



LIÈGE université
Sciences

Mathématiques générales I

Année académique 2021-2022

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
EXERCICES DE RÉVISION EN VUE DE L'INTERROGATION DU
05/11/2021

Problèmes élémentaires

1. Pour le lait, $\frac{3}{20}$ de sa masse environ fournit de la crème et 25 % de la masse de la crème fournit du beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2 000 l de lait si la densité du lait est 1,032 ?
2. Un tonneau d'une contenance de 150 dm^3 est rempli d'eau à l'aide de bouteilles de 75 cl. Combien de bouteilles doit-on verser pour remplir complètement le tonneau ?
3. On dispose d'un récipient contenant 1 litre de mélange d'alcool et d'eau et on sait que l'alcool est présent à une concentration de 30% en volume (du mélange complet). On chauffe le mélange. Il y a donc évaporation et on suppose que l'alcool s'évapore trois fois plus vite que l'eau. Sachant que celle-ci s'évapore à raison de 1 cm^3 par minute, quelle devra être la durée de l'opération de chauffage pour obtenir un mélange dans lequel on ne trouve plus que 25% d'alcool en volume ?

Manipulations de réels

Résoudre les équations et inéquations suivantes (x est une inconnue réelle)

1. $|4x^2 - 1| = 3x$
2. $|4x^2 - 1| = |3x|$
3. $x^2 - 9 \geq 3x|x - 3|$
4. $x \geq 27x^4$
5. $|x - 3| \geq |x + 3|$
6. $(3 - x)^2 \leq x - 3$
7. $x|x^2 - 9| \leq 4|x - 3|$
8. $\frac{|3 - x|}{x^2 - 9} \geq |x - 3|$
9. $|x^2 - 9| \geq 5$
10. $\frac{1}{|2x + 5|} > 3$

Calcul vectoriel et droites

1. Dans un repère orthonormé, on donne les droites d_1 , d_2 et d_3 dont les équations cartésiennes sont

$$d_1 : 2x - y + 3 = 0 \quad d_2 : 5x + 2y - 12 = 0 \quad d_3 : x + 4y - 24 = 0.$$

- (a) Représenter ces 3 droites.
 - (b) Les droites d_1 et d_2 se coupent au point A . Déterminer l'équation cartésienne de la droite d passant par A et orthogonale à d_3 .
 - (c) Donner des équations paramétriques de d_3 .
 - (d) Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de la droite d_2 avec l'axe des abscisses.
 - (e) Le point C de coordonnées $(4, 5)$ appartient-il à d_1 ? à d_2 ? à d_3 ?
 - (f) Déterminer le produit scalaire $\vec{AC} \bullet \vec{BC}$.
 - (g) Déterminer les composantes de la projection orthogonale de \vec{AB} sur d_1 .
2. Dans un repère orthonormé, on donne les points A , B et C dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement

$$(-1, 1, 0) \quad (2, -1, 3) \quad (0, -4, 2).$$

Déterminer les composantes du produit vectoriel $\vec{AB} \wedge 2\vec{BC}$

Trigonométrie

1. Si α désigne un réel de l'intervalle $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ et si $\tan(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, que valent les nombres $\cotan(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$?
2. Simplifier $\frac{\cos(\frac{4\pi}{3})}{\sin^2(\frac{7\pi}{3})}$.

3. Résoudre dans $[\pi, 2\pi]$ (x est une inconnue réelle)

(a) $\sin(2x) \cos(2x) = -1$

(b) $4 \sin(2x) \cos(2x) = -1$

(c) $\sin(2x) = \sin(6x)$

(d) $4 \cos^2(2x) = 3$

(e) $2 \cos^2(2x) = \sin^2(4x)$

(f) $\sin(x) \sin(2x) = \cos(2x) \cos(x) + \frac{1}{2}$

Coniques

On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s)? Quelle est leur excentricité? Quelle est l'équation des éventuelles asymptotes? Quelle est l'équation des éventuelles asymptotes?

1. $x^2 + y = 4$

2. $y^2 = x + 1$

3. $x^2 + y^2 + 4x = 0$

4. $x^2 - 1 = 4y^2$

5. $x^2 + 3y^2 = 12$

Nombres complexes

1. On donne le complexe $z = -1 + \sqrt{3}i$.

a) En déterminer le module et une forme trigonométrique. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé ($X =$ "axe réel" et $Y =$ "axe imaginaire")

b) Que vaut la partie réelle du complexe z^2 ?

c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est-elle toujours égale au carré de la partie imaginaire du complexe? Pourquoi?

2. Déterminer

a) le module du complexe $\cos(2) + i \sin(2)$

b) les parties réelle et imaginaire des complexes $z_1 = \frac{1}{1-2i}$, $z_2 = \frac{i^{27}}{1+i}$, $z_3 = \frac{-i}{1+i^3}$.

3. Résoudre dans \mathbb{C}

a) $z^2 - z + 1 = 0$

b) $z^2 + 25 = 0$

Fonctions élémentaires

Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

1. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{-4\pi}{7}\right)\right)$

2. $\cos\left(\arcsin\left(\frac{7}{8}\right)\right)$

3. $\ln\left(e^3 \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) + \ln\left(\sqrt{(-2)^2}\right)$

4. $e^{-i\pi/2}$

5. $\arctan\left(\tan\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right)$

6. $\exp\left(\ln(\pi) + \ln(\sqrt{2})\right)$