

Solutions des exercices non faits

Voici les réponses finales des exercices non faits en classe. Le fichier sera mis à jour au fur et à mesure de l'avancement des TP.

Liste 0

Exercice 1 : a) $f \notin C^0(\mathbb{R})$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f\|_1 = 2$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \sqrt{2/m}$, $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|f\|_\infty = 1/m$

b) $f_m \rightarrow 0$ sur \mathbb{R} et $f_m \Rightarrow 0$ sur \mathbb{R}

c) f_m ne converge pas dans $L^1(\mathbb{R})$, $f_m \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $f_m \rightarrow 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$

Exercice 3 : a) $f_m \rightarrow 0$ sur \mathbb{R}_0

b) f_m ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_0 mais $f_m \Rightarrow 0$ sur tout ensemble borné fermé inclus dans \mathbb{R}_0

c) $f_m \rightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$, f_m ne converge ni dans $L^2(\mathbb{R})$ ni dans $L^\infty(\mathbb{R})$

Liste 1

Exercice 2 : b) $f \star g(y) = 0$ si $y \leq 0$ et $y \sin(y)/2$ sinon

Exercice 5 :

$$\chi_A \star \chi_B(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } |u| > 2 \\ \pi/2 + \arcsin(u+1) + \sin(2 \arcsin(u+1))/2 & \text{si } -2 \leq u \leq 0 \\ \pi/2 - \arcsin(u-1) - \sin(2 \arcsin(u-1))/2 & \text{si } 0 < u \leq 2 \end{cases}$$

Liste 2

Exercice 1 : (3) $y \mapsto 2a(1 - \cos(y/a))/y^2$; (4) $y \mapsto 2e^{iy}/(1 + y^2)$

Exercice 4 : La transformée de Fourier de f est $y \mapsto 2(1 - \cos(y))/y^2$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4} dx = \pi/3$

Exercice 5 : (2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax) \cos(bx)}{x} dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } a > b \\ \pi/4 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Liste 5

Exercice 4 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x) \sin(x)}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi(1 - e^{-2|a|})}{4a^2}$$

Liste 6

Exercice 3 : La projection d'un point x sur la boule unité fermée est $\frac{x}{\|x\|}$ si x n'appartient pas à la boule, et x sinon.

Liste 7

Exercice 3 : (1) $f(x) = 2/\pi + \sum_{m=1}^{+\infty} 4 \cos(2mx)/(\pi(1 - 4m^2))$

(2) $\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m/(4m^2 - 1) = 1/2 - \pi/4$ et $\sum_{m=1}^{+\infty} 1/(4m^2 - 1) = 1/2$