



*Mathématiques générales* (MATH2007)

Année académique 2022-2023

---

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES  
RÉVISIONS EN VUE DE L'EXAMEN DU 5/01/2023

Les exercices précédés de (\*) ne doivent pas être réalisés par les étudiants dispensés.

---

### Exercices divers

1. (\*) Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que  $x \in [\pi, 3\pi]$ )

$$(a) 3x|x-2| = x-2 \qquad (b) \frac{|1-x|}{x^2-1} \geq x-1$$

$$(c) \cos(3x) - \sin(x) = 0 \qquad (d) \sin(2x) \leq \sin(x)$$

2. (\*) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$(a) \cos(\ln(e^{-2\pi/3})) + \sin(\operatorname{tg}(3\pi/4))$$

$$(b) \arcsin(1 - \cos(7\pi/6)) + \arccos(\cos(4\pi/3))$$

3. (\*) Dans un repère orthonormé, on donne les points  $A, B, C$  dont les coordonnées sont  $A(-1, 0, a)$ ,  $B(1, 2, -1)$  et  $C(4, 1, 2)$  ( $a \in \mathbb{R}$ ). Calculer

$$(a) 3\vec{AB} \cdot \vec{BC}$$

$$(b) \text{les composantes de } \vec{AC} \wedge \vec{BC}$$

$$(c) \text{les composantes de la projection orthogonale de } \vec{AC} \text{ sur } \vec{BC}.$$

4. (\*) Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{C}$ .

$$(a) x^2 + 2 = -ix$$

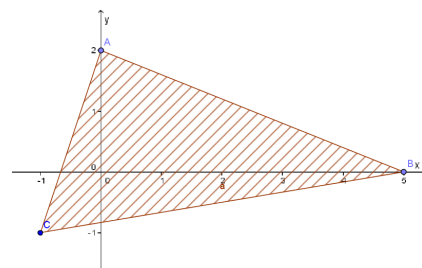
$$(b) 27 + x^3 = 0$$

5. Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble dont une description analytique est la suivante

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq x^2 \geq 1 - 9y^2\}.$$

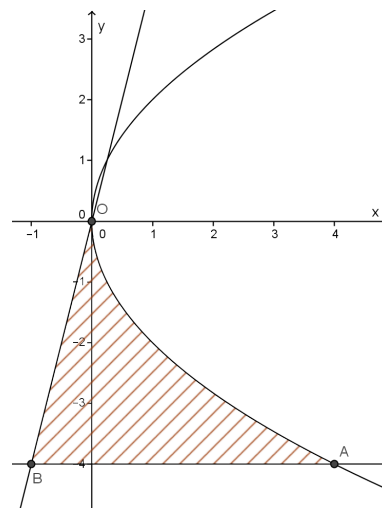
6. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant

- (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
- (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



7. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré suivant

- (1) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
- (2) idem mais en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.



8. Soit une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\pi/2)^+, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (\pi/2)^-.$$

Si elles existent et si les données sont suffisantes, déterminer les limites suivantes

$$\begin{array}{ll} (a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(2x+3)}{|x+1|} & (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1+x|}{\sqrt{1-x^2}} \\ (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^3-1}{-2x}\right) & (d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-3x)-1}{2x} \\ (e) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(-5x-1) - \ln|ex|) & (f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-1} \\ (g) \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\left|\frac{1-x^4}{3+x^2}\right|\right) & \end{array}$$

9. Où la fonction  $x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-x^2})$  est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première.

10. On donne les fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

$$\begin{array}{ll} (a) \frac{x}{x^2-1} & (b) \cos(\sqrt{1-4x^2}) \\ (c) \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) & (d) \operatorname{arctg}(\sin(x^2)) \\ (e) x \pi^x & (f) x^x \\ (g) \ln(|2x+1|+x) & (h) (x-1)|x-1| \end{array}$$

11. On donne la fonction  $f$  définie et continue sur  $[-1, 1]$ , dérivable sur  $] -1, 1[$ . Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et calculer la dérivée première des fonctions  $g : x \mapsto f(\cos(-x))$  et  $h : x \mapsto f(\sqrt{1-4x^2})$ .

12. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.

$$\begin{array}{ll} (a) \int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-3x)}{x} dx & (b) \int_{-\infty}^0 x e^{3x} dx \\ (c) \int_{-\infty}^1 \frac{1}{2-x} dx & (d) \int_{-4}^4 \sqrt{x^2} dx \\ (e) \int_4^5 \frac{2}{x(x^2-6x+9)} dx & (f) \int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-4x+4)^2}} dx \end{array}$$

13. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes ( $f$  est la fonction inconnue)

$$a) D^2 f(x) + f(x) = e^{ix} \quad b) 9D^2 f(x) + 6Df(x) + f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

### (\*) Problèmes élémentaires

1. La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à  $v$  km/h sur sol sec est donnée par

- (a)  $\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{2}$  si cette voiture est équipée de freins normaux  
 (b)  $v$  si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.

Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.

2. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 points comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?