Chapitre 10

Séries de Fourier dans $\mathrm{L}^2(E)$

Les résultats des sections 10.1 , 10.2 et 10.3 (sauf cadre oarange)
sont aussi valables dans un espace de Hilbert H
(mêmes justifications en remplaçant L^2 par H)

10.1 Suites orthogonales dans $\mathrm{L}^2(E)$

Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$.

Définition. Deux éléments u et v de $\mathrm{L}^2(E)$ sont *orthogonaux* et on écrit $u \perp v$ si on a $\langle u, v \rangle = 0$. Il est clair qu'on a alors $v \perp u$ également.

Proposition 10.1.1 *Toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathrm{L}^2(E)$ orthogonaux à $f \in \mathrm{L}^2(E)$ est aussi orthogonale à f.* ∎

Proposition 10.1.2 *Soient u_m et f des éléments de $\mathrm{L}^2(E)$.*
Si la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathrm{L}^2(E)$ vers u_0 et si chacun des u_m est orthogonal à f, alors u_0 est orthogonal à f.

Preuve. De fait, on a alors $\langle u_m, f \rangle \to \langle u_0, f \rangle$. ∎

Théorème 10.1.3 (Pythagore) a) *Pour tout nombre fini d'éléments $u_1, \ldots, u_J$ de $\mathrm{L}^2(E)$ orthogonaux deux à deux, on a*

$$\left\| \sum_{j=1}^{J} u_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{J} \|u_j\|^2 .$$

b) *Si $(u_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite d'éléments de $\mathrm{L}^2(E)$ qui sont orthogonaux deux à deux, alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ converge dans $\mathrm{L}^2(E)$ si et seulement si la série numérique réelle à termes positifs $\sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|^2$ converge, auquel cas on a*

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} u_m \right\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|^2 .$$

Preuve. a) est immédiat vu que

$$\left\| \sum_{j=1}^{J} u_j \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{J} u_j, \sum_{k=1}^{J} u_k \right\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{J} \langle u_j, u_k \rangle = \sum_{j=1}^{J} \langle u_j, u_j \rangle = \sum_{j=1}^{J} \|u_j\|^2 .$$

b) Vu a), pour tous r, $s \in \mathbb{N}_0$ tels que $r < s$, il vient

$$\left\| \sum_{m=r}^{s} u_m \right\|^2 = \sum_{m=r}^{s} \|u_m\|^2 ,$$

c'est-à-dire que la série $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ est de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(E)$ si et seulement si la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|^2$ est de Cauchy. La conclusion est alors immédiate. ∎

10.2 Suites orthonormées dans $\mathrm{L}^2(E)$

Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$.

Définition. Une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathrm{L}^2(E)$ est *orthonormée* si ses éléments sont normés et orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire si et seulement si on a $\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{j,k}$ pour tous j, $k \in \mathbb{N}_0$.

Projection orthogonale généralisée

Théorème 10.2.1 *Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite orthonormée de $\mathrm{L}^2(E)$.*

a) *Si $(c_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de nombres complexes, alors la série $\sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m$ converge dans $\mathrm{L}^2(E)$ si et seulement si la série numérique $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2$ converge, auquel cas il vient*

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m \right\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2 .$$

b) *Pour tout $f \in \mathrm{L}^2(E)$, il existe une suite $(c_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathbb{C}$ et $g \in \mathrm{L}^2(E)$ tels que*

i) *$g \perp u_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,*

ii) *la série $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2$ converge,*

iii) *$f = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m + g$.*

En fait, cette décomposition est unique et on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_m & = & \langle f, u_m\rangle\,, \quad \forall\ m\in\mathbb{N}_0, \\ \|f\|^2 & = & \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}|\langle f, u_m\rangle|^2+\|g\|^2\,. \end{array}\right.$$

Preuve. a) est un cas particulier du théorème de Pythagore car les $c_m u_m$ sont orthogonaux deux à deux et tels que $\|c_m u_m\| = |c_m|$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

b) Si une telle décomposition existe, elle est unique et c_m est égal à $\langle f, u_m\rangle$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ car on a alors

$$\langle f, u_m\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} c_j u_j, u_m \right\rangle + \langle g, u_m\rangle = \lim_{J\to\infty}\sum_{j=1}^{J} c_j \langle u_j, u_m\rangle = c_m.$$

Cela étant, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, posons

$$g_M = f - \sum_{m=1}^{M}\langle f, u_m\rangle\, u_m.$$

On vérifie de suite que, pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, la fonction g_M est orthogonale aux u_1, ..., u_M; cela implique l'égalité

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{M}|\langle f, u_m\rangle|^2 + \|g_M\|^2\,, \quad \forall\ M\in\mathbb{N}_0.$$

Ceci assure que la série $\sum_{m=1}^{\infty}\langle f, u_m\rangle\, u_m$ converge dans $\mathrm{L}^2(E)$. Dès lors, la suite $(g_M)_{M\in\mathbb{N}_0}$ converge dans $\mathrm{L}^2(E)$ vers un élément g tel que

$$f = \sum_{m=1}^{\infty}\langle f, u_m\rangle\, u_m + g.$$

Enfin, vu la continuité du produit scalaire, g est orthogonal à chacun des u_m. D'où la conclusion.∎

10.3 Suites orthonormées totales dans L^2

Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$.

Définition. La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathrm{L}^2(E)$ est *totale* dans cet espace si 0 est le seul élément de $\mathrm{L}^2(E)$ qui soit orthogonal à chacun des u_m, c'est-à-dire si on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} f & \in & \mathrm{L}^2(E) \\ f & \perp & u_m, \quad \forall\ m\in\mathbb{N}_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f = 0.$$

Théorème 10.3.1 *Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite orthonormée totale dans $\mathrm{L}^2(E)$.*

a) ***Développement en série de Fourier.*** *On a*

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m\rangle\, u_m, \quad \forall\; f \in \mathrm{L}^2(E).$$

b) ***Formules de Parseval.*** *On a*

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle f, u_m\rangle|^2, \quad \forall\; f \in \mathrm{L}^2(E),$$

et

$$\langle f, g\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m\rangle\, \overline{\langle g, u_m\rangle}, \quad \forall f, g \in \mathrm{L}^2(E).$$

Preuve. a) et la première formule de Parseval résultent aussitôt du paragraphe précédent et du fait que la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est totale.

La deuxième formule de Parseval est alors une conséquence immédiate de la continuité du produit scalaire car on a successivement

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \lim_{M\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{M} \langle f, u_j\rangle\, u_j, \sum_{k=1}^{M} \langle g, u_k\rangle\, u_k \right\rangle \\ &= \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} \langle f, u_m\rangle\, \overline{\langle g, u_m\rangle} \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m\rangle\, \overline{\langle g, u_m\rangle}. \blacksquare\end{aligned}$$

Ne pas considérer ce corollaire
dans le cas d'un espace de Hilbert général H

Corollaire 10.3.2 *Si $(u_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite orthonormée totale dans $\mathrm{L}^2(E)$, alors le développement en série de Fourier de $f \in \mathrm{L}^2(E)$ peut être intégré terme à terme sur toute partie intégrable de E.*

Preuve. De fait, pour une telle partie intégrable A de E, on a $\chi_A \in \mathrm{L}^2(E)$ donc

$$\int_A f\, dx = \langle f, \chi_A\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m\rangle\, \overline{\langle \chi_A, u_m\rangle}$$

c'est-à-dire

$$\int_A \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m\rangle\, u_m\, dx = \sum_{m=1}^{\infty} \langle f, u_m\rangle \cdot \int_A u_m\, dx. \blacksquare$$