**Analyse harmonique**

Année académique 2023-2024
$3^e$ Bloc Maths

# Solutions finales des exercices

Voici les réponses finales des exercices des différentes listes. Le fichier sera mis à jour au fur et à mesure de l'avancement des TP.

**Liste 0**

Exercice 1 : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} = \frac{1}{e}$ et $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{\ln(m!)}{m} - \ln(m) = -1$

Exercice 2 : $\Gamma(5/6) = \frac{2\pi}{\Gamma(1/6)}$

**Liste 1**

Exercice 1 :

(a) $f_m \notin C^0(\mathbb{R})$ ; $f_m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$

$||f_m||_1 = 2$ ; $||f_m||_2 = \sqrt{\frac{2}{m}}$ ; $||f_m||_\infty = \frac{1}{m}$

(b) $f_m$ converge ponctuellement vers 0 sur $\mathbb{R}$ et converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

(c) $f_m$ ne converge pas pour la norme $||\ ||_1$, $f_m$ converge vers 0 pour la norme $||\ ||_2$ et $f_m$ converge vers 0 pour la norme $||\ ||_\infty$.

Exercice 2 :

(a) $f_m \in C^0([0,+\infty[) \cap L^1([0,+\infty[) \cap L^2([0,+\infty[) \cap L^\infty([0,+\infty[)$

$||f_m||_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}$ ; $||f_m||_2 = \frac{1}{2}$ ; $||f_m||_\infty = \sqrt{m}e^{-1}$

(b) $f_m$ converge ponctuellement vers 0 sur $]0,+\infty[$ et $f_m$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

(c) $f_m$ converge vers 0 pour la norme $||\ ||_1$, $f_m$ ne converge pas pour la norme $||\ ||_2$ et $f_m$ ne converge pas pour la norme $||\ ||_\infty$.

Exercice 3 :

(a) $A = \mathbb{R}_0$ et $f_m$ converge ponctuellement vers 0 sur $\mathbb{R}_0$.

(b) $f_m$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_0$, mais $f_m$ converge uniformément vers 0 sur les ensembles bornés fermés inclus dans $\mathbb{R}_0$.

(c) $f_m$ converge vers 0 pour la norme $||\ ||_1$ et $f_m$ ne converge pas pour la norme $||\ ||_2$.

Exercice 6 :

(a) La suite de fonctions converge ponctuellement vers 0 sur $\mathbb{R}_0$, elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_0$, mais elle converge uniformément vers 0 sur les compacts de $\mathbb{R}_0$.

(b) $\delta_n \in C^0(\mathbb{R}), \delta_n \in L^1(\mathbb{R})$ et ne converge pas dans $L^1(\mathbb{R}), \delta_n \in L^2(\mathbb{R})$ et ne converge pas dans $L^2(\mathbb{R})$, $\delta_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ et ne converge pas dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

**Liste 2**

Exercice 1 :

(a)

$$f \star g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ y < -1 \\ \frac{(y+1)^2}{4} & \text{si } \ -1 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } \ 1 < y < 3 \\ 1 - \frac{(y-3)^2}{4} & \text{si } \ 3 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{si } \ y > 5 \end{cases}$$

Exercice 2 :

(a) $f \star g(y) = -ye\chi_{[0,+\infty[}(y), \quad y \in \mathbb{R}$

(b) $f \star g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{y\sin(y)}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

(c) $f \star g(y) = e^{-|y|} + |y|e^{-|y|}, \quad y \in \mathbb{R}$

Exercice 5 :

$$\chi_A \star \chi_B(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ |u| > 2 \\ \pi/2 + \arcsin(u+1) + \frac{1}{2}\sin(2\arcsin(u+1)) & \text{si } \ -2 \leq u \leq 0 \\ \pi/2 - \arcsin(u-1) - \frac{1}{2}\sin(2\arcsin(u-1)) & \text{si } \ 0 < u \leq 2 \end{cases}$$

Exercice 6 :

(a) $g_n \star g_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } |y| > n+1 \\ n+1+y & \text{si } \ -n-1 \leq y \leq -n+1 \\ 2 & \text{si } \ -n+1 < y < n-1 \\ n+1-y & \text{si } n-1 \leq y \leq n+1 \end{cases}$

**Liste 3**

Exercice 1 :

(1) $\mathcal{F}_y^+ f_1 = \frac{-1}{i+iy-1}$ et $\mathcal{F}_y^- f_1 = \frac{-1}{i-iy-1}, \quad y \in \mathbb{R}$

(2) $\mathcal{F}_y^+ f_2 = iy\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{y^2}{4}}$ et $\mathcal{F}_y^- f_2 = -iy\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{y^2}{4}}, \ y \in \mathbb{R}$

(3) $\mathcal{F}_y^+ f_3 = \frac{2a}{y^2}(1 - \cos(\frac{y}{a})) = \mathcal{F}_y^- f_3, \ y \in \mathbb{R}$ pp

(4) $\mathcal{F}_y^+ f_4 = \frac{2e^{iy}}{1+y^2}$ et $\mathcal{F}_y^- f_4 = \frac{2e^{-iy}}{1+y^2}, \ y \in \mathbb{R}$

(5) $\mathcal{F}_y^+ f_5 = i\left(\frac{\sin(y-2)}{y-2} - \frac{\sin(y+2)}{y+2}\right)$ et $\mathcal{F}_y^- f_5 = i\left(\frac{\sin(2+y)}{2+y} - \frac{\sin(-y+2)}{2-y}\right), \ y \in \mathbb{R}$ pp

Exercice 2 : La réciproque est fausse, mais on a quand même le résultat suivant : si la transformée de Fourier d'une fonction est paire (resp. impaire), alors cette fonction est paire (resp. impaire) pp.

Exercice 3 :

(1) $\mathcal{F}_y e^{-\lambda|\ \cdot\ |} = \frac{2\lambda}{y^2+\lambda^2}, \ y \in \mathbb{R}$

Exercice 4 : $\mathcal{F}_y^+ f = \frac{2}{y^2}(1-\cos(y)), \ y \in \mathbb{R}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4}dx = \pi/3$

Exercice 5 :
(1) $\frac{\pi}{2}\min(a,b)$
(2)

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } a<b \\ \pi/4 & \text{si } a=b \\ \pi/2 & \text{si } a>b \end{cases}$$

(3) $\frac{1}{2}\ln|\frac{a+b}{a-b}|$

Exercice 6 : $\pi/4$

**Liste 4**

Exercice 1 : $g = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^+\mathcal{F}^- f$ convient

Exercice 2 : (2) L'unique solution est $f = 0$.

**Liste 5**

Exercice 1 : $\mathcal{F}_y^+ f = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+y^2}} e^{\frac{i}{2}\arctan(y)},\ y \in \mathbb{R}$

Exercice 3 : L'ensemble des solutions est

$$\{f(x+ct) + g(x-ct) : g, f \in C^2(\mathbb{R})\}.$$

Exercice 4 : La solution est $U(x,t) = \left(f \star G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}}\right)(x)$, où $G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

**Liste 6**

Exercice 1 :
(1) $\mathbb{F}_y^+ f = i\pi\,\mathrm{sign}(y) - i\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(1+y) - i\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(y-1)$
(2) $\mathbb{F}_y^+ g = i\ln\left(|\frac{y+1}{y-1}|\right)$
(3) $\mathbb{F}_y^+ h = \frac{i\pi}{y}(1 - e^{-|y|})$

Exercice 2 :

$$\mathbb{F}_y^+ f = \mathrm{sign}(y)\pi i e^{-|y|}$$

et

$$\mathbb{F}_y^+ g = \begin{cases} 0 & \text{si } y>0 \\ -2i\pi e^y & \text{si } y<0 \end{cases}$$

Exercice 4 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{\pi}{4a^2}(1 - e^{-2|a|})$$

Exercice 5 :
(a) $f$ n'est pas intégrable, mais est de carré intégrable
(b) $\mathcal{F}_y^+ Df = \pi(e^{-\frac{1}{a}|y|} - e^{-\frac{1}{b}|y|})$
(c) $\mathbb{F}_y^+ f = \frac{i\pi}{y}(e^{-\frac{1}{a}|y|} - e^{-\frac{1}{b}|y|})$

**Liste 7**

Exercice 1 : (2) $a$, $b$ et $c$ doivent être distincts.

Exercice 3 : La projection d'un point $x$ sur la boule unité fermée est $\frac{x}{||x||}$ si $x$ n'apparient pas à la boule, et $x$ sinon.