1, 2, 3...Sciences

Année académique 2020-2021

Exercices de mathématiques
Révisions en vue de l'examen du 4/01/2021

Les exercices précédés de (*) ne doivent pas être réalisés par les étudiants dispensés.

Version 27 novembre 2020

Exercices divers

1. (*) Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [\pi, 3\pi]$)

   $(a)\ 3x|x-2| = x-2$ $\qquad$ $(b)\ \dfrac{|1-x|}{x^2-1} \geq x-1$

   $(c)\ \cos(3x) - \sin(x) = 0$ $\qquad$ $(d)\ \sin(2x) \leq \sin(x)$

2. (*) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes :
   (a) $\cos(\ln(e^{-2\pi/3})) + \sin(\mathrm{tg}(3\pi/4))$
   (b) $\arcsin(1-\cos(7\pi/6)) + \arccos(\cos(4\pi/3))$

3. (*) Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(-1,0,a)$, $B(1,2,-1)$ et $C(4,1,2)$ $(a \in \mathbb{R})$. Calculer
   (a) $3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
   (b) les composantes de $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$
   (c) les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{BC}$.

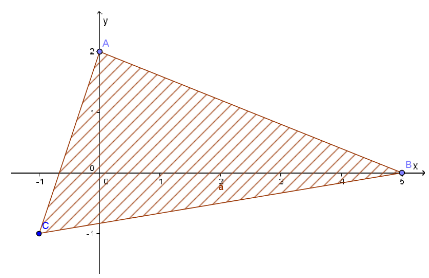
4. (*) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.
   (a) $x^2 + 2 = -ix$
   (b) $27 + x^3 = 0$

5. Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble dont une description analytique est la suivante

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq x^2 \geq 1 - 9y^2\}.$$

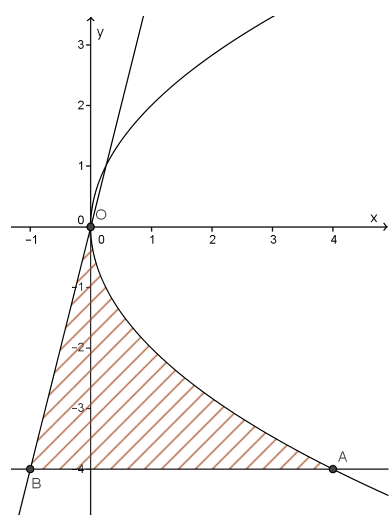
6. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant

   (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
   (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



7. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant

   (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
   (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



8. Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et et telle que
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\pi/2)^+$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = (\pi/2)^-$.
Si elles existent et si les données sont suffisantes, déterminer les limites suivantes

(a) $\lim_{x\to-1} \dfrac{\ln(2x+3)}{|x+1|}$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{|1+x|}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcotg}\left(\dfrac{x^3-1}{-2x}\right)$ (d) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\exp(-3x)-1}{2x}$

(e) $\lim_{x\to-\infty} (\ln(-5x-1) - \ln|ex|)$ (f) $\lim_{x\to-1} \dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-1}$

(g) $\lim_{x\to-\infty} f\left(\left|\dfrac{1-x^4}{3+x^2}\right|\right)$

9. Où la fonction $x \mapsto \arccos(\sqrt{1-x^2})$ est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première.

10. On donne les fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

(a) $\dfrac{x}{x^2-1}$ (b) $\cos(\sqrt{1-4x^2})$

(c) $\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ (d) $\operatorname{arctg}(\sin(x^2))$

(e) $x\,\pi^x$ (f) x^x

(g) $\ln(|2x+1|+x)$ (h) $(x-1)|x-1|$

11. On donne la fonction f définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$. Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et calculer la dérivée première des fonctions $g : x \mapsto f(\cos(-x))$ et $h : x \mapsto f(\sqrt{1-4x^2})$.

12. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-3x)}{x}dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{3x}dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2-x}dx$ (d) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \sqrt{x^2}dx$

(e) $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{2}{x(x^2-6x+9)}dx$ (f) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-4x+4)^2}}dx$

13. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes (f est la fonction inconnue)

$a)$ $D^2f(x) + f(x) = e^{ix}$ $b)$ $9D^2f(x) + 6Df(x) + f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

(*) Problèmes élémentaires

1. La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par
   (a) $\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{2}$ si cette voiture est équipée de freins normaux
   (b) v si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.

   Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.

2. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 points comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?