Chapitre 3

Espaces L^p

3.1 Espaces vectoriels normés

Rappelons la définition d'un vecteur et d'un espace vectoriel.

Définition 3.1.1. *On appelle vecteur un élément d'un espace vectoriel (ou linéaire). Et un espace vectoriel E est un ensemble dans lequel on a défini une opération interne appelée addition $(+)$ et une multiplication externe $(\times)$, le plus souvent en utilisant le corps*[1] $\mathbb{K}$ *des réels ou des complexes, qui vérifient les propriétés suivantes :*

1)	$e + f = f + e, \quad \forall e, f \in E$	*(commutativité de +)*
2)	$(e + f) + g = e + (f + g), \quad \forall e, f, g \in E$	*(associativité de +)*
3)	$\exists 0 \in E : 0 + e = e + 0 = e, \quad \forall e \in E$	*(existence d'un neutre pour +)*
4)	$\forall e \in E,\ \exists e' \in E\ :\ e + e' = 0$	*(tout élément possède un symétrique pour +)*
5)	$(rs) \times e = r(s \times e), \quad \forall e \in E, r, s \in K$	*(associativité pour $\times$ et la multiplication dans $\mathbb{K}$)*
6)	$1 \times e = e, \quad \forall e \in E$	*(1 est neutre pour $\times$)*
7)	$(r + s) \times e = r \times e + s \times e$ *et* $r \times (e + f) = r \times e + r \times f$ $\forall e, f \in E, r, s \in K$	*(double distributivité)*

Les quatre premières propriétés se résument en disant que l'addition donne à l'ensemble E une structure de groupe[2] *commutatif.*

Rappelons aussi la notion de norme.

Définition 3.1.2. *Une norme sur un espace vectoriel E est une application $\|.\|$ définie sur E à valeurs réelles positives qui vérifie les propriétés suivantes :*

1) si $e \in E$, alors $\|e\| = 0 \ \Leftrightarrow\ e = 0$

2) $\|c\,e\| \ = \ |c|\,\|e\| \quad \forall c \in \mathbb{K},\ e \in E$

3) $\|e + f\| \ \leq \ \|e\| + \|f\| \quad \forall e, f \in E$ (inégalité triangulaire)

---

1. Un corps est un ensemble K muni de deux lois + et $\times$ vérifiant : (1) (K,+) est un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 0 ; (2) $(K \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe ; (3) la multiplication $\times$ est distributive par rapport à l'addition + : pour tous (a,b,c) de K^3, on a $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ et $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$

2. Un groupe est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative admettant un élément neutre et, pour chaque élément de l'ensemble, un élément symétrique.

Définissons alors les notions de convergence de suite et de suite de Cauchy dans un espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|$

Définition 3.1.3. *Soit e_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de E.*
1) On dit qu'elle converge dans E pour la norme $\|.\|$ s'il existe $e \in E$ tel que

$$\lim_{m \to +\infty} \|e_m - e\| \;=\; 0;$$

2) on dit qu'elle est de Cauchy dans E pour la norme $\|.\|$ si, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\|e_p - e_q\| \;\leq\; \varepsilon \quad \forall p, q \geq M.$$

Cela étant, il est évident que si une suite converge, alors sa limite est unique vu la première propriété d'une norme. Il est tout aussi évident que si une suite converge dans E pour la norme $\|.\|$, alors elle est de Cauchy dans E pour la norme $\|.\|$. Mais la réciproque est fausse[3]. Un espace vectoriel dans lequel les suites de Cauchy convergent est appelé *espace de Banach*.

La propriété suivante, directe à démontrer, est d'une grande utilité lorsqu'on doit montrer qu'une suite de Cauchy converge.

Propriété(s) 3.1.4. *Soit e_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de E qui est de Cauchy pour la norme $\|.\|$. Si cette suite admet une sous-suite convergente, alors elle converge vers la même limite que la sous-suite.*

Preuve. Supposons que la sous-suite $e_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers e pour la norme $\|.\|$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\left\|e_{k(m)} - e\right\| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq M.$$

Comme la suite e_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est de Cauchy, il existe aussi $M' \geq M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\|e_p - e_q\| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall p, q \geq M'.$$

Ainsi, quel que soit $m \geq M'$, on a

$$\|e_m - e\| \;\leq\; \left\|e_m - e_{k(m)}\right\| + \left\|e_{k(m)} - e\right\| \;\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

puisque $k(m) \geq m \geq M'$ et $m \geq M' \geq M$. $\square$

3.2 Espaces pré-hilbertiens, de Hilbert

Rappelons quelques définitions de base ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 3.2.1. *Soit H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que l'on désignera par $\mathbb{K}$. On appelle produit scalaire sur H une application*

$$< .,. > : \; H \times H \to \mathbb{K}$$

qui vérifie les propriétés suivantes. Quels que soient $h, g, e \in H$ et $c \in \mathbb{K}$, on a

$$(1) \; < h, h > \geq 0 \quad et \; < h, h >= 0 \Leftrightarrow h = 0, \quad (2) \; < ch, g >= c < h, g >,$$

$$(3) \; < h + g, e >=< h, e > + < g, e >, \quad (4) \overline{< h, g >} =< g, h > .$$

3. Par exemple l'espace vectoriel des polynômes muni de la norme $P \mapsto \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ n'est pas complet (cf le théorème de Weierstrass 2.3.1). On peut aussi définir la notion de suite de Cauchy et de convergence pour un espace métrique (c'est-à-dire un ensemble sur lequel on a défini une distance) ; dans ce cas un ensemble non complet est par exemple l'ensemble des rationnels (car tout réel est limite d'une suite de rationnels), l'ensemble $]0, 1[$ (la suite $1/m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ est de Cauchy mais ne converge pas vers un élément de $]0, 1[$).

Propriété(s) 3.2.2. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Quels que soient $g, h \in H$, on a

$$|< g, h >| \ \leq \ \sqrt{< g, g >}\sqrt{< h, h >}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si g et h sont linéairement dépendants.

Preuve. Pour tout complexe λ, on a (*)

$$0 \ \leq < h - \lambda g, h - \lambda g > = < h, h > -\lambda < g, h > -\overline{\lambda} < h, g > +|\lambda|^2 < g, g > .$$

Si $< g, g >\neq 0$, en prenant $\lambda =< h, g > / < g, g >$, on obtient (**)

$$0 \ \leq < h, h > -\frac{| < h, g > |^2}{< g, g >} - \frac{| < h, g > |^2}{< g, g >} + \frac{| < h, g > |^2}{< g, g >} \ = < h, h > -\frac{| < h, g > |^2}{< g, g >}$$

donc

$$|< g, h >| \ \leq \ \sqrt{< g, g >}\sqrt{< h, h >}.$$

Lorsque $< g, g >= 0$, on a $g = 0$ donc $< g, h >= 0$ et l'inégalité reste vraie.

Cela étant, si g et h sont linéairement dépendants, il est clair que l'égalité a lieu. Réciproquement, si l'égalité a lieu et si $g \neq 0$, alors, vu l'inégalité (**), on obtient

$$0 \ = < h - \lambda g, h - \lambda g >$$

avec $\lambda \ = \ < \ h, g \ > \ / \ < \ g, g \ >$ donc $h \ = \ \lambda g$. Si g est nul, g, h sont bien sûr linéairement dépendants.

Remarquons qu'en prenant $\lambda = r < h, g >$ avec r réel, l'inégalité (*) devient

$$0 \ \leq < h - \lambda g, h - \lambda g > = < h, h > -r| < g, h > |^2 - r| < h, g > |^2 + r^2| < h, g >< g, g >$$

et on peut aussi conclure en utilisant le fait que si le coefficient de r^2 n'est pas nul, alors le discriminant du trinôme est négatif. □

Grâce à cette inégalité, on va montrer que la loi $\|.\| : H \to [0, +\infty[\quad h \mapsto \sqrt{< h, h >}$ est une norme sur H. Un espace H muni d'un produit scalaire et de la norme associée est appelé *espace pré-hilbertien* et *hilbertien* (ou de Hilbert) si en outre toutes les suites de Cauchy (pour la norme) convergent.

Propriété(s) 3.2.3. *La loi*

$$\|.\| : H \to [0, +\infty[\quad h \mapsto \sqrt{< h, h >}$$

est une norme sur H.

Preuve. Vu la propriété (1) du produit scalaire, il est clair que cette application est bien définie et telle que $\|h\| = 0$ si et seulement si $h = 0$.

Cela étant, pour $h \in H$ et $c \in \mathbb{K}$, on a aussi directement

$$\|ch\| = \sqrt{< ch, ch >} = \sqrt{c\bar{c} < h, h >} = |c|\|h\|$$

en utilisant les propriétés (2) et (4) du produit scalaire.

Il reste donc à montrer l'inégalité triangulaire, à savoir

$$\sqrt{< h + g, h + g >} \ \leq \ \sqrt{< h, h >} + \sqrt{< g, g >} \quad \forall h, g \in H.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} < h+g, h+g > &= < h,h > + < g,g > + < h,g > + < g,h > \\ &= < h,h > + < g,g > + 2\Re(< h,g >) \\ &\leq < h,h > + < g,g > + 2| < h,g > | \\ &\leq < h,h > + < g,g > + 2\sqrt{< h,h >}\sqrt{< g,g >} \quad \text{inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &= \left(\sqrt{< h,h >} + \sqrt{< g,g >}\right)^2 \end{aligned}$$

et on conclut. □

3.3 Ensembles négligeables

Un ensemble négligeable est un ensemble de mesure nulle. Encore faut-il savoir avec quelle mesure on travaille car un ≪ gros ≫ ensemble peut très bien être négligeable (penser au complémentaire d'un point, qui est négligeable vis-à-vis de la mesure de Dirac). Dans le présent cours, nous ne considérons que la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

Rappelons la définition de la mesure d'un pavé[4] : si

$$P = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$$

avec $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ et $a_k < b_k$ pour tout $k = 1, \ldots, n$ alors

$$mes(P) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

On a la même mesure pour tous les autres cas de pavés bornés (c'est-à-dire que l'on considère les extrémités a_k, b_k faisant partie des intervalles ou pas).

Définition 3.3.1. *Un ensemble $N \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable lorsque, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini ou une infinité dénombrables de pavés $P^{(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$N \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} P^{(m)} \quad et \quad \sum_{m=1}^{+\infty} mes\left(P^{(m)}\right) \leq \varepsilon$$

Donnons tout de suite les exemples suivants.

Exemple(s) 3.3.2. *(1) Tout ensemble fini, de même que tout ensemble dénombrable est négligeable.*
(2) Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite est négligeable ; dans $\mathbb{R}^3$, tout plan est négligeable[5].
(3) Tout ensemble d'intérieur non vide n'est pas négligeable.

Preuve. (1) Si $N = \{x^{(1)}, \ldots, x^{(J)}\}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ les pavés

$$P^{(j)} = \prod_{k=1}^{n} \left[x_k^{(j)} - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon/J}}{2}, x_k^{(j)} + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon/J}}{2} \right], \; j = 1, \ldots, J$$

4. Pour rappel, un pavé est un produit cartésien d'intervalles bornés non réduits à un point de $\mathbb{R}^n$
5. En toute généralité, dans $\mathbb{R}^n$, tout hyperplan est négligeable.

sont tels que

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{J} P^{(j)} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{J} mes\left(P^{(j)}\right) \;\leq\; \sum_{j=1}^{J} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{J}} \;=\; \varepsilon.$$

Le cas dénombrable est analogue. Si $N = \{x^{(j)} \;:\; j \in \mathbb{N}_0\}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ les pavés

$$P^{(j)} = \prod_{k=1}^{n} \left[x_k^{(j)} - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon 2^{-j}}}{2}, x_k^{(j)} + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon 2^{-j}}}{2} \right], \; j \in \mathbb{N}_0$$

sont tels que

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} P^{(j)} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} mes\left(P^{(j)}\right) \;\leq\; \sum_{j=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{\varepsilon 2^{-j}} \;=\; \varepsilon.$$

(2) Prouvons le cas de $\mathbb{R}^2$; l'autre utilise la même technique (notations un peu plus lourdes en plus). Un changement de variable linéaire ramenant toute droite sur l'axe X, montrons effectivement que X est négligeable dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, les pavés

$$P^{(m)} = [m, m+1] \times [-2^{-|m|}\varepsilon/6, 2^{-|m|}\varepsilon/6]$$

sont tels que

$$X \times \{0\} \;\subset\; \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} P^{(m)}$$

et

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} mes\left(P^{(m)}\right) \;\leq\; \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|m|}\,\frac{\varepsilon}{3} \;=\; \frac{\varepsilon}{3}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-m}\right) \;=\; \varepsilon.$$

(3) Admis. □

Terminons en donnant la propriété suivante, fort utile.

Propriété(s) 3.3.3. *Toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.*

Preuve. Soient N_k ($k \in \mathbb{N}_0$) des ensembles négligeables. On doit montrer que

$$N \;=\; \bigcup_{k=1}^{+\infty} N_k$$

est encore négligeable. Soit donc $\varepsilon > 0$. Comme chaque N_k est négligeable, quel que soit k, il existe donc une suite $P_k^{(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) de pavés tels que

$$N_k \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} P_k^{(m)} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} mes\left(P_k^{(m)}\right) \;\leq\; \varepsilon\, 2^{-k}.$$

Les ensembles $P_k^{(m)}$ ($m, k \in \mathbb{N}_0$) forment donc une famille dénombrable de pavés tels que

$$N \;=\; \bigcup_{k=1}^{+\infty} N_k \;\subset\; \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{m=1}^{+\infty} P_k^{(m)}$$

et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} mes\left(P_k^{(m)}\right) \;\leq\; \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon\, 2^{-k} \;=\; \varepsilon$$

et on conclut. □

Définition 3.3.4. *(1) Une fonction est définie presque partout (on écrit souvent simplement pp) sur A s'il existe un ensemble négligeable $N \subset A$ tel que $f(x) \in \mathbb{C}$ pour tout $x \in A \setminus N$.*

(2) Une propriété a lieu presque partout (on écrit souvent simplement pp) si elle a lieu en dehors d'un ensemble négligeable.

Enfin, rappelons le résultat suivant, relatif à la continuité.

Propriété(s) 3.3.5. *Si une fonction continue f sur l'ouvert Ω est nulle presque partout sur Ω alors elle y est nulle partout.*

Preuve. Supposons que la fonction f ne soit pas nulle en $x \in \Omega$. Vu la continuité, il existe alors $r > 0$ tel que

$$b(x,r) = \{y \in \Omega : |y - x| \leq r\} \subset \Omega \quad \text{et} \quad |f(y)| > 0 \ \forall y \in b(x,r).$$

Comme la boule $b(x,r)$ est d'intérieur non vide, elle n'est pas négligeable. Comme f est non nul en tout point de celle-ci, on a une contradiction puisque f est nul presque partout. □

3.4 Les espaces $L^1(A)$, $L^2(A)$, $L^\infty(A)$

3.4.1 Rappels

La notion d'intégrabilité de fonctions est celle vue dans le cours d'analyse de Monsieur Nicolay de première année. Il s'agit de la notion qui conduit à la théorie de l'intégration de Lebesgue. Les théorèmes énoncés (et démontrés pour certains) dans le cours de première sont d'une importance primordiale pour le présent cours. Il faut seulement ajouter que, pour cette théorie de l'intégration, les fonctions n'ont pas besoin d'être définies partout : c'est la notion de ≪ presque partout ≫ qui prévaut.

Cela étant, on dit qu'une fonction définie presque partout est *mesurable* si elle est limite presque partout d'une suite de fonctions étagées. Toutes les fonctions continues sont mesurables, mais il y en a bien d'autres ! Pour alléger ce cours tout en ne diminuant pas son champ d'application, nous ferons ici l'hypothèse de travail que toutes les fonctions sont mesurables.

Cela étant, rappelons les résultats fondamentaux suivants.

Théorème 3.4.1. *(1) Soit f une fonction intégrable sur A. Alors*

$$\int_A |f(x)| \, dx \; = \; 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ pp sur } A$$

(2) (Lévi-convergence monotone) Soit f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) une suite de fonctions intégrables et à valeurs réelles pp sur A. Si
(a) on a $f_m \leq f_{m+1}$ (resp. $f_m \geq f_{m+1}$) pp sur A pour tout m
(b) si la suite

$$\int_A f_m(x) \, dx, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

est majorée (resp. minorée), alors il existe une fonction intégrable f sur A limite pp de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) et qui est telle que

$$\lim_{m \to +\infty} \int_A |f_m(x) - f(x)| \, dx \; = \; 0$$

(3) (Lebesgue-convergence majorée) Soit f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) une suite de fonctions intégrables sur A. Si cette suite converge ponctuellement presque partout (on dit tout simplement converge presque partout) sur A vers une fonction f, s'il existe une fonction intégrable F telle que

$$|f_m| \ \leq \ F \quad pp\ \forall m$$

alors f est intégrable sur A et on a

$$\lim_{m\to+\infty}\int_A |f_m(x) - f(x)|\ dx \ = \ 0$$

(4) (Tonelli, cas $\mathbb{R}^n$) Soient $n', n" \in \mathbb{N}_0$ tels que $n = n' + n"$ et soit une fonction f mesurable sur $\mathbb{R}^n$. Si la fonction

$$x" \mapsto \left|f(x', x")\right|$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n"}$ pour presque tout x' et si la fonction

$$x' \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n"}} \left|f(x', x")\right|\ dx"$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$ alors la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

(5) (Fubini, cas $\mathbb{R}^n$) Soient $n', n" \in \mathbb{N}_0$ tels que $n = n' + n"$. Si une fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ alors pour presque tout x', la fonction

$$x" \mapsto f(x', x")$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n"}$, la fonction

$$x' \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n"}} f(x', x")\ dx"$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx \ = \ \int_{\mathbb{R}^{n'}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n"}} f(x', x")\ dx"\right)\ dx'.$$

De même (permutation de l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale) pour presque tout $x"$, la fonction

$$x' \mapsto f(x', x")$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$, la fonction

$$x" \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x")\ dx'$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n"}$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx \ = \ \int_{\mathbb{R}^{n"}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x")\ dx'\right)\ dx".$$

3.4.2 L'espace de Banach $L^\infty(A)$

Désignons par $\mathcal{L}^\infty(A)$ l'ensemble des fonctions bornées presque partout sur A c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f définies presque partout sur A pour lesquelles il existe $C > 0$ et un ensemble négligeable N tels que

$$|f(x)| \leq C, \ \forall x \in A \setminus N;$$

C est naturellement appelé « majorant presque partout ».

On définit aussi la relation $\simeq$ suivante : $f \simeq g$ si f et g sont des fonctions égales presque partout sur A. Cette relation est une relation d'équivalence et l'espace quotient associé (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence) est noté $L^\infty(A)$. Dans cet ensemble, deux fonctions sont donc égales si elles sont égales presque partout (vu la définition de la relation d'équivalence).

Il est aussi immédiat de voir que $L^\infty(A)$ est un espace vectoriel (addition et produit par un complexe habituels).

On va aussi y définir une norme pour laquelle toute suite de Cauchy converge ; l'espace sera donc alors un espace de Banach.

Propriété(s) 3.4.2. *Si f est borné presque partout sur A alors la loi*

$$f \mapsto \inf\{r > 0 \ : \ |f(x)| \leq r \ pp \ sur \ A\}$$

est une norme sur $L^\infty(A)$. On utilise les notations

$$\|f\|_{L^\infty(A)} \ = \ \sup_{pp \ sur \ A} |f| \ = \ \inf\{r > 0 \ : \ |f(x)| \leq r \ pp \ sur \ A\}.$$

On a

$$|f| \ \leq \ \sup_{pp \ sur \ A} |f| = \|f\|_{L^\infty(A)} \quad pp \ surA.$$

Preuve. Comme f est borné presque partout sur A, l'ensemble $\{r > 0 \ : \ |f(x)| \leq r \text{ pp sur } A\}$ n'est pas vide et est évidemment minoré par 0. Sa borne inférieure existe donc et est un réel positif. C'est donc « le plus petit des majorants pp » de f sur A, ou encore la borne supérieure presque partout.

Cela étant, vu la définition des bornes inférieures, il existe une suite r_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de nombres strictement positifs et une suite N_m ($m \in \mathbb{N}_0$) d'ensembles négligeables tels que

$$\lim_{m\to+\infty} r_m = \|f\|_{L^\infty(A)} \quad \text{et} \quad |f(x)| \leq r_m \ \forall x \in A \setminus N_m, \ \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

L'ensemble $N = \cup_{m=1}^{+\infty} N_m$ est encore négligeable et on a

$$|f(x)| \leq r_m \ \forall x \in A \setminus N, \ \forall m \in \mathbb{N}_0$$

donc, en passant à la limite sur m,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(A)} \ \forall x \in A \setminus N.$$

Il reste à montrer que $f \mapsto \|f\|_{L^\infty(A)} \in [0, +\infty[$ est une norme sur $L^\infty(A)$. Cela s'effectue comme dans le cas des bornes supérieures classiques, notamment vu l'inégalité que l'on vient d'obtenir.

- Comme $\|f\|_{L^\infty(A)}$ est un majorant pp de f, il est clair que si ce majorant est nul, alors f est nul pp.

- Si f est nul pp, alors tout réel positif est majorant pp donc la borne inférieure de ceux-ci est nulle, c'est-à-dire $\|f\|_{L^\infty(A)} = 0$.
- Si $c \in \mathbb{C}_0$, alors quel que soit f borné pp sur A, on a

$$|cf(x)| \;\leq\; |c|\; \|f\|_{L^\infty(A)} \quad pp \text{ sur } A$$

donc

$$\|cf\|_{L^\infty(A)} \;\leq |c|\; \|f\|_{L^\infty(A)}\,;$$

de même

$$|f(x)| \;=\; \frac{1}{|c|}\,|cf(x)| \;\leq\; \frac{1}{|c|}\,\|cf\|_{L^\infty(A)} \quad pp \text{ sur } A$$

donc

$$\|f\|_{L^\infty(A)} \;\leq\; \frac{1}{|c|}\,\|cf\|_{L^\infty(A)}$$

c'est-à-dire

$$|c|\;\|f\|_{L^\infty(A)} \;\leq\; \|cf\|_{L^\infty(A)}\,.$$

On a donc bien

$$|c|\;\|f\|_{L^\infty(A)} \;=\; \|cf\|_{L^\infty(A)}\,.$$

- Si f, g sont bornés pp sur A, alors $f+g$ l'est aussi vu

$$|f(x)+g(x)| \;\leq\; |f(x)|+|g(x)| \;\leq\; \|f\|_{L^\infty(A)} + \|g\|_{L^\infty(A)} \quad pp \text{ sur } A;$$

on en déduit aussi tout de suite que

$$\|f+g\|_{L^\infty(A)} \;\leq\; \|f\|_{L^\infty(A)} + \|g\|_{L^\infty(A)}\,.$$

□

Remarque 3.4.3. *Si f est défini et borné sur A alors f est borné presque partout sur A et on a*

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \;\leq\; \sup_A |f|.$$

Preuve. Rappelons que par définition

$$\sup_A |f| \;=\; \inf\{r > 0 \;:\; |f(x)| \leq r \;\forall x \in A\}.$$

Il est clair que si f est borné, alors f est aussi borné pp puisque l'ensemble vide est négligeable. Cela étant, comme on a

$$|f(x)| \;\leq\; \sup_A |f| \quad \forall x \in A$$

on a aussi cette majoration presque partout. Ainsi $\sup_A |f|$ est un majorant pp, donc est supérieur au « plus petit des majorants pp », c'est-à-dire

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \;\leq\; \sup_A |f|$$

□

Propriété(s) 3.4.4. *Supposons que f soit continu sur A et que A soit tel que*[6] $A \cap b(x,r)$ *ne soit pas négligeable quels que soient $r > 0$ et $x \in A$. Alors*

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \ = \ \sup_A |f|$$

Preuve. Vu la remarque précédente, il suffit de montrer que

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \ \geq \ \sup_A |f|.$$

Si ce n'est pas le cas, alors

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| < \sup_A |f| \ = \ \inf\{r > 0 \ : \ |f(x)| \leq r \ \forall x \in A\}$$

ce qui implique que $\sup_{pp\ sur\ A} |f|$ n'est pas un majorant partout de f sur A. Il existe donc $x \in A$ tel que

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \ < \ |f(x)|.$$

La continuité de f sur A donne alors l'existence de $r > 0$ tel que

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \ < \ |f(y)| \quad \forall y \in A \cap b(x,r). \qquad (*)$$

Soit alors un ensemble négligeable N tel que

$$|f(t)| \ \leq \ \sup_{pp\ sur\ A} |f| \quad \forall t \in A \setminus N.$$

L'inégalité (*) donne donc

$$A \cap b(x,r) \subset N$$

ce qui est contradictoire puisque, par hypothèse, $A \cap b(x,r)$ n'est pas négligeable.□

Théorème 3.4.5. *L'espace $L^\infty(A)$ est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_{L^\infty(A)}$.*

Preuve. Cela se démontre exactement comme pour la convergence uniforme, à la différence près que les bornes supérieures, les inégalités, doivent être prises presque partout chaque fois. Comme on travaille avec des suites et que toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, cela ne pose aucun problème pour que la preuve dans le cas de la convergence uniforme s'étende à ce cas-ci. □

3.4.3 L'espace de Banach $L^1(A)$

Désignons par $\mathcal{L}^1(A)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur A. Comme dans le cas des fonctions bornées presque partout, on reprend la relation $\simeq$ suivante : $f \simeq g$ si f et g sont des fonctions égales presque partout sur A. Cette relation est une relation d'équivalence et l'espace quotient associé (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence) est noté $L^1(A)$. Dans cet ensemble, deux fonctions sont donc égales si elles sont égales presque partout (vu la définition de la relation d'équivalence).

Il est également immédiat de voir que $L^1(A)$ est un espace vectoriel (addition et produit par un complexe habituels).

On va aussi y définir une norme pour laquelle toute suite de Cauchy converge ; l'espace sera donc alors un espace de Banach.

6. Cela est vérifié lorsque A est ouvert, lorsque A est un pavé, ...

Propriété(s) 3.4.6. *La loi*

$$f \mapsto \int_A |f(x)|\ dx$$

est une norme sur $L^1(A)$. On utilise la notation

$$\|f\|_{L^1(A)} \ = \ \int_A |f(x)|\ dx.$$

Preuve. Vu les propriétés des intégrales, on a immédiatement, pour f, g intégrables et $c \in \mathbb{C}$,

$$\|f+g\|_{L^1(A)} \ \leq \ \|f\|_{L^1(A)} + \|g\|_{L^1(A)} \quad \text{et} \quad \|cf\|_{L^1(A)} \ = \ |c|\ \|f\|_{L^1(A)}\,.$$

De plus on a vu que

$$\int_A |f(x)|\ dx \ = \ 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \ pp$$

donc on a bien affaire à une norme. □

Théorème 3.4.7. *L'espace $L^1(A)$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_{L^1(A)}$.*

De plus, de toute suite qui converge pour la norme $\|.\|_{L^1(A)}$ vers une fonction f on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout (c'est-à-dire qu'en dehors d'un ensemble négligeable, on a la convergence ponctuelle) vers f.

Preuve. Nous utilisons ici le résultat qui affirme que si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, alors la suite converge (vers la même limite que la sous-suite).

Pour alléger les notations, la norme $\|.\|_{L^1(A)}$ sera simplement notée $\|.\|$.

Soit donc une suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de Cauchy pour $\|.\|$.

Tout d'abord, nous allons faire ce que l'on appelle une « extraction à la Cauchy » en exploitant le fait que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N}_0 \ :\ \|f_p - f_q\| \ \leq \ \varepsilon\ \forall p, q \geq M.$$

On a $2^{-1} > 0$ donc il existe $M_1 \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\|f_p - f_q\| \ \leq \ 2^{-1}\ \forall p, q \geq M_1.$$

Comme $2^{-2} > 0$, il existe ensuite $M_2 > M_1$ tel que

$$\|f_p - f_q\| \ \leq \ 2^{-2}\ \forall p, q \geq M_2.$$

On a donc obtenu

$$\|f_{M_1} - f_{M_2}\| \ \leq \ 2^{-1}.$$

Continuons : comme $2^{-3} > 0$, il existe $M_3 > M_2$ tel que

$$\|f_p - f_q\| \ \leq \ 2^{-3}\ \forall p, q \geq M_3.$$

On a donc obtenu

$$\|f_{M_2} - f_{M_3}\| \ \leq \ 2^{-2}.$$

Et ainsi de suite. En posant $k(m) = M_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a donc une sous-suite de naturels qui vérifie

$$\|f_{k(m)} - f_{k(m+1)}\| \ \leq \ 2^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Montrons alors que la sous-suite $f_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers une fonction intégrable f pour la norme $\|.\|$. La clef est un retour aux séries, une utilisation du théorème de Levi puis du théorème de Lebesgue.

Considérons la suite de sommes partielles F_M $(M \in \mathbb{N}_0)$ définie par

$$F_M(x) \;=\; \sum_{m=1}^{M} \left|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right|.$$

Il s'agit d'une suite de fonctions intégrables sur A, évidemment croissante vu sa forme et qui est telle que, quel que soit $M \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}\int_A F_M(x)\,dx \;&=\; \sum_{m=1}^{M}\int_A \left|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right|\,dx\\ &=\; \sum_{m=1}^{M} \|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}\|\\ &\leq\; \sum_{m=1}^{M} 2^{-m} \;\leq 1.\end{aligned}$$

Le théorème de Levi dit alors notamment que cette suite F_M $(M \in \mathbb{N}_0)$ converge presque partout vers une fonction intégrable, notée F par exemple. Mais on sait que si une série (numérique) est absolument convergente, elle est aussi convergente ; il s'ensuit que la suite

$$\sum_{m=1}^{M} \left(f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right), \quad M \in \mathbb{N}_0$$

est aussi convergente pour presque tout x. Comme on a, pour tout M,

$$\sum_{m=1}^{M} \left(f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right) \;=\; f_{k(M+1)}(x) - f_{k(1)}(x)$$

on a obtenu que la suite $f_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge presque partout. Notons f cette limite. Pour conclure, il reste à montrer que la convergence a lieu pour la norme $\|.\|$.

Ici c'est le théorème de Lebesgue qui va être utilisé, pour la suite $f_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$. On a bien une suite de fonctions intégrables qui converge presque partout (vers f) ; de plus, quel que soit $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned}\left|f_{k(m)}\right| \;&=\; \left|f_{k(m)} - f_{k(m-1)} + f_{k(m-1)} - \ldots + f_{k(1)}\right|\\ &\leq\; \left|f_{k(1)}\right| + \sum_{j=1}^{m-1}\left|f_{k(j+1)} - f_{k(j)}\right|\\ &\leq\; \left|f_{k(1)}\right| \;+\; F\end{aligned}$$

On peut donc conclure que toute suite de Cauchy converge.

Dans ce qui précède, on a extrait une sous-suite qui converge presque partout à partir d'une suite de Cauchy (pour la norme). Une suite qui converge pour la norme étant de Cauchy pour la norme, la seconde partie de l'énoncé est donc justifiée également. □

Remarque 3.4.8. *Dans ce précède, on ne peut pas améliorer le résultat concernant la convergence ponctuelle : il s'agit bien de l'existence d'une* sous-souite *qui converge* presque partout.

De fait, par exemple, la suite $f_m = \chi_{I_m}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ avec $I_m =]l2^{-k}, (l+1)2^{-k}]$ où $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ converge vers 0 dans $L^1(\mathbb{R})$ mais ne converge en aucun point de $]0, 1]$; par contre la sous-suite $\chi_{]0,2^{-k}]}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ converge vers 0 ponctuellement sur $\mathbb{R}$.

3.4.4 L'espace de Hilbert $L^2(A)$

Désignons par $\mathcal{L}^2(A)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur A. Comme dans les cas précédents, on reprend la relation $\simeq$ suivante : $f \simeq g$ si f et g sont des fonctions égales presque partout sur A. Cette relation est une relation d'équivalence et l'espace quotient associé (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence) est noté $L^2(A)$. Dans cet ensemble, deux fonctions sont donc égales si elles sont égales presque partout (vu la définition de la relation d'équivalence).

Il est direct de voir que $L^2(A)$ est un espace vectoriel (addition et produit par un complexe habituels) : pour les multiples complexes, c'est évident et pour l'addition, il suffit de noter que, puisque $0 \leq (|z| - |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2|zz'|$ pour tous complexes z, z',

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^2 &\leq |f(x)|^2 + 2|f(x)g(x)| + |g(x)|^2 \\ &\leq |f(x)|^2 + |f(x)|^2 + |g(x)|^2 + |g(x)|^2 \\ &= 2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2 \end{aligned}$$

avec $2|f|^2 + 2|g|^2$ intégrable.

On va aussi y définir une norme pour laquelle toute suite de Cauchy converge ; cette norme sera définie à partir d'un produit scalaire donc l'espace sera alors un espace de Hilbert.

Propriété(s) 3.4.9. *La loi*

$$f, g \mapsto < f, g >= \int_A f(x)\,\overline{g(x)}\ dx$$

est un produit scalaire sur $L^2(A)$.

Dès lors la loi

$$f \mapsto \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\int_A |f(x)|^2\ dx}$$

est une norme sur $L^2(A)$. On utilise la notation

$$\|f\|_{L^2(A)} = \sqrt{\int_A |f(x)|^2\ dx}.$$

Preuve. Notons tout d'abord une fois de plus que puisqu'on a

$$0 \leq (|z| - |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2|zz'|$$

pour tous complexes z, z', on obtient

$$\left| f(x)\overline{g(x)} \right| \leq \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right) \quad \text{pour presque tout } x,$$

ce qui assure que la fonction que l'on intègre dans la définition du produit scalaire est bien intégrable lorsque f et g sont de carré intégrable.

Les autres propriétés à satisfaire pour être un produit scalaire (cf la section 3.2) sont immédiates à vérifier étant donné les propriétés du calcul intégral. □

Théorème 3.4.10. *L'espace $L^2(A)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{L^2(A)}$.*

Preuve. Cette preuve est une adaptation du cas L^1. Pour alléger les notations, la norme $\|.\|_{L^2(A)}$ sera ici aussi simplement notée $\|.\|$.

Soit donc une suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de Cauchy pour $\|.\|$.

Tout d'abord, une « extraction à la Cauchy » est encore de mise ; c'est la même chose que dans le cas L^1 puisqu'on n'utilise que la notion de norme. On a une sous-suite $k(m)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ telle que

$$\|f_{k(m)} - f_{k(m+1)}\| \;\leq\; 2^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Montrons alors aussi que la sous-suite $f_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge pour la norme $\|.\|$ vers une fonction de carré intégrable f. Considérons la suite de sommes partielles G_M $(M \in \mathbb{N}_0)$ définie par

$$G_M(x) \;=\; \left(\sum_{m=1}^{M} \left|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right|\right)^2 .$$

Il s'agit d'une suite de fonctions intégrables sur A, évidemment croissante vu sa forme et qui est telle que, quel que soit $M \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
\int_A G_M(x)\; dx \;&=\; \int_A \left(\sum_{m=1}^{M} \left|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right|\right)^2 \; dx \\
&=\; \left\|\sum_{m=1}^{M} \left|f_{k(m+1)} - f_{k(m)}\right|\right\|^2 \\
&\leq\; \left(\sum_{m=1}^{M} \left\|f_{k(m+1)} - f_{k(m)}\right\|\right)^2 \\
&\leq\; \left(\sum_{m=1}^{M} 2^{-m}\right)^2 \;\leq 1.
\end{aligned}$$

Le théorème de Levi dit alors notamment que cette suite G_M $(M \in \mathbb{N}_0)$ converge presque partout vers une fonction intégrable, que l'on va noter G. Bien sûr la suite des racines carrées des G_M converge aussi presque partout. Et on reprend comme dans le cas L^1 : on sait que si une série (numérique) est absolument convergente, elle est aussi convergente ; il s'ensuit que la suite

$$\sum_{m=1}^{M} \left(f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right), \quad M \in \mathbb{N}_0$$

est aussi convergente pour presque tout x. Comme on a, pour tout M,

$$\sum_{m=1}^{M} \left(f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right) \;=\; f_{k(M+1)}(x) - f_{k(1)}(x)$$

on a obtenu que la suite $f_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge presque partout. Notons f cette limite. Pour conclure, il reste à montrer que la convergence a lieu pour la norme $\|.\|$.

Ici c'est le théorème de Lebesgue qui va être utilisé. Pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, considérons la suite $|f_{k(m)} - f_{k(p)}|^2$ $(m \in \mathbb{N}_0)$. C'est une suite de fonctions intégrables qui converge presque partout (vers $|f - f_{k(p)}|^2$) ; de plus, quel que soit $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $m > p$, on a

$$\begin{aligned}
\left|f_{k(m)} - f_{k(p)}\right|^2 &= \left|f_{k(m)} - f_{k(m-1)} + f_{k(m-1)} - \ldots + f_{k(p+1)} - f_{k(p)}\right|^2 \\
&\leq \left(\left|\sum_{j=p}^{m-1} \left|f_{k(j+1)} - f_{k(j)}\right|\right.\right)^2 \\
&\leq G_{m-1} \\
&\leq G
\end{aligned}$$

avec G intégrable. Le théorème de Lebesgue donne donc l'intégrabilité de la fonction $|f - f_{k(p)}|^2$ et

$$\lim_{m\to+\infty} \int_A \left|f_{k(m)}(x) - f_{k(p)}(x)\right|^2 \, dx = \int_A \left|f(x) - f_{k(p)}(x)\right|^2 \, dx$$

c'est-à-dire

$$\lim_{m\to+\infty} \left\|f_{k(m)} - f_{k(p)}\right\|^2 = \left\|f - f_{k(p)}\right\|^2.$$

On obtient aussi que f appartient à l'espace $L^2(A)$ car cet espace est un espace vectoriel et que, quel que soit p, on a $f = f - f_{k(p)} + f_{k(p)}$ avec $f - f_{k(p)}$ et $f_{k(p)}$ qui sont des fonctions de celui-ci. On obtient alors aussi facilement la convergence annoncée. De fait, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe M tel que

$$\|f_r - f_s\| \leq \varepsilon \quad \forall r, s \geq M$$

donc aussi

$$\left\|f_{k(m)} - f_{k(p)}\right\| \leq \varepsilon \quad \forall m, p \geq M;$$

un passage à la limite sur m donne alors (vu ce qui précède)

$$\left\|f - f_{k(p)}\right\| \leq \varepsilon \quad \forall p \geq M$$

et on conclut. □

3.4.5 Le théorème d'approximation

Rappelons ici deux résultats qui se démontrent en utilisant des théorèmes relatifs au calcul intégral (notamment le théorème de Fubini). Nous renvoyons au syllabus de J. Schmets pour leur démonstration ainsi qu'une explication montrant qu'on ne peut avoir le même résultat dans $L^\infty(\Omega)$.

Théorème 3.4.11. *(1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $f \in L^1(\Omega)$ (resp. $f \in L^2(\Omega)$), et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée α* **dans**[7] *Ω telle que*

$$\|f - \alpha\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon \quad \left(\textit{resp.} \quad \|f - \alpha\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon\right).$$

(2) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$), on a

$$\lim_{h\to 0} \|f(.) - f(. + h)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0 \quad \left(\textit{resp.} \quad \lim_{h\to 0} \|f(.) - f(. + h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0\right).$$

Dans la suite de ce cours, nous établirons une version « régulière » de ce résultat, après avoir défini et étudié la notion de produit de composition de fonctions.

7. Une fonction étagée dans Ω est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de pavés dont l'adhérence est incluse dans l'ouvert Ω.