Analyse harmonique

Année académique 2023-2024
3e Bloc Maths

Solutions finales des exercices

Voici les réponses finales des exercices des différentes listes. Le fichier sera mis à jour au fur et à mesure de l'avancement des TP.

Liste 0

Exercice 1 : $\lim_{m\to+\infty} \frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} = \frac{1}{e}$ et $\lim_{m\to+\infty} \frac{\ln(m!)}{m} - \ln(m) = -1$

Exercice 2 : $\Gamma(5/6) = \frac{2\pi}{\Gamma(1/6)}$

Liste 1

Exercice 1 :

(a) $f_m \notin C^0(\mathbb{R})$; $f_m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$

$||f_m||_1 = 2$; $||f_m||_2 = \sqrt{\frac{2}{m}}$; $||f_m||_\infty = \frac{1}{m}$

(b) f_m converge ponctuellement vers 0 sur $\mathbb{R}$ et converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

(c) f_m ne converge pas pour la norme $|| \; ||_1$, f_m converge vers 0 pour la norme $|| \; ||_2$ et f_m converge vers 0 pour la norme $|| \; ||_\infty$.

Exercice 2 :

(a) $f_m \in C^0([0,+\infty[) \cap L^1([0,+\infty[) \cap L^2([0,+\infty[) \cap L^\infty([0,+\infty[)$

$||f_m||_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}$; $||f_m||_2 = \frac{1}{2}$; $||f_m||_\infty = \sqrt{m}e^{-1}$

(b) f_m converge ponctuellement vers 0 sur $]0,+\infty[$ et f_m ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

(c) f_m converge vers 0 pour la norme $|| \; ||_1$, f_m ne converge pas pour la norme $|| \; ||_2$ et f_m ne converge pas pour la norme $|| \; ||_\infty$.

Exercice 3 :

(a) $A = \mathbb{R}_0$ et f_m converge ponctuellement vers 0 sur $\mathbb{R}_0$.

(b) f_m ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_0$, mais f_m converge uniformément vers 0 sur les ensembles bornés fermés inclus dans $\mathbb{R}_0$.

(c) f_m converge vers 0 pour la norme $|| \; ||_1$ et f_m ne converge pas pour la norme $|| \; ||_2$.

Exercice 6 :

(a) La suite de fonctions converge ponctuellement vers 0 sur $\mathbb{R}_0$, elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_0$, mais elle converge uniformément vers 0 sur les compacts de $\mathbb{R}_0$.

(b) $\delta_n \in C^0(\mathbb{R}), \delta_n \in L^1(\mathbb{R})$ et ne converge pas dans $L^1(\mathbb{R}), \delta_n \in L^2(\mathbb{R})$ et ne converge pas dans $L^2(\mathbb{R})$, $\delta_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ et ne converge pas dans $L^\infty(\mathbb{R})$.