés pour résoudre les systèmes linéaires ?

### III. Vecteurs - Produits scalaire et vectoriel

1. Dans un repère orthonormé d'origine $O$ du plan, on définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par son origine $A$ et son extrémité $B$.
   a) Comment écrire $\overrightarrow{AB}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
   b) Quelles sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AB}$ si $A$ et $B$ ont respectivement pour coordonnées $(x_A, y_A)$ et $(x_B, y_B)$ ?

2. On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$.
   a) Comment calcule-t-on le produit scalaire de 2 vecteurs de l'espace dont on connaît les composantes dans une base orthonormée ? Exprimer la réponse en français et en symboles mathématiques. Quel type d'élément mathématique obtient-on ?
   b) Comment calcule-t-on le produit vectoriel de 2 vecteurs de l'espace dont on connaît les composantes dans une base orthonormée ? Exprimer la réponse en symboles mathématiques. Quel type

d'élément mathématique obtient-on ?
c) Le produit scalaire de 2 vecteurs est-il commutatif ? Et le produit vectoriel ?

3. Quelle est l'expression vectorielle qui permet de calculer la projection orthogonale d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sur la droite vectorielle engendrée par un vecteur non nul $\overrightarrow{v}$ ?

---

Exemples d'application

La notion de vecteur est fondamentale en physique ; elle est notamment utilisée pour caractériser un déplacement, une vitesse, une force, un champ électromagnétique. En effet, un vecteur permet de modéliser des grandeurs qui ne peuvent être complètement définies par un nombre comme une température ou une masse. Pour définir un déplacement, par exemple, on a besoin d'une direction et d'un sens en plus d'une longueur. On utilise le produit scalaire pour déterminer le travail d'une force ou la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite. Le produit vectoriel intervient dans le calcul du moment d'une force par rapport à un point, pour déterminer la force magnétique dans un champ ...

**Lors de la répétition, les exercices 3 (a) p 54, 1 et 3 p 139-140 seront résolus par l'assistant. Les autres exercices sont à résoudre pendant la répétition et à achever à domicile si nécessaire.**

# Liste 5 :
## coniques et représentation d'ensembles

**Matière de la répétition**

Exercices de base : p 81 à 88
Exercices pour s'entraîner : p 88 à 95

**Erratum**

Page 93, solution 3 (1)
Le graphique de droite est celui de l'ensemble $B$ (et non $A$)
Pour l'ensemble $A$ :
(a) $E_y = [0,2] \cup \{-2\}$
(b) ... les ordonnées varient dans $[\sqrt{4-x^2}, 2] \cup \{-2\}$ et si $y$ est fixé dans $[0,2]$ alors les abscisses varient dans $[-2-y, -\sqrt{4-y^2}]$ ; si $y=-2$ alors $x=0$.
(c) $A = \{\ldots\} \cup \{\ldots\} \cup \{(0,-2)\}$ et $A = \{\ldots\} \cup \{(0,-2)\}$.

## A préparer AVANT de venir à la répétition

### I. Les coniques

1. Soit un repère orthonormé du plan.
   a) Donner l'équation canonique du cercle centré au point de coordonnées $(x_1, y_1)$ et de rayon R.
   b) Que devient cette équation si le cercle est centré à l'origine ?
   c) Quelle caractéristique commune ces équations ont-elles permettant de les différencier des équations d'autres coniques ?
   d) Donner l'équation canonique d'une ellipse.
   e) Comment, à la lecture de cette équation et de celles qui précèdent, peut-on immédiatement différencier celle d'un cercle de celle d'une ellipse ?
   f) Donner l'équation canonique d'une hyperbole.
   g) Comment, à la lecture de cette équation et de celle d'une ellipse, peut-on immédiatement les différencier ?
   h) Donner l'équation canonique d'une parabole.
   i) Comment, à la lecture de cette équation et de celles ci-dessus, peut-on immédiatement repérer que c'est celle d'une parabole ?
2. a) Si on considère l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donner les coordonnées de ses foyers, de ses points d'intersection avec les axes et la valeur de son excentricité.
   b) Si on considère l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donner les coordonnées de ses foyers, de ses points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes de ses asymptotes et la valeur de son excentricité.
   c) Si on considère la parabole d'équation $y^2 = 2px$, donner les coordonnées de son foyer, de son point d'intersection avec l'axe des abscisses et la valeur de son excentricité.

### II. Représentation d'ensembles

Dans un repère orthonormé, on considère la fonction $f$ dont la représentation graphique a pour équation $y = f(x)$. Pour une même abscisse $x$ du domaine de définition de $f$, on considère un point $P_1$ situé sous la courbe et d'ordonnée $y_1$, un point $P_2$ situé sur la courbe et d'ordonnée $y_2$ ainsi qu'un point $P_3$ situé au-dessus de la courbe et d'ordonnée $y_3$. Comparer $y_1,\ y_2,\ y_3$ à $f(x)$.
La courbe partage le plan en deux régions, l'une positive pour laquelle $y - f(x) > 0$ et l'autre négative pour

laquelle $y - f(x) < 0$, quelle que soit la valeur du réel $x$ du domaine de définition de $f$. Pour représenter un ensemble de points défini à l'aide d'inégalités, on commencera donc toujours par représenter ses ≪ bords ≫ qui correspondent à l'égalité.

---

Exemples d'application

Un cône circulaire droit à deux nappes (≪ diabolo ≫) peut être engendré par la rotation d'une droite sécante à une autre autour de cette autre prise comme axe de la rotation. Les coniques (ou sections coniques) peuvent être obtenues par l'intersection d'un tel cône par un plan. Selon la position de celui-ci, on obtient un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

La trajectoire d'un corps céleste en orbite autour d'une étoile ou d'une autre planète (la Terre autour du Soleil, par exemple) est une ellipse dont l'étoile ou la planète occupe l'un des foyers. De nombreuses comètes ont des orbites elliptiques dont l'excentricité est proche de 1 mais certaines comètes peuvent avoir des trajectoires hyperboliques ou paraboliques.

En effectuant une rotation d'une ellipse autour de son axe focal, on engendre un ellipsoïde de révolution qui jouit de la propriété de réflexion suivante : toute onde émise à partir d'un des foyers est réfléchie par l'ellipsoïde vers le second foyer. La Rotonde du Capitole à Washington est une galerie à écho de ce type à plafond elliptique : toute personne qui chuchote en l'un des foyers peut être entendue par une personne placée à l'autre foyer. Cette propriété de réflexion est également utilisée en médecine pour désintégrer des calculs rénaux au moyen d'ondes de haute densité. Le médecin positionne le patient de telle sorte que le calcul se trouve en l'un des foyers et l'émetteur des ondes réfléchies par l'ellipsoïde en l'autre foyer.

La trajectoire d'un électron qui, sans interaction, passerait en ligne droite tout près d'un ion négatif au repos, est en fait une trajectoire hyperbolique à cause de la force de répulsion.
Si des ondes circulaires émises par deux sources oscillant en phase interfèrent, les points où l'amplitude est maximale ou minimale sont situés sur des hyperboles dont les sources en sont les foyers.

La trajectoire décrite par un objet (ballon, saut d'un animal ...) lancé et soumis à la pesanteur est une parabole.
En effectuant une rotation d'une parabole autour de son axe de symétrie, on obtient un paraboloïde de révolution qui, grâce à la propriété optique des paraboles, permet de concentrer des ondes ou des rayons en un point (antenne parabolique, four solaire, miroir de télescope ...) ou de diffuser sous forme d'un faisceau cylindrique de la lumière produite par une ampoule située au foyer (lampe de poche, phare ...).

Les descriptions d'ensembles sont notamment utiles pour le calcul des intégrales doubles, lesquelles permettent par exemple de calculer des volumes mais aussi des centres de masse, des moments d'inertie ...

**Lors de la répétition, l'exercice 2 (en se limitant aux hyperboles et aux paraboles) p 88 ainsi que les exercices 3 (1A) p 88 et 3 (2b) p 89 seront résolus par l'assistant.**
**Les autres exercices sont à résoudre pendant la répétition et à achever à domicile si nécessaire.**

# Liste 6 : nombres complexes

**Matière de la répétition**

Exercices de base : p 165 à 174
Exercices pour s'entraîner : p 174 à 176

## A préparer AVANT de venir à la répétition

**Les nombres complexes**

1. Définir un nombre complexe puis en donner sa notation pratique.
2. Définir a) les parties réelle et imaginaire, b) le conjugué, c) le module d'un nombre complexe.
3. Dans le plan complexe,
   a) quelle est l'interprétation graphique du module d'un nombre complexe ?
   b) que dire de la représentation d'un nombre complexe et de son conjugué ?
4. Que peut-on dire des puissances naturelles de $i$ ?
5. Si $z$ est un nombre complexe non nul, comment rendre réel le dénominateur de $\frac{1}{z}$ ?
6. Si $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), en donner la forme trigonométrique.
   Quel lien peut-on faire avec les coordonnées polaires ?
7. Quelles différences y a-t-il entre la résolution et les solutions d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ ?

   **Lire l'exercice 1 p 165 et 166.**

---

Exemples d'application

Les liens qui existent entre la trigonométrie et les opérations définies au sein de l'ensemble des complexes sont importants.
Les nombres complexes interviennent notamment dans le cadre du calcul intégral et de la résolution des équations différentielles mais aussi en cristallographie et en électricité par exemple.

**Lors de la répétition, les exercices 1 ($z_6$), 2 ($z_3$) p 174 ainsi que l'exercice 3 (c-d-e) p 175 seront résolus par l'assistant.**
**Les autres exercices sont à résoudre pendant la répétition et à achever à domicile si nécessaire.**

# Liste 7 :
# éléments de base relatifs aux fonctions

**Matière de la répétition**

Exercices de base : p 191 à 201
Exercices pour s'entraîner : p 202 à 208

## A préparer AVANT de venir à la répétition

**I. Eléments de base relatifs aux fonctions**

1. A partir du graphique d'une fonction $f : x \mapsto f(x)$ comment représenter le graphique de
   a) $g : x \mapsto |f(x)|$
   b) $h : x \mapsto -f(x)$
   c) $i : x \mapsto f(x+a)$ (envisager $a > 0$ et $a < 0$)
   d) $i : x \mapsto f(x) + a$ (envisager $a > 0$ et $a < 0$)
2. Soit une fonction $f$. Définir
   a) le domaine de définition de $f$
   b) l'image de $f$
   c) une fonction $f$ paire (respectivement impaire)
   d) une fonction $f$ périodique
   e) une fonction $f$ injective, surjective, bijective
3. Comment représenter le graphique de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ ?
4. a) A quelle condition une fonction admet-elle une fonction inverse ?
   b) Si cette condition n'est pas satisfaite, que doit-on faire si on veut quand même définir une fonction inverse ?
   c) Si une fonction admet une fonction inverse, définir cette dernière.
   d) Que peut-on dire des représentations graphiques de 2 fonctions inverses l'une de l'autre ?
5. Donner le domaine de définition de chacune des fonctions élémentaires.
6. Définir une fonction composée et représenter schématiquement la composition.

**II. Manipulation des fonctions élémentaires**

1. Définir les fonctions trigonométriques inverses.
2. Donner la propriété faisant intervenir une somme et un produit
   a) pour l'exponentielle
   b) pour le logarithme népérien

---

**Lors de la répétition, les exercices 3 ($f_3$) et 4 ($f_{10}$) p 202 ainsi que les exercices 5 ($f_2$), 6 (1) et 7 (e) p 203 seront résolus par l'assistant.**
**Les autres exercices sont à résoudre pendant la répétition et à achever à domicile si nécessaire.**

# Liste 8 : polynômes et fractions rationnelles

**Matière de la répétition**

Exercices de base : p 58 à 67
Exercices pour s'entraîner : p 67 et 68

## A préparer AVANT de venir à la répétition

**I. Factorisation des polynômes**

1. Comment vérifier qu'un polynôme est divisible par $(x - a)$ ?
2. Qu'appelle-t-on multiplicité d'un zéro d'un polynôme ?
3. Quelles sont les propriétés des polynômes ?
4. Définir la division de 2 polynômes.
5. Comment diviser un polynôme par un autre ?
6. Citer les différentes méthodes de factorisation (voir fascicule "Bases" qu'on peut trouver à l'adresse http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html

**II. Décomposition en fractions simples**

1. Définir
   a) fraction rationnelle
   b) fraction rationnelle propre
   c) fraction rationnelle simple
2. Quel est le processus à suivre pour décomposer une fraction rationnelle en une somme de fractions simples ?

---

Exemples d'application

Cette liste concerne
- les décompositions en fractions simples (utilisées notamment pour la primitivation et le calcul intégral)
- la factorisation des polynômes

**Lors de la répétition, l'exercice 1 (d-g-h) p 67 ainsi que l'exercice 3 (d-f) p 68 seront résolus par l'assistant.**
**Les autres exercices sont à résoudre pendant la répétition et à achever à domicile si nécessaire.**

# Liste 9 : limites, continuité et dérivation

**Matière de la répétition**

**Limites :**
Exercices de base : p 210 à 216
Exercices pour s'entraîner : p 216 et 217
**Dérivées :**
Exercices de base : p 227 à 268
exceptés les exercices 2 p 232 et 233, 5 ($f_9$) p 235 et 245-246, 8 p 255 à 262 qui se rapportent à la répétition 10; l'exercice 7 p 252 à 255 est réservé aux étudiants qui souhaitent aller plus loin.
Exercices pour s'entraîner : p 268 et 279
excepté l'exercice 4 p 269 qui se rapporte à la répétition 10.

**Erratum**

Page 217, solution 2 (l) : $\left(-\frac{3}{2}\right)^+$ (et non $\left(-\frac{3}{2}\right)^-$).

## A préparer AVANT de venir à la répétition

**I. Limites des valeurs des fonctions**

1. Si on calcule la limite d'une fonction
   a) en un réel, quelle condition doit-il satisfaire ?
   b) à gauche (resp. à droite) d'un réel, quelle condition doit-il satisfaire ?
   c) en l'infini, quelle condition le domaine de définition de la fonction doit-il satisfaire ?
   d) Même question pour une limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

   Si cette condition est satisfaite alors le calcul de la limite peut être envisagé ; sinon, le calcul n'a pas de sens. Attention, ce n'est pas parce qu'on peut envisager de calculer une limite que la limite existe toujours !
2. Enoncer le théorème de l'étau pour une limite en un réel ainsi que pour une limite en l'infini.
3. Enoncer le théorème de la limite des fonctions composées.
4. Qu'appelle-t-on indétermination et quels sont les différents cas d'indétermination ?
5. Quel est le processus à suivre dans le cas d'un calcul de limite ?
6. Comment calcule-t-on la limite en $-\infty$ (resp. en $+\infty$)
   a) d'un polynôme ?
   b) d'une fraction rationnelle ?
7. Comment lève-t-on une indétermination du type "$\frac{0}{0}$" dans le cas d'une fraction rationnelle ?

**II. Continuité et dérivation**

1. Quand dit-on qu'une fonction est continue en un point de son domaine ?
2. A quelle(s) condition(s) une fonction composée est-elle continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ ?
3. Donner les domaines de continuité des fonctions élémentaires.
4. (a) Quand dit-on qu'une fonction est dérivable en un point de son domaine ?
   (b) Que vaut alors sa dérivée en ce point ?
5. Quelle interprétation graphique peut-on donner de la dérivée d'une fonction en un point de son domaine de dérivabilité ?
6. Donner une équation cartésienne de la tangente au graphique de $f$ en son point d'abscisse $x_0$ si $f$ est dérivable en ce point.
7. Quel est le lien entre continuité et dérivabilité ?

8. (a) A quelle(s) condition(s) une fonction composée est-elle dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ?
   (b) Que vaut alors sa dérivée sur cet intervalle ?
9. Donner les domaines de dérivabilité des fonctions élémentaires ainsi que leurs dérivées.
10. Donner les énoncés des théorèmes de dérivation
    (a) d'une combinaison linéaire de fonctions.
    (b) d'un produit de 2 fonctions.
    (c) d'un quotient de 2 fonctions.
11. Quel est le lien entre la dérivée d'une fonction (resp. sa dérivée seconde) et sa croissance (resp. sa concavité) ?
12. Quel est le processus à suivre pour calculer la dérivée d'une fonction $f$
    (a) en tout point de son domaine de dérivabilité ?
    (b) en un point $x_0$ de son domaine de dérivabilité ?

## III. Etude d'une fonction

1. Etapes d'une étude de fonction :
   (a) Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité.
   (b) Examiner si la fonction est paire, impaire, périodique.
   (c) Déterminer les zéros de la fonction.
   (d) Etudier la fonction aux extrémités du domaine de définition de la fonction (limites, asymptotes).
   (e) Etudier la monotonie (étude du signe de la dérivée première) et la concavité (étude du signe de la dérivée seconde) de la fonction.
   (f) Construire un tableau reprenant tous les renseignements obtenus ci-dessus.
   (g) Représenter le graphique de la fonction sans oublier de mentionner le nom des axes et les unités sur chacun d'eux.
2. Comment détermine-t-on l'existence ou non d'une asymptote
   (a) verticale en un point ?
   (b) horizontale en $+\infty$ (resp. $-\infty$) ?
   (c) oblique en $+\infty$ (resp. $-\infty$) ?
   
   Dans chaque cas, en donner l'équation cartésienne.

---

## Exemples d'application

Les notions de limites et de dérivation ainsi que leurs propriétés sont utilisées dans de multiples contextes pour la modélisation de phénomènes et le traitement de ces modèles.

Voici un exemple élémentaire. La loi de chute libre des corps (mise en évidence déjà par Galileo Galilei, 1564-1642, à la fin du XVIeme siècle) affirme que lorsqu'on lâche un corps près de la surface de la Terre, la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps durant lequel on le laisse tomber. Si on néglige la résistance de l'air, la distance $y$ est donnée par $y = 16\ t^2$ lorsqu'elle est mesurée en pieds, et par $y = 4,9\ t^2$ lorsqu'elle est mesurée en mètres [2]. Ainsi, la vitesse moyenne pendant les deux premières secondes est

$$\frac{16.2^2 - 16.0^2}{2} = 32 \text{ pieds par seconde}$$

et la vitesse moyenne entre la première et la deuxième seconde est

$$\frac{16.2^2 - 16.1^2}{1} = 48 \text{ pieds par seconde}$$

2. attention donc aux lois trouvées dans diverses références ! Prendre garde aux unités de mesure, au SI, etc

Si on s'intéresse plutôt à la vitese ≪ instantanée ≫ au temps $t_0$, on est amené à calculer les quotients

$$\frac{16.(t_0+h)^2 - 16.t_0^2}{h}$$

pour des valeurs de $h$ de plus en plus petites. Cela conduit bien sûr à la notion de *dérivée* de la fonction $t \mapsto y(t)$ en $t_0$...

**Lors de la répétition, les exercices 1 (2) et 2 (e) p 216, l'exercice 2 ($f_3$ et $f_{15}$) p268-269 ainsi que l'exercice 3 (1(a)-(b)-(c)) p 269 seront résolus par l'assistant.**
**Les autres exercices sont à résoudre pendant la répétition et à achever à domicile si nécessaire.**

# Liste 10 :
# application du théorème de l'Hospital

**Matière de la répétition**

Exercices de base : 2 p 232 et 233, 5 ($f_9$) p 235 et 245-246, 8 p 255 à 262
Exercices pour s'entraîner : 4 p 269

**Erratum**

Page 273, solution 4 :
(d) Limite : $0^-$ (et non $0^+$)
(e) Limite : $0^-$ (plus précis)
(g) Limite : $0^+$ (plus précis)
(i) Limite : $0^+$ (plus précis)
(j) Limite : $0^+$ (plus précis)
(l) Domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2, k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (« , » et non « + ») ; limite : $(-1/2)^-$ (plus précis)
(p) Limite : $1^-$ (plus précis)

## A préparer AVANT de venir à la répétition

**Théorème de l'Hospital**

1. (a) Quelles sont les hypothèses à vérifier pour l'application du théorème de l'Hospital ?
   (b) Si ces hypothèses sont vérifiées, quelle est la thèse du théorème de l'Hospital ?

ATTENTION : lors de l'application du théorème de l'Hospital,

$$\lim_{x\to a} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = l^+ \textbf{ n'entraîne pas } \text{que } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l^+.$$

**REMARQUE :** dans la suite de l'année, si un exercice porte explicitement sur le calcul d'une limite nécessitant l'utilisation du théorème de l'Hospital, on doit mentionner le voisinage dans lequel on travaille et vérifier les hypothèses du théorème avant de l'appliquer **MAIS** si la limite intervient dans un autre cadre (par exemple le calcul d'une intégrale) on pourra justifier immédiatement le résultat de la limite en disant que "toute puissance antagoniste domine le logarithme en 0 et en $+\infty$" et "à l'infini, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste de la variable" (exercice 2 p 232-233).

---

**Lors de la répétition, les exercices 2(2) p 232-233 et 4 (d-e-l) p 269 seront résolus par l'assistant.**
**Les autres exercices sont à résoudre pendant la répétition et à achever à domicile si nécessaire.**

# Listes 11 et 12 : primitivation

**Matière de la répétition**

Exercices de base : p 308 à 315
Exercices pour s'entraîner : p 315 à 318

## A préparer AVANT de venir aux répétitions

1. Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $A$ de $\mathbb{R}$. Qu'appelle-t-on primitive de $f$ sur $A$ ?
2. Donner une condition suffisante pour qu'une fonction admette une primitive.
3. (a) Une fonction primitivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ peut-elle admettre plus d'une primitive ?
   (b) Si oui, existe-t-il un lien entre elles ? Lequel ?
4. Quelles sont les primitives immédiates ?
5. Soit $G$ une fonction définie par $G(x) = a\,f(x) + b\,g(x)$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et où $f$ et $g$ sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$.
   (a) Quelles sont les conditions pour que $G$ soit primitivable sur $I$ ?
   (b) Que vaut alors une primitive de $G$ sur $I$ ?
6. Soit $G$ une fonction définie par $G(x) = f(x)Dg(x)$ où $f$ est une fonction définie sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ et où $g$ est une fonction dérivable sur $I$.
   (a) Quelles sont les conditions pour que $G$ soit primitivable sur $I$ ?
   (b) Que vaut alors une primitive de $G$ sur $I$ ?
7. Soit $G$ une fonction définie par $G(x) = f(g(x))Dg(x)$ où $f$ est une fonction définie sur un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$ et $g$ est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$.
   (a) Quelles sont les conditions pour que $G$ soit primitivable sur $I$ ?
   (b) Que vaut alors une primitive de $G$ sur $I$ ?
8. (a) Quelles sont les différentes techniques de primitivation ?
   (b) Dans quel cas applique-t-on chacune d'entre elles ?
9. Quel est le processus à suivre pour calculer une primitive ?

---

Exemples d'application

Le calcul des primitives est notamment utile pour le calcul des intégrales mais aussi pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

**Liste 11**

**Lors de la répétition, l'exercice 1($f_3$, $f_7$, $f_{11}$, $f_{12}$ et $f_{16}$) p 315 sera résolu par l'assistant. Ensuite, il répondra aux questions portant sur l'exercice de base 1 ($f_1$, $f_2$, $f_3$ et $f_4$) p 308 à 311.**

**Liste 12**

**Lors de la répétition, les exercices 2 (1) et 3 p 316 à 318 seront résolus par l'assistant. Les autres exercices sont à résoudre pendant les répétitions et à achever à domicile si nécessaire.**

# Listes 13-14-15 : calcul intégral

**Matière de la répétition**

Exercices de base : p 333 à 363
excepté les exercices 9 - 10 - 11 p 354 à 358 et 14 p 362-363 réservés aux étudiants qui souhaitent aller plus loin.
Exercices pour s'entraîner : p 363 à 371
excepté l'exercice 6 p 367 et 371 réservé aux étudiants qui souhaitent aller plus loin.

## A préparer AVANT de venir aux répétitions

### I. Calcul d'intégrales sur un ensemble borné fermé

1. Définir une fonction intégrable sur $[a, b],\ a, b \in \mathbb{R}$.
2. Soit $f$ une fonction définie sur $[a, b]$. Définir l'intégrale de $f$ sur $[a, b],\ a, b \in \mathbb{R}$.
3. Donner une condition suffisante pour qu'une fonction soit intégrable sur un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$.
4. Comment les primitives permettent-elles de calculer une intégrale ?
5. Citer l'énoncé du théorème d'intégration par variation de primitives
6. Si $x$ est un réel pour lequel $\tan(x/2)$ existe, déterminer l'expression de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ en fonction de $\tan(x/2)$

### II. Calcul d'intégrales sur un ensemble non borné fermé

1. Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}$ ( ou $b = +\infty$).
   (a) Donner la définition de l'intégrabilité de $f$ sur $[a, b[$.
   (b) Que devient-elle si $f$ est positive (resp. négative) sur $[a, b[$ ?
   (c) Donner la définition de l'intégrale de $f$ sur $[a, b[$ si $f$ y est intégrable.
2. Soit $s \in \mathbb{R}$. Quand la fontion $f$ définie par $f(x) = 1/x^s$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$ (resp. sur $[1, +\infty[$) ?
3. Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b[,\ a, b \in \mathbb{R}$ ( ou $b = +\infty$).
   (a) Citer le(s) critère(s) d'intégrabilité pouvant être utilisé(s) pour prouver l'intégrabilité de $f$ sur $[a, b[$
   — lorsque $b \in \mathbb{R}$
   — lorsque $b = +\infty$
   (b) Citer le(s) critère(s) pouvant être utilisé(s) pour prouver la **non** intégrabilité de $f$ sur $[a, b[$
   — lorsque $b \in \mathbb{R}$
   — lorsque $b = +\infty$
4. Quels sont les principales techniques d'intégration ?
   Citer l'énoncé du théorème d'intégration
   (a) par parties.
   (b) par changement de variables.

### III. Calcul d'aires

Quelle est l'interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue positive (resp. négative) sur un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$ ?

**IV. Calcul de volumes**

1. Définir un solide de révolution.
2. Comment en calcule-t-on le volume ?

---

Exemples d'application

L'intégration de fonctions d'une variable réelle et ses propriétés sont utilisées dans de multiples contextes pour la modélisation de phénomènes et le traitement de ces modèles.

En voici un exemple élémentaire. On suppose que $T = f(t)$ est la température relevée au temps $t$ dans une station météo. La station effectue des mesures toutes les heures, durant 24h. Pour avoir une idée de la température pour un jour donné, on peut bien sûr prendre par exemple six températures dans des intervalles de temps de 4h, à savoir $T_1 = f(4),\ T_2 = f(8),\ T_3 = f(12),\ T_4 = f(16),\ T_5 = f(20),\ T_6 = f(24)$ et en chercher la moyenne

$$T_{moyen} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6}{6}.$$

Cette façon de procéder peut ne pas refléter de manière satisfaisante ce qui s'est vraiment passé car il est bien sûr possible que de brèves perturbations se produisent dans un laps de temps qui n'est pas pris en compte par nos calculs (par exemple orage soudain entre $T_2$ et $T_3$).

La fonction « température » étant continue, il semble raisonnable de *définir la valeur moyenne* de cette température en prenant une « limite de moyennes quand le nombre d'échantillons devient grand ». Une définition correcte de ce processus consiste ainsi à définir

$$T_{moyen} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)$$

où $t_j = j\ \frac{24}{n}$. En posant $t_0 = 0$, on a donc

$$T_{moyen} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(t_j) = \frac{1}{24} \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})\ f(t_j) = \frac{1}{24} \int_0^{24} f(t)\ dt.$$

**Liste 13**

**Lors de la répétition, l'exercice 2 (m-p) p 363-364 sera résolu par l'assistant.**
**Ensuite, il répondra aux questions portant sur les exercices de base 1 p 333 et 3 p 335.**

**Liste 14**

**Lors de la répétition, les exercices 2 (e-i-k-o-s-u) p 363-364 et 5 (i) p 366 seront résolus par l'assistant.**

**Liste 15**

**Lors de la répétition, les exercices 3 (1 A et 2 (b)) p 364-365 et 4 (2) p 366 seront résolus par l'assistant.**
**Ensuite, il répondra aux questions portant sur l'exercice de base 13 p 359 à 362.**
**Les autres exercices sont à résoudre pendant les répétitions et à achever à domicile si nécessaire.**

# Listes 16-17-18 : Équations différentielles

**Matière de la répétition**

Exercices de base : p 413 à 435
Exercices pour s'entraîner : p 435 à 437

## A préparer AVANT de venir aux répétitions

1. Définir une EDLCC[3] d'ordre 1.
2. Donner l'équation homogène associée à cette équation.
3. Donner l'équation caractéristique associée à cette équation homogène.
4. Donner l'ensemble des fonctions solutions de l'équation homogène.
5. De combien de constantes arbitraires les solutions dépendent-elles ?
6. Répondre aux mêmes questions pour une EDLCC d'ordre 2.
7. Quelle est la forme générale de toute solution d'une EDLCC ?
8. a) Qu'appelle-t-on "méthode des exponentielles polynômes" ?
   b) Comment détermine-t-on une solution particulière dans ce cas pour une équation d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) ?
   c) Si le second membre n'est pas une exponentielle polynôme, quels cas particuliers peut-on envisager pour quand même utiliser cette méthode ?
9. a) Qu'appelle-t-on "méthode de variation des constantes" ?
   b) Comment détermine-t-on une solution particulière dans ce cas pour une équation d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) ?
10. Quel est le processus à suivre pour résoudre une EDLCC ?

---

Exemples d'application

Les équations différentielles sont utilisées dans de multiples contextes pour la modélisation de phénomènes et le traitement de ces modèles. En voici un exemple.

Soient $x$ et $y$ les tailles de deux organes d'un même animal (considérées comme fonction du temps). Les données empiriques montrent que les taux de croissance spécifiques, à savoir

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}D_t x(t) \quad \text{et} \quad \frac{1}{y}\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}D_t y(t)$$

peuvent être considérés comme approximativement proportionnels. Cela signifie qu'il existe une constante non nulle $k$ telle que

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dt} = k\frac{1}{x}\ \frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

En considérant que $y$ est fonction de $x$, en utilisant la dérivation des fonctions de fonctions et en supposant que $\frac{dx}{dt}$ n'est pas nul, on a

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\ \frac{dx}{dt}$$

donc (1) devient

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x} \qquad (2)$$

Cette équation est « à second membre séparé » et aussi « linéaire » ; elle peut être résolue par des méthodes directes (qui sont notamment présentées dans les notes de cours). Sa solution générale s'écrit

$$y = Cx^k$$

3. abréviation pour "équation différentielle linéaire à coefficients constants"

pour une certaine constante $C$ (on parle de relation « allométrique »).

Il existe de nombreux types d'équations différentielles. Les méthodes de résolution ne sont pas toujours évidentes ni aisées à manipuler, sauf dans le cas des équations différentielles *linéaires à coeffcients constants.* Il est donc très important d'être capable de les reconnaître.

Tout ceci est abondamment illustré notamment dans les notes, où une attention toute particulière est accordée également à l'évolution des populations (en présence ou non de facteurs limitants).

**Liste 16**

**Transformer les équations de l'exercice 1 p 435 pour qu'elles deviennent homogènes puis les résoudre. On résoudra l'équation avec son second membre non nul à la répétition 17.**

**Lors de la répétition, l'exercice 4 (1) p 436 et l'exercice 1 (b-f-g-h) p 435 seront résolus par l'assistant.**

**Liste 17**

**Lors de la répétition, l'exercice 1 (b-f-g-h) p 435 sera résolu par l'assistant.**

**Liste 18**

**Lors de la répétition, les exercices 2 (b) p 435 et 3 (c) p 436 seront résolus par l'assistant. Les autres exercices sont à résoudre pendant les répétitions et à achever à domicile si nécessaire.**