Listes d'EXERCICES

relatifs au cours

Introduction à l'analyse harmonique

Math 0511, 3BM

Année académique 2023-2024

Françoise Bastin, Christophe Dubussy

# 0 (Rappels). Intégrales eulériennes

## — Exercices de base —

***Exercice 1.*** Calculer si possible les limites

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to+\infty} \left( \frac{\ln(m!)}{m} - \ln(m) \right).$$

***Exercice 2.*** Exprimer $\Gamma(5/6)$ en fonction de $\Gamma(1/6)$.

***Exercice 3.*** Etablir que pour tous $m > 0, n > -1, a > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^m} x^n dx = \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) a^{-\frac{n+1}{m}}.$$

***Exercice 4.*** Pour tout $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^x}.$$

Montrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

***Exercice 5.*** Montrer que la mesure d'une boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon $r > 0$ est donnée par la formule

$$\omega_n(r) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2+1)}.$$

En déduire que $\omega_n(r) \to 0$ si $n \to +\infty$.

## — Autres exercices —

***Exercice 6.*** Prouver que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k+1)!}$$

converge absolument et montrer que sa limite est égale à $\pi/2$.

***Exercice 7 (Définition de Gauss de $\Gamma$).*** Démontrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{m\to+\infty} \frac{m^x\, m!}{x(x+1)\dots(x+m)}.$$

***Exercice 8.*** Prouver que

$$\int_0^1 \ln(\Gamma(x)) \sin(\pi x)\, dx = \frac{1 + \ln(\pi/2)}{\pi}.$$

F. Bastin & C. Dubussy – 11 janvier 2024

# 1. Espaces $L^1$, $L^2$, $L^\infty$.

***Exercice 1.*** Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = \frac{1}{m}\chi_{[-m,m]}(x), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer si la fonction $f_m$ est continue, intégrable, de carré intégrable, bornée et en calculer les normes correspondantes.

(b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

***Exercice 2.*** Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) = m^{3/2}xe^{-mx}, \quad x \in [0,+\infty[.$$

(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, déterminer si la fonction $f_m$ est continue, intégrable, de carré intégrable, bornée et en calculer les normes correspondantes.

(b) Etudier la convergence ponctuelle et la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $[0,+\infty[$.

(c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

***Exercice 3.*** On donne la suite de fonctions $f_m$ suivante

$$f_m(x) = \frac{\sqrt{m}}{1+m^2x^2}, \quad m \in \mathbb{N}_0\,.$$

(a) Déterminer l'ensemble $A$ sur lequel cette suite converge ponctuellement, ainsi que sa limite.

(b) Etudier la convergence uniforme de cette suite sur $A$ et sur les ensembles bornés fermés inclus dans $A$.

(c) Etudier la convergence de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ pour chacune des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

***Exercice 4.*** Soit $E$ une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$.

(a) Si $f_m \to f$ pour $\|.\|_1$ et $g_m \to g$ pour $\|.\|_\infty$, montrer que $f_m g_m \to fg$ pour $\|.\|_1$.

(b) Si $f_m \to f$ pour $\|.\|_2$ et $g_m \to g$ pour $\|.\|_2$, montrer que $f_m g_m \to fg$ pour $\|.\|_1$.

***Exercice 5.*** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f \in \mathrm{C}_0([a,b]) \cap \mathrm{C}_1(]a,b[)$ et si $Df$ est continue et de carré intégrable sur $]a,b[$, démontrer que

$$|f(b) - f(a)|^2 \leq (b-a)\|Df\|_2^2.$$

***Exercice 6.*** Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Examiner la convergence ponctuelle et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b) Les fonctions $\delta_n$ sont-elles continues, intégrables, de carré intégrable, bornées sur $\mathbb{R}$ ? Si c'est le cas, examiner la convergence de la suite pour les normes correspondantes.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\, dx = 1.$$

(d) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0)$$

pour tout $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbb{R})$ (i.e. pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans $\mathbb{R}$).

***Exercice 7.*** Soient $r > 0$ et $f$ une fonction continue et de carré intégrable sur $]0, r[$. Démontrer que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt = 0.$$

Si $f$ est continue et de carré intégrable sur $]0, +\infty[$, démontrer alors que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)dt = 0.$$

# 2. Produit de convolution

***Exercice 1.*** Soient les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

(a) Calculer si possible le produit de convolution de $f$ et $g$.

(b) Représenter le graphique des fonctions $f$, $g$ et $f \star g$.

***Exercice 2.*** (a) Soient les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x \chi_{[1,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x\chi_{[-1,+\infty[}(x).$$

Montrer que le produit de convolution $f \star g$ est défini sur $\mathbb{R}$ et donner sa valeur en tout point de $\mathbb{R}$.

(b) Même question si

$$f(x) = \cos(x)\chi_{[0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(x)\chi_{[0,+\infty[}(x).$$

(c) Même question si

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-|x|}.$$

***Exercice 3.*** Pour tout $t > 0$ on définit la fonction $q_t$ par

$$q_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$q_t \star q_s = q_{t+s}, \quad \forall t, s > 0.$$

***Exercice 4.*** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Si on pose

$$f(x) = e^{-ax}\chi_{[0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-bx}\chi_{[0,+\infty[}(x),$$

montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(f \star g)(x)}{x} \, dx = \frac{\ln(b/a)}{b-a}.$$

***Exercice 5.*** Calculer si possible $\chi_A \star \chi_B$ lorsque

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}.$$

***Exercice 6.*** Soit $g_n$ la fonction caractéristique de l'invervalle $[-n, n]$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, calculer $g_n \star g_1$.

(b) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} ||g_n \star g_1||_1 = +\infty.$$

***Exercice 7.*** Pour $k \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$e_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\chi_{]0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Montrer que

$$D^n(e_m \star \varphi) = e_{m-n} \star \varphi \quad \text{et} \quad D^k(e_k \star \varphi) = \varphi$$

pour tous $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $m > n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

***Exercice 8.*** Soit $f \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$. Posons

$$h(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt, \quad x \geq 0.$$

Montrer que la fonction $h$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et que l'on a

$$\lim_{x\to+\infty} e^x h(x) = 0.$$

***Exercice 9.*** Soit $a \in ]0,+\infty[$ et $H_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H_a(x) = \frac{1}{a}\chi_{]0,a[}.$$

Soit $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant ...$ une suite de nombres strictement positifs tel que $a = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ converge. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$u_k = H_{a_0} \star ... \star H_{a_k}.$$

Il est demandé de prouver que

(a) Pour tout $k \geqslant 1$, $u_k \in C^{k-1}(\mathbb{R})$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{supp}(u_k) \subset [0,a]$.

(c) La suite $u_k$ converge vers une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(u) \subset [0,a]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1$.

(d) On a les inégalités

$$\sup_{x\in[0,a]} |(D^k u)(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |(D^{k+1}u)(x)|dx \leqslant \frac{2^k}{a_0...a_k},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

***Exercice 10 (Critère d'annulation** *pp***).** Soit $\Omega$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Montrer que $f = 0$ *pp* dans $\Omega$ si et seulement si

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

***Exercice 11.*** Montrer que si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles de densités respectives $f$ et $g$, alors $X + Y$ est une variable aléatoire réelle de densité $f \star g$.

**Analyse Harmonique**

Année académique 2023-2024
3e Bloc Mathématique

# 3. Transformation de Fourier dans $L^1$ – Exercices de base

***Exercice 1.*** Soit $a > 0$. Calculer (si possible) la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

(1) $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ix} e^{-x} \chi_{[0,+\infty[}(x)$

(2) $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto x e^{-x^2}$

(3) $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto (1 - a|x|)\chi_{[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}]}(x)$

(4) $f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-|x-1|}$

(5) $f_5 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2x)\chi_{[-1,1]}(x)$.

***Exercice 2.*** Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire). Qu'en est-il de la réciproque ?

***Exercice 3.*** (1) Calculer (si possible) la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\lambda|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$) où $\lambda$ est une constante strictement positive.

(2) Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$R_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Montrer que, pour tous $a, b > 0$, on a $R_a \star R_b = R_{a+b}$.

(3) Montrer de deux façons différentes (la première de manière directe, la deuxième en utilisant les points (1) et (2)) que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab}\frac{1}{a + b}.$$

***Exercice 4.*** Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f$ définie par

$$f(x) = (1 + x)\chi_{[-1,0]}(x) + (1 - x)\chi_{[0,1]}(x).$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4}.$$

***Exercice 5.*** Soient $a, b > 0$. Si possible, calculer

(1)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\, dx$$

(2)

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(ax)\cos(bx)}{x}\, dx$$

(3)

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}\, dx, \quad a \neq b.$$

.

(Rappel : Pour tout $\lambda > 0$, on a $\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} = \frac{\pi}{2}$.)

***Exercice 6.*** En utilisant le théorème du transfert, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(x)\, dx.$$

***Exercice 7.*** Soit un signal $f$ (on suppose que cette fonction est intégrable et de carré intégrable). On définit l'autocorrélation du signal par

$$E_f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x-t)}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

et la densité spectrale de puissance de ce signal (PSD) par

$$D_f(y) = \left|\mathcal{F}_y^- f\right|^2, \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

On pose $f^s(x) = \overline{f(-x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que l'autocorrélation s'écrit $E_f = f \star f^s$.

(2) Montrer que l'autocorrélation d'une fonction à valeurs réelles est une fonction paire.

(3) Montrer que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |E_f(t)| = E_f(0).$$

(4) Montrer que la densité spectrale et l'autocorrélation sont liées par la transformation de Fourier (l'une est la transformée de l'autre).

***Exercice 8.*** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que quelque soit $t \in R$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} e^{-ixt} dx.$$

En déduire que $f$ est impair si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx^2} dx = 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

# 4. Transformation de Fourier dans $L^1$ – Exercices approfondis

***Exercice 1.*** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto x\mathcal{F}_x^- f$ soit intégrable. Montrer qu'il existe une fonction $g \in C_1(\mathbb{R})$ qui est égale presque partout à $f$.

***Exercice 2.*** (1) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$f \star g = f, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

(2) Résoudre l'équation $f \star f = f$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

***Exercice 3.*** Rappelons qu'un fermé $F \subset \mathbb{R}^n$ est *régulier* si $F = F^{\circ -}$. Montrer que la régularité est une condition nécessaire et suffisante pour que $F$ soit le support de la transformée de fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$ .

***Exercice 4.*** On sait que la transformation de Fourier est une application linéaire injective de $L^1(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des fonctions continues de limite nulle à l'infini $C_0^0(\mathbb{R})$. Le but de cet exercice est de prouver qu'ainsi définie, la transformée de Fourier n'est pas surjective, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions de $C_0^0(\mathbb{R})$ qui ne sont pas la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction impaire.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathcal{F}_x^- f = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(xt) dt.$$

(2) Prouver que la fonction $\phi$ définie par

$$\phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$$

pour tout $x \in [0, +\infty[$ est continue et bornée.

(3) Montrer que l'on a

$$\int_1^R \frac{\mathcal{F}_t^- f}{t} dt = \int_0^{+\infty} -2if(x) \left( \int_x^{Rx} \frac{\sin u}{u} du \right) dx.$$

En déduire que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_1^R \frac{\mathcal{F}_t^- f}{t} dt = -2i \int_0^{+\infty} f(x)\phi(x) dx.$$

(4) Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{\arctan x}{\ln(2 + x^2)}.$$

(a) Montrer que $g \in C_0^0(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que si $g$ est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable $f$ alors $f$ est impair presque partout.

(c) En déduire que $g$ n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

# 5. Transformation de Fourier dans $L^1$ – Equations différentielles

***Exercice 1.*** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \chi_{]0,+\infty[}(x).$$

Calculer explicitement $\mathcal{F}^+ f$ en remarquant que cette fonction vérifie une certaine équation différentielle.

***Exercice 2.*** Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la seule fonction $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation différentielle

$$D^2 f - f = g$$

est donnée par

$$f = \frac{1}{2} g \star e^{-|\cdot|}.$$

***Exercice 3 (Equation des ondes).*** Déterminer l'ensemble des solutions $u \in C^2(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation des ondes

$$D_t^2 u = c^2 D_x^2 u.$$

***Exercice 4 (Equation de la chaleur).*** Considérons une barre mince infinie de métal de conductivité constante $\gamma$ et de chaleur spécifique volumique constante $C$. Si $U$ la température en $x$ au temps $t$, on a l'équation

$$D_t U = \frac{\gamma}{C} D_x^2 U.$$

Le but de l'exercice est de résoudre cette équation aux dérivées partielles sous les conditions suivantes :

(1) Les fonctions $U, D_t U, D_x U$ et $D_x^2 U$ sont continues sur $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ et intégrables en $x$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in ]0, +\infty[$ fixé.

(2) On a une condition initiale $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{t \to 0^+} U(x, t) = f(x).$$

(La convergence est dans $L^1(\mathbb{R})$.)

(3) Pour tout intervalle compact $[t_0, t_1]$ de $]0, +\infty[$, il existe une fonction $F \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$|D_t U(x, t)| \leq F(x) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

F. Bastin & C. Dubussy – 15 septembre 2023

# 6. Transformation de Fourier dans $L^2$

***Exercice 1.*** Si possible, déterminer la transformée de Fourier des fonctions $f$, $g$ et $h$ définies par

(1) $f : x \in \mathbb{R}_0 \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x}$,

(2) $g : x \in \mathbb{R}_0 \mapsto \mathrm{sign}(x)\frac{\sin(x)}{x}$,

(3) $h : x \in \mathbb{R}_0 \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Préciser à chaque fois s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

***Exercice 2.*** On donne les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x+i}.$$

Déterminer la transformée de Fourier de $f$ et de $g$. Préciser s'il s'agit d'une transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

***Exercice 3.*** Si $a > 0$ établir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\sin(a).$$

***Exercice 4.*** Pour tout $a \in \mathbb{R}_0$, calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{x(x^2+a^2)}\, dx.$$

***Exercice 5.*** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b > a > 0$. Soit la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \arctan(ax) - \arctan(bx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) La fonction $f$ est-elle intégrable ? De carré intégrable ?
(b) Déterminer si possible la transformée de Fourier de $Df$.
(c) En déduire si possible la transformée de Fourier de $f$.

***Exercice 6.*** Si $f$ et $g$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$\mathcal{F}^+(fg) = \frac{1}{(2\pi)^n}\, \mathbb{F}^+ f \star \mathbb{F}^+ g \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

# 7. Espaces de Hilbert et suites orthonormées totales

***Exercice 1.*** Soit $E$ l'ensemble des polynomes complexes de degré plus petit ou égal à 2.

(1) Si $P, Q \in E$, on définit
$$\langle P, Q\rangle = P(0)\overline{Q(0)} + P(1)\overline{Q(1)} + P(i)\overline{Q(i)}.$$
Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $E$.

(2) A quelles conditions sur $a, b, c \in \mathbb{C}$ l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle$ définie par
$$\langle P, Q\rangle = P(a)\overline{Q(a)} + P(b)\overline{Q(b)} + P(c)\overline{Q(c)},$$
pour tout $P, Q \in E$, est-elle un produit scalaire sur $E$ ?

***Exercice 2.*** Soit $H$ un espace pré-hilbertien. On dit qu'une suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $H$ converge faiblement dans $H$ s'il existe $f \in H$ tel que
$$\lim_{m\to+\infty} \langle f_m, h\rangle = \langle f, h\rangle, \quad \forall h \in H.$$
Montrer que $f_m$ converge vers $f$ dans $H$ si et seulement si elle converge faiblement vers $f$ dans $H$ et si
$$\lim_{m\to+\infty} ||f_m|| = ||f||.$$

***Exercice 3.*** Soit $H$ un espace de Hilbert. Déterminer une expression de la projection sur la boule unité fermée de $H$.

***Exercice 4 (Suite orthonormée totale de Legendre).*** Posons $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, posons
$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$
Le polynome $P_n$ est appelé polynome de Legendre de degré $n$.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver que $P_n$ est effectivement un polynome de degré $n$.

(2) Démontrer la formule de Rodrigues
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n\left((x^2 - 1)^n\right).$$

(3) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que le polynome $P_n$ est une solution particulière de l'équation différentielle
$$D((1 - x^2)Df(x)) + n(n + 1)f(x) = 0.$$

(4) En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale dans $L^2([-1, 1])$.

(5) Démontrer que $\left(\frac{P_n}{||P_n||_2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée totale de $L^2([-1, 1])$. (*Suggestion* : Utiliser la transformée de Fourier de $f\chi_{[-1,1]}$.)

***Exercice 5.*** Soit $E$ une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ et soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée totale de $L^2(E)$ pour laquelle il existe $C > 0$ tel que $|u_m| < C$ presque partout sur $E$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout $f \in L^1(E)$, on a
$$\lim_{m\to+\infty} \int_E f(x)u_m(x)dx = 0.$$

F. Bastin & C. Dubussy – 15 septembre 2023

**Analyse Harmonique**

Année académique 2023-2024
3^e^ Bloc Mathématique

# 8. Séries trigonométriques de Fourier

***Exercice 1.*** On considère l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$.

(1) Montrer que les fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x) = \cos(2\pi x)$ et $g(x) = e^{4i\pi x}$ y sont orthogonales.

(2) Développer les fonctions $g_1, g_2, g_3$ en série trigonométrique de Fourier dans cet espace, en exprimant la réponse finale à l'aide de fonction sinus et cosinus et en simplifiant au maximum l'expression.

$$g_1(x) = \cos(10\pi x), \quad g_2(x) = \cos^4(\pi x), \quad g_3(x) = \cos(\pi x).$$

(3) En déduire que

$$\frac{\sqrt{2}}{16}\pi = \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{2m-1}{16m^2 - 16m + 3}.$$

***Exercice 2.*** On donne la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \\ 1 & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de $f$ sur $[-\pi, \pi]$.

(2) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

***Exercice 3.*** (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $f$ donnée par $f(x) = |\sin(x)|$, $x \in \mathbb{R}$.

(2) Déterminer la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}.$$

***Exercice 4.*** (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier sur $[-1, 1]$ de la fonction $f$ donnée par $f(x) = x - x^3$.

(2) En déduire la somme de la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}.$$

***Exercice 5.*** (1) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction $f$ donnée par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(2) En déduire la somme des séries

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2+1}.$$

***Exercice 6*** ***(Noyau de Poisson).*** Pour tout $r \in [0,1[$, on pose

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose aussi $e_m(x) = e^{imx}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Pour tous $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que

$$P_r(\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|} e_m(\theta).$$

(2) Pour tout $r \in [0,1[$, calculer (si possible) la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta.$$

(3) Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $2\pi$. Montrer que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}\ \langle f, e_m\rangle\ e_m(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta - t)\, dt$$

pour tous $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}\ \langle f, e_m\rangle\ e_m(\theta) = f(\theta)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

***Exercice 7*** ***(Formule sommatoire de Poisson).*** Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}^-_{2\pi m} f)\, e^{2i\pi m x}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que, pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

***Exercice 8*** ***(Inégalité de Wirtinger).*** Soit $f \in C_1([0,2\pi])$ une fonction à valeurs réelles telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$.

(1) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} (f(t))^2\, dt \le \int_0^{2\pi} (Df(t))^2\, dt.$$

(2) Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $f = a\cos + b\sin$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

***Exercice 9.*** Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

(1) Prouver que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour $x \in [-\pi,\pi[$ et prolongée par $2\pi$-périodicité est égale à

$$\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\left(1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\cos(nt)\right).$$

(2) En déduire que

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

(3) Démontrer que la série
$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$
converge pour tout $x \in ]-1,1[$. Démontrer ensuite que $g \in C_1(]-1,1[)$ et déterminer explicitement sa dérivée.

(4) En déduire que, pout tout $x \in ]-1,1[$, on a
$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

# 9. Ondelettes

***Exercice 1* (Splines).** Pour $n = 0$ on pose

$$V_0^{(0)} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \forall k \in \mathbb{Z},\ f \text{ est constant sur } [k, k+1[\}$$

et pour $n \in \mathbb{N}_0$ on pose

$$V_0^{(n)} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \forall k \in \mathbb{Z},\ f_{[k,k+1[} \text{ est un polynôme de degré } \leq n\}.$$

On pose aussi

$$g = \underbrace{\chi_{[0,1]} \star \cdots \star \chi_{[0,1]}}_{n+1 \text{ facteurs}}.$$

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ montrer que $g$ et les espaces $V_j^{(n)} (j \in \mathbb{Z})$ définis par

$$V_j^{(n)} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(2^{-j}\cdot) \in V_0^{(n)}\}$$

forment une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ déterminer le filtre $m_0$.

***Exercice 2* (Littlewood-Paley).** Expliquer comment construire une fonction $\theta \in C_\infty(\mathbb{R})$ à support compact, à valeurs dans dans $[0, 1]$, paire, égale à 1 sur $[-2\pi/3, 2\pi/3]$, égale à 1 sur le complémentaire de $[-4\pi/3, 4\pi/3]$ et telle que

$$\theta^2(x) + \theta^2(2\pi - x) \quad \forall x \in [0, 2\pi].$$

Pour un tel $\theta$ on pose

$$g = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^+\theta,$$

on définit $V_0$ comme étant l'adhérence de l'enveloppe linéaire des $g(\cdot - k)(k \in \mathbb{Z})$ et, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on définit

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(2^{-j}\cdot) \in V_0\}.$$

Montrer que $g$ et les espaces $V_j(j \in \mathbb{Z})$ forment une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$.

***Exercice 3* (Shannon).** Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on pose

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathrm{supp}(\mathbb{F}^- f) \subset [-2^j\pi, 2^j\pi]\}.$$

On définit aussi le sinus cardinal normalisé $\sin_\pi$ par

$$\sin_\pi(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que les espaces $V_j(j \in \mathbb{Z})$ sont fermés et que les translatés entiers de $\varphi = \sin_\pi$ forment une base orthonormée de $V_0$.

(2) Montrer que les espaces $V_j(j \in \mathbb{Z})$ forment une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$.

(3) Montrer que dans $L^2(\mathbb{R})$ on a

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\varphi(2x - 2k - 1).$$

(4) Déterminer le filtre $m_0$.

F. Bastin & C. Dubussy – 15 septembre 2023