Année académique 2025-2026

Introduction à l'analyse harmonique MATH0511

Françoise Bastin

Version 4 septembre 2025 (V1 : 010819)

Introduction

La table des matières complète donne une bonne description du contenu de ce cours. Nous nous contenterons donc ici de recopier un bref aperçu de ce qu'on peut lire sur le web (wikipedia), à propos de l'analyse harmonique.

Par ailleurs, il est clair qu'au vu du nombre d'heures du cours, il est impossible de voir l'entièreté du contenu de ces notes. Cependant, la matière présentée peut être vue en seconde lecture, si le besoin s'en fait sentir, pour d'autres cours ou travaux.

L'analyse harmonique est la branche des mathématiques qui étudie la représentation des fonctions ou des signaux comme superposition d'ondes de base. Elle approfondit et généralise les notions de série de Fourier et de transformée de Fourier. Les ondes de base s'appellent les harmoniques, d'où le nom de la discipline. Durant ces deux derniers siècles, elle a eu de nombreuses applications en physique sous le nom d'analyse spectrale, et connaît des applications récentes notamment en traitement des signaux, mécanique quantique, neurosciences, stratigraphie...

FB,
Version 4 septembre 2025 (V1 : 010819)

Table des matières

Chapitre 1

Rappels

Voir les cours de S. Nicolay et J.-P. Schneiders de première et de seconde années (bachelier sciences mathématiques)

1.1 Convergence de suites numériques et de fonctions

.

1.2 Intégrales eulériennes

Les fonctions eulériennes classiques, à savoir les fonctions définies par des intégrales paramétriques Γ et B (voir suite de ce chapitre) sont d'une grande importance en analyse. Par exemple, la fonction Γ généralise les factorielles des naturels, ce qui permet à des expressions statistiques discrètes de pouvoir se généraliser dans le ≪ continu ≫ (ce qui veut dire ici en utilisant des fonctions de variables réelles plutôt que des suites) et d'ainsi apporter un outil d'étude puissant. La fonction B, quant à elle, intervient dans l'expression de différences finies, lesquelles sont étudiées en analyse un peu comme les opérateurs différentiels.

Propriété(s) 1.2.1. *(1) La fonction $x \mapsto e^{-x}\, x^{n-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[\Leftrightarrow n > 0$.*
(2) La fonction $x \mapsto x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}$ est intégrable sur $]0, 1[\Leftrightarrow m > 0$ et $n > 0$.

Preuve. Notons tout d'abord que les fonctions données sont continues sur les ensembles considérés.

(1) Si $n \geq 1$, la fonction est même continue sur $[0, +\infty[$ et après multiplication par x^2, on a une convergence vers 0 en $+\infty$; on a donc l'intégrabilité voulue.

Si $0 < n < 1$, l'intégrabilité en $+\infty$ ne pose pas non plus de problème car, par exemple $x^{n-1}\, e^{-x} \leq e^{-x}$ lorsque $x \geq 1$ et l'exponentielle $x \mapsto e^{-x}$ est évidemment intégrable en $+\infty$. Enfin, on a aussi l'intégrabilité en 0 car $e^{-x}\, x^{n-1} \leq x^{n-1}$ pour tout $x > 0$ et $x \mapsto x^{n-1}$ est intégrable en 0.

Réciproquement, si la fonction est intégrable alors $n > 0$. De fait, on a $e^{-x}x^{n-1} \geq x^{n-1}/2$ au voisinage de 0 et $x \mapsto x^{n-1}$ est intégrable en 0 si et seulement si $1 - n < 1$ c'est-à-dire $n > 0$.

(2) Ici, c'est encore plus simple : on a

$$0 < x^{m-1}\,(1-x)^{n-1} \leq Cx^{m-1} \quad \text{au voisinage de } 0^+$$

et

$$0 < x^{m-1}\,(1-x)^{n-1} \leq C'(1-x)^{n-1} \quad \text{au voisinage de } 1^-$$

dès lors on a bien l'intégrabilité lorsque $n, m > 0$.

Réciproquement, comme on a

$$x^{m-1}\,(1-x)^{n-1} \geq C x^{m-1} \quad \text{au voisinage de } 0^+$$

et

$$x^{m-1}\,(1-x)^{n-1} \geq C'(1-x)^{n-1} \quad \text{au voisinage de } 1^-$$

l'intégrabilité de $x \mapsto x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}$ en 0^+ implique $m > 0$ et son intégrabilité en 1^- implique $n > 0$. □

Définition 1.2.2. *La fonction* Γ *est définie par*

$$\Gamma(n) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{n-1}\;dx, \quad n > 0$$

et la fonction B *est définie par*

$$B(m,n) \;=\; \int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\;dx, \quad m, n > 0.$$

Propriété(s) 1.2.3. *On a les égalités suivantes*

(1) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

(2) $\Gamma(n+1) \;=\; n\,\Gamma(n)$ *pour tout* $n > 0$

(3) $\Gamma(n+1) \;=\; n!$ *pour tout naturel strictement positif* n

(4) $B(m,n) \;=\; B(n,m)$ *pour tous* $m, n > 0$

Preuve. (1) C'est un simple calcul. On a

$$\Gamma(1) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x}\;dx \;=\; -\int_0^{+\infty} De^{-x}\;dx \;=\; 1$$

et

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{-1/2}\;dx = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,t^{-1}\,2t\;dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\;dt = \sqrt{\pi}.$$

(2) Ici aussi c'est un simple calcul d'intégration par parties

$$\Gamma(n+1) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^n\;dx \;=\; -\int_0^{+\infty} De^{-x}\,x^n\;dx \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x}\,nx^{n-1}\;dx \;=\; n\,\Gamma(n).$$

(3) résulte directement de (2) et (1)

(4) s'obtient immédiatement par exemple en utilisant le changement de variable linéaire $g(x) = 1-x,\; x \in]0,1[$. □

Proposition 1.2.4 (Formule de Stirling)**.** *On a*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{n^n\,e^{-n}\,\sqrt{2\pi n}} \;=\; 1.$$

Preuve. Voir les notes de J. Schmets par exemple. □

Propriété(s) 1.2.5. *Quel que soit $\theta \in]0,1[$, on a*

$$B(\theta, 1-\theta) \ = \ \frac{\pi}{\sin(\theta\,\pi)}.$$

Preuve. Voir les notes de J. Schmets par exemple. □

Propriété(s) 1.2.6. *Le lien entre Γ et B est*

$$\Gamma(n)\,\Gamma(m) \ = \ \Gamma(m+n)\,B(m,n) \quad \forall n,m>0$$

Preuve. On obtient cette égalité en faisant un changement de variables dans une intégrale double comme suit. On a

$$\Gamma(n)\,\Gamma(m) \ = \ \int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{n-1}\,dx \times \int_0^{+\infty} e^{-y}\,y^{m-1}\,dy \ = \ \iint_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-(x+y)}\,x^{n-1}\,y^{m-1}\,dx\,dy$$

On utilise alors la fonction $G=(g_1,g_2)$ définie par

$$g_1(x,y) \ = \ x+y, \quad g_2(x,y) = \frac{x}{x+y} \quad (x,y)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$$

avec g_1, g_2 indéfiniment continûment dérivables sur $A =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$; elle s'inverse comme suit

$$\left\{\begin{array}{l} s = g_1(x,y) = x+y \\ t = g_2(x,y) = x/(x+y) \end{array}\right. \ (x,y)\in A \ \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = ts \\ y = s-x = s-st = s(1-t) \end{array}\right. \ (s,t)\in]0,+\infty[\times]0,1[$$

avec $h_1 : (s,t)\mapsto ts$ et $h_2 \mapsto s-st$ indéfiniment continûment dérivables sur $]0,+\infty[\times]0,1[$. Cela étant, on a

$$\Big| D_s h_1(s,t)\,D_t h_2(s,t) \ - \ D_t h_1(s,t)\,D_s h_2(s,t) \Big| \ = \ \Big| t\,(-s) \ - \ s\,(1-t) \Big| \ = \ |-s| \ = \ s$$

donc

$$\begin{aligned} \Gamma(n)\,\Gamma(m) \ &= \ \iint_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-(x+y)}\,x^{n-1}\,y^{m-1}\,dx\,dy \\ &= \ \iint_{]0,+\infty[\times]0,1[} e^{-s}\,t^{n-1}\,s^{n-1}\,s^{m-1}\,(1-t)^{m-1}\,s\,ds\,dt \\ &= \ \int_0^{+\infty} e^{-s}\,s^{n+m-1}\,ds \times \int_0^1 t^{n-1}\,(1-t)^{m-1}\,dt \\ &= \ \Gamma(m+n)\,B(m,n) \end{aligned}$$

□

Exercice 1.2.7. *On a*

$$\Gamma\in C_\infty(]0,+\infty[), \quad B\in C_\infty(]0,+\infty[\times]0,+\infty[)$$

et ces intégrales sont « dérivables sous le signe d'intégration ».

Chapitre 2

Espaces L^1, L^2, L^∞

2.1 Espaces vectoriels normés

Rappelons aussi les notions de norme, de converge ce et « de Cauchy ».

Définition 2.1.1. *Une norme sur un espace vectoriel E est une application $\|.\|$ définie sur E à valeurs réelles positives qui vérifie les propriétés suivantes :*

1) si $e \in E$, alors $\|e\| = 0 \ \Leftrightarrow\ e = 0$

2) $\|c\,e\| \ = \ |c|\,\|e\| \quad \forall c \in \mathbb{K},\ e \in E$

3) $\|e + f\| \ \leq\ \|e\| + \|f\| \quad \forall e, f \in E$ (inégalité triangulaire)

Définissons alors les notions de convergence de suite et de suite de Cauchy dans un espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|$

Définition 2.1.2. *Soit e_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de E.*
1) On dit qu'elle converge dans E pour la norme $\|.\|$ s'il existe $e \in E$ tel que

$$\lim_{m\to+\infty} \|e_m - e\| \ = \ 0;$$

2) on dit qu'elle est de Cauchy dans E pour la norme $\|.\|$ si, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\|e_p - e_q\| \ \leq\ \varepsilon \quad \forall p, q \geq M.$$

Cela étant, il est évident que si une suite converge, alors sa limite est unique vu la première propriété d'une norme. Il est tout aussi évident que si une suite converge dans E pour la norme $\|.\|$, alors elle est de Cauchy dans E pour la norme $\|.\|$. Mais la réciproque est fausse [1]. Un espace vectoriel dans lequel les suites de Cauchy convergent est appelé *espace de Banach*.

La propriété suivante, directe à démontrer, est d'une grande utilité lorsqu'on doit montrer qu'une suite de Cauchy converge.

Propriété(s) 2.1.3. *Soit e_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de E qui est de Cauchy pour la norme $\|.\|$. Si cette suite admet une sous-suite convergente, alors elle converge vers la même limite que la sous-suite.*

1. Par exemple l'espace vectoriel des polynômes muni de la norme $P \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ n'est pas complet (cf le théorème de Weierstrass **??**). On peut aussi définir la notion de suite de Cauchy et de convergence pour un espace métrique (c'est-à-dire un ensemble sur lequel on a défini une distance) ; dans ce cas un ensemble non complet est par exemple l'ensemble des rationnels (car tout réel est limite d'une suite de rationnels), l'ensemble $]0,1[$ (la suite $1/m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ est de Cauchy mais ne converge pas vers un élément de $]0,1[$).

Preuve. Supposons que la sous-suite $e_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers e pour la norme $\|.\|$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\left\|e_{k(m)} - e\right\| \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq M.$$

Comme la suite e_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est de Cauchy, il existe aussi $M' \geq M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\|e_p - e_q\| \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall p, q \geq M'.$$

Ainsi, quel que soit $m \geq M'$, on a

$$\|e_m - e\| \ \leq \ \left\|e_m - e_{k(m)}\right\| + \left\|e_{k(m)} - e\right\| \ \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

puisque $k(m) \geq m \geq M'$ et $m \geq M' \geq M$. □

2.2 Espaces pré-hilbertiens, de Hilbert

Rappelons quelques définitions de base ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 2.2.1. *Soit H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que l'on désignera par $\mathbb{K}$. On appelle produit scalaire sur H une application*

$$< .,. > : \ H \times H \to \mathbb{K}$$

qui vérifie les propriétés suivantes. Quels que soient $h, g, e \in H$ et $c \in \mathbb{K}$, on a

$$(1) \ < h, h > \geq 0 \ \ et \ < h, h >= 0 \Leftrightarrow h = 0, \quad (2) \ < ch, g >= c < h, g >,$$

$$(3) \ < h + g, e >=< h, e > + < g, e >, \quad (4) \overline{< h, g >} =< g, h > .$$

Propriété(s) 2.2.2. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Quels que soient $g, h \in H$, on a

$$|< g, h >| \ \leq \ \sqrt{< g, g >}\sqrt{< h, h >}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si g et h sont linéairement dépendants.

Preuve. Pour tout complexe λ, on a (*)

$$0 \ \leq < h - \lambda g, h - \lambda g > = < h, h > -\lambda < g, h > -\overline{\lambda} < h, g > +|\lambda|^2 < g, g > .$$

Si $< g, g >\neq 0$, en prenant $\lambda =< h, g > / < g, g >$, on obtient (**)

$$0 \ \leq < h, h > -\frac{|< h, g >|^2}{< g, g >} - \frac{|< h, g >|^2}{< g, g >} + \frac{|< h, g >|^2}{< g, g >} \ = < h, h > -\frac{|< h, g >|^2}{< g, g >}$$

donc

$$|< g, h >| \ \leq \ \sqrt{< g, g >}\sqrt{< h, h >}.$$

Lorsque $< g, g >= 0$, on a $g = 0$ donc $< g, h >= 0$ et l'inégalité reste vraie.

Cela étant, si g et h sont linéairement dépendants, il est clair que l'égalité a lieu. Réciproquement, si l'égalité a lieu et si $g \neq 0$, alors, vu l'inégalité (**), on obtient

$$0 \ = < h - \lambda g, h - \lambda g >$$

avec $\lambda \ = < h, g > / < g, g >$ donc $h = \lambda g$. Si g est nul, g, h sont bien sûr linéairement dépendants.

Remarquons qu'en prenant $\lambda = r < h, g >$ avec r réel, l'inégalité (*) devient

$$0 \ \leq < h - \lambda g, h - \lambda g > = < h, h > -r| < g, h > |^2 - r| < h, g > |^2 + r^2| < h, g >< g, g >$$

et on peut aussi conclure en utilisant le fait que si le coefficient de r^2 n'est pas nul, alors le discriminant du trinôme est négatif. □

Grâce à cette inégalité, on va montrer que la loi $\|.\| : H \to [0, +\infty[\quad h \mapsto \sqrt{< h, h >}$ est une norme sur H. Un espace H muni d'un produit scalaire et de la norme associée est appelé *espace pré-hilbertien* et *hilbertien* (ou de Hilbert) si en outre toutes les suites de Cauchy (pour la norme) convergent.

Propriété(s) 2.2.3. *La loi*

$$\|.\| : H \to [0, +\infty[\quad h \mapsto \sqrt{< h, h >}$$

est une norme sur H.

Preuve. Vu la propriété (1) du produit scalaire, il est clair que cette application est bien définie et telle que $\|h\| = 0$ si et seulement si $h = 0$.

Cela étant, pour $h \in H$ et $c \in \mathbb{K}$, on a aussi directement

$$\|ch\| = \sqrt{< ch, ch >} = \sqrt{c\bar{c} < h, h >} = |c|\|h\|$$

en utilisant les propriétés (2) et (4) du produit scalaire.

Il reste donc à montrer l'inégalité triangulaire, à savoir

$$\sqrt{< h + g, h + g >} \ \leq \ \sqrt{< h, h >} + \sqrt{< g, g >} \quad \forall h, g \in H.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} < h + g, h + g > \ &= \ < h, h > + < g, g > + < h, g > + < g, h > \\ &= \ < h, h > + < g, g > +2\Re(< h, g >) \\ &\leq \ < h, h > + < g, g > +2| < h, g > | \\ &\leq \ < h, h > + < g, g > +2\sqrt{< h, h >}\sqrt{< g, g >} \quad \text{inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &= \ \left(\sqrt{< h, h >} + \sqrt{< g, g >}\right)^2 \end{aligned}$$

et on conclut. □

2.3 Les espaces $L^1(A)$, $L^2(A)$, $L^\infty(A)$

2.3.1 Rappels

La notion d'intégrabilité (cas mesure de Lebesgue) de fonctions est celle vue dans les cours d'analyse de Monsieur Nicolay de première année et deuxième année de bachelier. Les théorèmes énoncés (et démontrés pour certains) dans ces cours sont d'une importance primordiale pour le présent cours. Il faut seulement ajouter que, pour cette théorie de l'intégration, les fonctions n'ont pas besoin d'être définies partout : c'est la notion de ≪ presque partout ≫ qui prévaut.

Cela étant, on dit qu'une fonction définie presque partout est *mesurable* si elle est limite presque partout d'une suite de fonctions étagées. Toutes les fonctions continues sont mesurables, mais il y en a bien d'autres ! Pour alléger ce cours tout en ne diminuant pas son champ d'application, nous ferons ici l'hypothèse de travail que toutes les fonctions sont mesurables.

Cela étant, rappelons les résultats fondamentaux suivants.

Théorème 2.3.1. *(1) Soit f une fonction intégrable sur A. Alors*

$$\int_A |f(x)|\ dx \ = \ 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ pp sur } A$$

(2) (Lévi-convergence monotone) Soit f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de fonctions intégrables et à valeurs réelles pp sur A. Si
(a) on a $f_m \ \leq \ f_{m+1}$ (resp. $f_m \ \geq \ f_{m+1}$) pp sur A pour tout m
(b) si la suite

$$\int_A f_m(x)\ dx, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

est majorée (resp. minorée), alors il existe une fonction intégrable f sur A limite pp de la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ et qui est telle que

$$\lim_{m \to +\infty} \int_A |f_m(x) - f(x)|\ dx \ = \ 0$$

(3) (Lebesgue-convergence majorée) Soit f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de fonctions intégrables sur A. Si cette suite converge ponctuellement presque partout (on dit tout simplement converge presque partout) sur A vers une fonction f, s'il existe une fonction intégrable F telle que

$$|f_m| \ \leq \ F \quad \text{pp } \forall m$$

alors f est intégrable sur A et on a

$$\lim_{m \to +\infty} \int_A |f_m(x) - f(x)|\ dx \ = \ 0$$

(4) (Tonelli, cas $\mathbb{R}^n$) Soient $n', n" \in \mathbb{N}_0$ tels que $n = n' + n"$ et soit une fonction f mesurable sur $\mathbb{R}^n$. Si la fonction

$$x" \mapsto \left|f(x', x")\right|$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n"}$ pour presque tout x' et si la fonction

$$x' \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n"}} \left|f(x', x")\right|\ dx"$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$ alors la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

(5) (Fubini, cas $\mathbb{R}^n$) Soient $n', n" \in \mathbb{N}_0$ tels que $n = n' + n"$. Si une fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ alors pour presque tout x', la fonction

$$x" \mapsto f(x', x")$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n"}$, *la fonction*

$$x' \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n"}} f(x', x") \; dx"$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$ *et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \; dx \;\; = \;\; \int_{\mathbb{R}^{n'}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n"}} f(x', x") \; dx" \right) \; dx'.$$

De même (permutation de l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale) pour presque tout $x"$, *la fonction*

$$x' \mapsto f(x', x")$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n'}$, *la fonction*

$$x" \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x") \; dx'$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{n"}$ *et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \; dx \;\; = \;\; \int_{\mathbb{R}^{n"}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n'}} f(x', x") \; dx' \right) \; dx".$$

2.3.2 L'espace de Banach $L^\infty(A)$

Désignons par $\mathcal{L}^\infty(A)$ l'ensemble des fonctions bornées presque partout sur A c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f définies presque partout sur A pour lesquelles il existe $C > 0$ et un ensemble négligeable N tels que

$$|f(x)| \;\; \leq \;\; C, \;\; \forall x \in A \setminus N;$$

C est naturellement appelé ≪ majorant presque partout ≫.

On définit aussi la relation $\simeq$ suivante : $f \simeq g$ si f et g sont des fonctions égales presque partout sur A. Cette relation est une relation d'équivalence et l'espace quotient associé (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence) est noté $L^\infty(A)$. Dans cet ensemble, deux fonctions sont donc égales si elles sont égales presque partout (vu la définition de la relation d'équivalence).

Il est aussi immédiat de voir que $L^\infty(A)$ est un espace vectoriel (addition et produit par un complexe habituels).

On va aussi y définir une norme pour laquelle toute suite de Cauchy converge ; l'espace sera donc alors un espace de Banach.

Propriété(s) 2.3.2. *Si* f *est borné presque partout sur* A *alors la loi*

$$f \mapsto \inf\{r > 0 \;\; : \;\; |f(x)| \leq r \;\; pp \;\; sur \;\; A\}$$

est une norme sur $L^\infty(A)$. *On utilise les notations*

$$\|f\|_{L^\infty(A)} \;\; = \;\; \sup_{pp \;\; sur \;\; A} |f| \;\; = \;\; \inf\{r > 0 \;\; : \;\; |f(x)| \leq r \;\; pp \;\; sur \;\; A\}.$$

On a

$$|f| \;\; \leq \;\; \sup_{pp \;\; sur \;\; A} |f| = \|f\|_{L^\infty(A)} \quad pp \;\; surA.$$

Preuve. Comme f est borné presque partout sur A, l'ensemble $\{r > 0 \ : \ |f(x)| \leq r \text{ pp sur } A\}$ n'est pas vide et est évidemment minoré par 0. Sa borne inférieure existe donc et est un réel positif. C'est donc ≪ le plus petit des majorants pp ≫ de f sur A, ou encore la borne supérieure presque partout.

Cela étant, vu la définition des bornes inférieures, il existe une suite r_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de nombres strictement positifs et une suite N_m ($m \in \mathbb{N}_0$) d'ensembles négligeables tels que

$$\lim_{m \to +\infty} r_m = \|f\|_{L^\infty(A)} \quad \text{et} \quad |f(x)| \leq r_m \ \forall x \in A \setminus N_m, \ \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

L'ensemble $N = \cup_{m=1}^{+\infty} N_m$ est encore négligeable et on a

$$|f(x)| \leq r_m \ \forall x \in A \setminus N, \ \forall m \in \mathbb{N}_0$$

donc, en passant à la limite sur m,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(A)} \ \forall x \in A \setminus N.$$

Il reste à montrer que $f \mapsto \|f\|_{L^\infty(A)} \in [0, +\infty[$ est une norme sur $L^\infty(A)$. Cela s'effectue comme dans le cas des bornes supérieures classiques, notamment vu l'inégalité que l'on vient d'obtenir.

- Comme $\|f\|_{L^\infty(A)}$ est un majorant pp de f, il est clair que si ce majorant est nul, alors f est nul pp.
- Si f est nul pp, alors tout réel positif est majorant pp donc la borne inférieure de ceux-ci est nulle, c'est-à-dire $\|f\|_{L^\infty(A)} = 0$.
- Si $c \in \mathbb{C}_0$, alors quel que soit f borné pp sur A, on a

$$|cf(x)| \ \leq \ |c| \ \|f\|_{L^\infty(A)} \quad pp \text{ sur } A$$

donc

$$\|cf\|_{L^\infty(A)} \ \leq |c| \ \|f\|_{L^\infty(A)} \, ;$$

de même

$$|f(x)| \ = \ \frac{1}{|c|} \, |cf(x)| \ \leq \ \frac{1}{|c|} \ \|cf\|_{L^\infty(A)} \quad pp \text{ sur } A$$

donc

$$\|f\|_{L^\infty(A)} \ \leq \ \frac{1}{|c|} \ \|cf\|_{L^\infty(A)}$$

c'est-à-dire

$$|c| \ \|f\|_{L^\infty(A)} \ \leq \ \|cf\|_{L^\infty(A)} \, .$$

On a donc bien

$$|c| \ \|f\|_{L^\infty(A)} \ = \ \|cf\|_{L^\infty(A)} \, .$$

- Si f, g sont bornés pp sur A, alors $f + g$ l'est aussi vu

$$|f(x) + g(x)| \ \leq \ |f(x)| + |g(x)| \ \leq \ \|f\|_{L^\infty(A)} + \|g\|_{L^\infty(A)} \quad pp \text{ sur } A;$$

on en déduit aussi tout de suite que

$$\|f + g\|_{L^\infty(A)} \ \leq \ \|f\|_{L^\infty(A)} + \|g\|_{L^\infty(A)} \, .$$

□

Remarque 2.3.3. *Si f est défini et borné sur A alors f est borné presque partout sur A et on a*

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \ \leq \ \sup_A |f|.$$

Preuve. Rappelons que par définition

$$\sup_A |f| \ = \ \inf\{r > 0 \ : \ |f(x)| \leq r \ \forall x \in A\}.$$

Il est clair que si f est borné, alors f est aussi borné pp puisque l'ensemble vide est négligeable. Cela étant, comme on a

$$|f(x)| \ \leq \ \sup_A |f| \quad \forall x \in A$$

on a aussi cette majoration presque partout. Ainsi $\sup_A |f|$ est un majorant pp, donc est supérieur au « plus petit des majorants pp », c'est-à-dire

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \ \leq \ \sup_A |f|$$

□

Propriété(s) 2.3.4. *Supposons que f soit continu sur A et que A soit tel que*[2] *$A \cap b(x,r)$ ne soit pas négligeable quels que soient $r > 0$ et $x \in A$. Alors*

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \ = \ \sup_A |f|$$

Preuve. Vu la remarque précédente, il suffit de montrer que

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \ \geq \ \sup_A |f|.$$

Si ce n'est pas le cas, alors

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| < \sup_A |f| \ = \ \inf\{r > 0 \ : \ |f(x)| \leq r \ \forall x \in A\}$$

ce qui implique que $\sup_{pp\ sur\ A} |f|$ n'est pas un majorant partout de f sur A. Il existe donc $x \in A$ tel que

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \ < \ |f(x)|.$$

La continuité de f sur A donne alors l'existence de $r > 0$ tel que

$$\sup_{pp\ sur\ A} |f| \ < \ |f(y)| \quad \forall y \in A \cap b(x,r). \qquad (*)$$

Soit alors un ensemble négligeable N tel que

$$|f(t)| \ \leq \ \sup_{pp\ sur\ A} |f| \quad \forall t \in A \setminus N.$$

L'inégalité (*) donne donc

$$A \cap b(x,r) \subset N$$

ce qui est contradictoire puisque, par hypothèse, $A \cap b(x,r)$ n'est pas négligeable.□

2. Cela est vérifié lorsque A est ouvert, lorsque A est un pavé, ...

Théorème 2.3.5. *L'espace $L^\infty(A)$ est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_{L^\infty(A)}$.*

Preuve. Cela se démontre exactement comme pour la convergence uniforme, à la différence près que les bornes supérieures, les inégalités, doivent être prises presque partout chaque fois. Comme on travaille avec des suites et que toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, cela ne pose aucun problème pour que la preuve dans le cas de la convergence uniforme s'étende à ce cas-ci. □

2.3.3 L'espace de Banach $L^1(A)$

Désignons par $\mathcal{L}^1(A)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur A. Comme dans le cas des fonctions bornées presque partout, on reprend la relation $\simeq$ suivante : $f \simeq g$ si f et g sont des fonctions égales presque partout sur A. Cette relation est une relation d'équivalence et l'espace quotient associé (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence) est noté $L^1(A)$. Dans cet ensemble, deux fonctions sont donc égales si elles sont égales presque partout (vu la définition de la relation d'équivalence).

Il est également immédiat de voir que $L^1(A)$ est un espace vectoriel (addition et produit par un complexe habituels).

On va aussi y définir une norme pour laquelle toute suite de Cauchy converge ; l'espace sera donc alors un espace de Banach.

Propriété(s) 2.3.6. *La loi*

$$f \mapsto \int_A |f(x)|\ dx$$

est une norme sur $L^1(A)$. On utilise la notation

$$\|f\|_{L^1(A)} \;=\; \int_A |f(x)|\ dx.$$

Preuve. Vu les propriétés des intégrales, on a immédiatement, pour f, g intégrables et $c \in \mathbb{C}$,

$$\|f+g\|_{L^1(A)} \;\leq\; \|f\|_{L^1(A)} + \|g\|_{L^1(A)} \quad \text{et} \quad \|cf\|_{L^1(A)} \;=\; |c|\ \|f\|_{L^1(A)}\,.$$

De plus on a vu que

$$\int_A |f(x)|\ dx \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0\ pp$$

donc on a bien affaire à une norme. □

Théorème 2.3.7. *L'espace $L^1(A)$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_{L^1(A)}$.*

De plus, de toute suite qui converge pour la norme $\|.\|_{L^1(A)}$ vers une fonction f on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout (c'est-à-dire qu'en dehors d'un ensemble négligeable, on a la convergence ponctuelle) vers f.

Preuve. Nous utilisons ici le résultat qui affirme que si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, alors la suite converge (vers la même limite que la sous-suite).

Pour alléger les notations, la norme $\|.\|_{L^1(A)}$ sera simplement notée $\|.\|$.

Soit donc une suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de Cauchy pour $\|.\|$.

Tout d'abord, nous allons faire ce que l'on appelle une « extraction à la Cauchy » en exploitant le fait que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N}_0 \;:\; \|f_p - f_q\| \;\leq\; \varepsilon\ \forall p, q \geq M.$$

On a $2^{-1} > 0$ donc il existe $M_1 \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\|f_p - f_q\| \;\leq\; 2^{-1}\ \forall p, q \geq M_1.$$

Comme $2^{-2} > 0$, il existe ensuite $M_2 > M_1$ tel que

$$\|f_p - f_q\| \;\leq\; 2^{-2}\ \forall p, q \geq M_2.$$

On a donc obtenu

$$\|f_{M_1} - f_{M_2}\| \;\leq\; 2^{-1}.$$

Continuons : comme $2^{-3} > 0$, il existe $M_3 > M_2$ tel que

$$\|f_p - f_q\| \;\leq\; 2^{-3}\ \forall p, q \geq M_3.$$

On a donc obtenu

$$\|f_{M_2} - f_{M_3}\| \;\leq\; 2^{-2}.$$

Et ainsi de suite. En posant $k(m) = M_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a donc une sous-suite de naturels qui vérifie

$$\|f_{k(m)} - f_{k(m+1)}\| \;\leq\; 2^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Montrons alors que la sous-suite $f_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers une fonction intégrable f pour la norme $\|.\|$. La clef est un retour aux séries, une utilisation du théorème de Levi puis du théorème de Lebesgue.

Considérons la suite de sommes partielles F_M $(M \in \mathbb{N}_0)$ définie par

$$F_M(x) \;=\; \sum_{m=1}^{M} \left| f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x) \right|.$$

Il s'agit d'une suite de fonctions intégrables sur A, évidemment croissante vu sa forme et qui est telle que, quel que soit $M \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
\int_A F_M(x)\, dx &= \sum_{m=1}^{M} \int_A \left| f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x) \right|\, dx \\
&= \sum_{m=1}^{M} \|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}\| \\
&\leq \sum_{m=1}^{M} 2^{-m} \;\leq 1.
\end{aligned}$$

Le théorème de Levi dit alors notamment que cette suite F_M $(M \in \mathbb{N}_0)$ converge presque partout vers une fonction intégrable, notée F par exemple. Mais on sait que si une série (numérique) est absolument convergente, elle est aussi convergente ; il s'ensuit que la suite

$$\sum_{m=1}^{M} \left(f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x) \right), \quad M \in \mathbb{N}_0$$

est aussi convergente pour presque tout x. Comme on a, pour tout M,

$$\sum_{m=1}^{M} \left(f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x) \right) \;=\; f_{k(M+1)}(x) - f_{k(1)}(x)$$

on a obtenu que la suite $f_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge presque partout. Notons f cette limite. Pour conclure, il reste à montrer que la convergence a lieu pour la norme $\|.\|$.

Ici c'est le théorème de Lebesgue qui va être utilisé, pour la suite $f_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$). On a bien une suite de fonctions intégrables qui converge presque partout (vers f) ; de plus, quel que soit $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned} |f_{k(m)}| &= |f_{k(m)} - f_{k(m-1)} + f_{k(m-1)} - \ldots + f_{k(1)}| \\ &\leq |f_{k(1)}| + \sum_{j=1}^{m-1} |f_{k(j+1)} - f_{k(j)}| \\ &\leq |f_{k(1)}| + F \end{aligned}$$

On peut donc conclure que toute suite de Cauchy converge.

Dans ce qui précède, on a extrait une sous-suite qui converge presque partout à partir d'une suite de Cauchy (pour la norme). Une suite qui converge pour la norme étant de Cauchy pour la norme, la seconde partie de l'énoncé est donc justifiée également. □

Remarque 2.3.8. *Dans ce précède, on ne peut pas améliorer le résultat concernant la convergence ponctuelle : il s'agit bien de l'existence d'une* sous-souite *qui converge* presque partout*.*

De fait, par exemple, la suite $f_m = \chi_{I_m}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) avec $I_m =]l2^{-k}, (l+1)2^{-k}]$ où $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ converge vers 0 dans $L^1(\mathbb{R})$ mais ne converge en aucun point de $]0,1]$; par contre la sous-suite $\chi_{]0,2^{-k}]}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) converge vers 0 ponctuellement sur $\mathbb{R}$.

2.3.4 L'espace de Hilbert $L^2(A)$

Désignons par $\mathcal{L}^2(A)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur A. Comme dans les cas précédents, on reprend la relation $\simeq$ suivante : $f \simeq g$ si f et g sont des fonctions égales presque partout sur A. Cette relation est une relation d'équivalence et l'espace quotient associé (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence) est noté $L^2(A)$. Dans cet ensemble, deux fonctions sont donc égales si elles sont égales presque partout (vu la définition de la relation d'équivalence).

Il est direct de voir que $L^2(A)$ est un espace vectoriel (addition et produit par un complexe habituels) : pour les multiples complexes, c'est évident et pour l'addition, il suffit de noter que, puisque $0 \leq (|z| - |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2|zz'|$ pour tous complexes z, z',

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^2 &\leq |f(x)|^2 + 2|f(x)g(x)| + |g(x)|^2 \\ &\leq |f(x)|^2 + |f(x)|^2 + |g(x)|^2 + |g(x)|^2 \\ &= 2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2 \end{aligned}$$

avec $2|f|^2 + 2|g|^2$ intégrable.

On va aussi y définir une norme pour laquelle toute suite de Cauchy converge ; cette norme sera définie à partir d'un produit scalaire donc l'espace sera alors un espace de Hilbert.

Propriété(s) 2.3.9. *La loi*

$$f, g \mapsto < f, g > = \int_A f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

est un produit scalaire sur $L^2(A)$.

Dès lors la loi

$$f \mapsto \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\int_A |f(x)|^2 \, dx}$$

est une norme sur $L^2(A)$. On utilise la notation

$$\|f\|_{L^2(A)} \;=\; \sqrt{\int_A |f(x)|^2 \, dx}.$$

Preuve. Notons tout d'abord une fois de plus que puisqu'on a

$$0 \leq (|z| - |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2|zz'|$$

pour tous complexes z, z', on obtient

$$\left|f(x)\overline{g(x)}\right| \;\leq\; \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right) \quad \text{pour presque tout } x,$$

ce qui assure que la fonction que l'on intègre dans la définition du produit scalaire est bien intégrable lorsque f et g sont de carré intégrable.

Les autres propriétés à satisfaire pour être un produit scalaire (cf la section 2.2) sont immédiates à vérifier étant donné les propriétés du calcul intégral. □

Théorème 2.3.10. *L'espace $L^2(A)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{L^2(A)}$.*

Preuve. Cette preuve est une adaptation du cas L^1. Pour alléger les notations, la norme $\|.\|_{L^2(A)}$ sera ici aussi simplement notée $\|.\|$.

Soit donc une suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de Cauchy pour $\|.\|$.

Tout d'abord, une « extraction à la Cauchy » est encore de mise ; c'est la même chose que dans le cas L^1 puisqu'on n'utilise que la notion de norme. On a une sous-suite $k(m)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) telle que

$$\|f_{k(m)} - f_{k(m+1)}\| \;\leq\; 2^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Montrons alors aussi que la sous-suite $f_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge pour la norme $\|.\|$ vers une fonction de carré intégrable f. Considérons la suite de sommes partielles G_M ($M \in \mathbb{N}_0$) définie par

$$G_M(x) \;=\; \left(\sum_{m=1}^{M} \left|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right|\right)^2.$$

Il s'agit d'une suite de fonctions intégrables sur A, évidemment croissante vu sa forme et qui est telle que, quel que soit $M \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
\int_A G_M(x)\, dx \;&=\; \int_A \left(\sum_{m=1}^{M} \left|f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x)\right|\right)^2 dx \\
&=\; \left\|\sum_{m=1}^{M} \left|f_{k(m+1)} - f_{k(m)}\right|\right\|^2 \\
&\leq\; \left(\sum_{m=1}^{M} \left\|f_{k(m+1)} - f_{k(m)}\right\|\right)^2 \\
&\leq\; \left(\sum_{m=1}^{M} 2^{-m}\right)^2 \;\leq 1.
\end{aligned}$$

Le théorème de Levi dit alors notamment que cette suite G_M ($M \in \mathbb{N}_0$) converge presque partout vers une fonction intégrable, que l'on va noter G. Bien sûr la suite des racines carrées des G_M converge aussi presque partout. Et on reprend comme dans le cas L^1 : on sait que si une série (numérique) est absolument convergente, elle est aussi convergente ; il s'ensuit que la suite

$$\sum_{m=1}^{M} \left(f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x) \right), \quad M \in \mathbb{N}_0$$

est aussi convergente pour presque tout x. Comme on a, pour tout M,

$$\sum_{m=1}^{M} \left(f_{k(m+1)}(x) - f_{k(m)}(x) \right) \;=\; f_{k(M+1)}(x) - f_{k(1)}(x)$$

on a obtenu que la suite $f_{k(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge presque partout. Notons f cette limite. Pour conclure, il reste à montrer que la convergence a lieu pour la norme $\|.\|$.

Ici c'est le théorème de Lebesgue qui va être utilisé. Pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, considérons la suite $|f_{k(m)} - f_{k(p)}|^2$ ($m \in \mathbb{N}_0$). C'est une suite de fonctions intégrables qui converge presque partout (vers $|f - f_{k(p)}|^2$) ; de plus, quel que soit $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $m > p$, on a

$$\begin{aligned}
\left|f_{k(m)} - f_{k(p)}\right|^2 &= \left|f_{k(m)} - f_{k(m-1)} + f_{k(m-1)} - \ldots + f_{k(p+1)} - f_{k(p)}\right|^2 \\
&\leq \left(\sum_{j=p}^{m-1} \left|f_{k(j+1)} - f_{k(j)}\right| \right)^2 \\
&\leq G_{m-1} \\
&\leq G
\end{aligned}$$

avec G intégrable. Le théorème de Lebesgue donne donc l'intégrabilité de la fonction $|f - f_{k(p)}|^2$ et

$$\lim_{m \to +\infty} \int_A \left|f_{k(m)}(x) - f_{k(p)}(x)\right|^2 \, dx \;=\; \int_A \left|f(x) - f_{k(p)}(x)\right|^2 \, dx$$

c'est-à-dire

$$\lim_{m \to +\infty} \left\|f_{k(m)} - f_{k(p)}\right\|^2 \;=\; \left\|f - f_{k(p)}\right\|^2 .$$

On obtient aussi que f appartient à l'espace $L^2(A)$ car cet espace est un espace vectoriel et que, quel que soit p, on a $f = f - f_{k(p)} + f_{k(p)}$ avec $f - f_{k(p)}$ et $f_{k(p)}$ qui sont des fonctions de celui-ci. On obtient alors aussi facilement la convergence annoncée. De fait, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe M tel que

$$\|f_r - f_s\| \;\leq \varepsilon \quad \forall r, s \geq M$$

donc aussi

$$\left\|f_{k(m)} - f_{k(p)}\right\| \;\leq \varepsilon \quad \forall m, p \geq M;$$

un passage à la limite sur m donne alors (vu ce qui précède)

$$\left\|f - f_{k(p)}\right\| \;\leq \varepsilon \quad \forall p \geq M$$

et on conclut. □

2.3.5 Le théorème d'approximation

Rappelons ici deux résultats qui se démontrent en utilisant des théorèmes relatifs au calcul intégral (notamment le théorème de Fubini). Nous renvoyons au syllabus de J. Schmets pour leur démonstration ainsi qu'une explication montrant qu'on ne peut avoir le même résultat dans $L^\infty(\Omega)$.

Théorème 2.3.11. *(1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $f \in L^1(\Omega)$ (resp. $f \in L^2(\Omega)$), et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée α* **dans**[3] *Ω telle que*

$$\|f-\alpha\|_{L^1(\Omega)} \;\leq\; \varepsilon \quad \left(\textit{resp.}\quad \|f-\alpha\|_{L^2(\Omega)} \;\leq\; \varepsilon\right).$$

(2) Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$), on a

$$\lim_{h\to 0} \|f(.) - f(.+h)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;=\; 0 \quad \left(\textit{resp.}\quad \lim_{h\to 0} \|f(.) - f(.+h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \;=\; 0\right).$$

Dans la suite de ce cours, nous établirons une version « régulière » de ce résultat, après avoir défini et étudié la notion de produit de composition de fonctions.

3. Une fonction étagée dans Ω est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de pavés dont l'adhérence est incluse dans l'ouvert Ω.

Chapitre 3

Produit de composition

3.1 Définition et premières propriétés ; interprétation

Nous présentons ici l'essentiel et pour aller droit au but et appréhender cet outil le plus rapidement possible, on se limite aux fonctions d'une variable réelle. Pour davantage de propriétés et des compléments (notamment le cas des fonctions de plusieurs variables), voir le pdf formé d'extraits de syllabus de Jean Schmets, disponible directement via les pages web relatives au cours.

Définition 3.1.1. *Soient f et g deux fonctions définies presque partout sur $\mathbb{R}$; si $y \in \mathbb{R}$ et si la fonction $x \mapsto f(x)\, g(y-x)$ est intégrable, son intégrale est notée*

$$(f * g)(y) \ = \ \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(y-x)\ dx.$$

Lorsque la fonction $x \mapsto f(x)\, g(y-x)$ est intégrable pour presque tout y, le produit de convolution (ou de composition) de f et g est la fonction

$$y \mapsto (f * g)(y).$$

Propriété(s) 3.1.2. *Le produit de composition est commutatif et linéaire sur chacun des facteurs.*

Preuve. C'est immédiat par changement de variable (linéaire) : on a

$$(f * g)(y) \ = \ \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(y-x)\ dx \ = \ \int_{\mathbb{R}} f(y-t)\, g(t)\ dt \ = \ (g * f)(y).$$

La linéarité est immédiate étant donné la linéarité de l'intégrale. □

Interprétation 3.1.3. Voir cours et aussi le descriptif par exemple à l'adresse

https ://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_de_convolution

3.2 Quelques exemples

Voir quelques calculs explicites (cours).

3.3 Conditions suffisantes d'existence et propriétés

Sont présentées ici des conditions sous lesquelles le produit de composition existe et les propriétés générales de cette fonction. Il faut bien noter qu'en aucun cas il ne s'agit de conditions nécessaires !

3.3.1 Cas $1, 2, \infty$

Les notations p, q, r désignent soit $1, 2$ soit l'infini et on utilise la convention $1/\infty = 0$. La relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ = \ 1 + \frac{1}{r}$$

n'a lieu que pour (1) $p = q = r = 1$, (2) $p = 1$ et $q = r = 2$, (3) $p = 1$ et $q = r = \infty$, (4) $p = q = 2$ et $r = \infty$ et bien sûr aussi en permutant les rôles de p et q. Cependant, vu la commutativité du produit de composition, il ne sera pas nécessaire de les traiter.

Cela étant, lorsque

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ = \ 1 + \frac{1}{r}$$

on a le résultat suivant.

Théorème 3.3.1. *Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$. Alors*

1. *$(f * g)(y)$ existe pour presque tout y si $r \neq \infty$ et pour tout y si $r = \infty$*
2. *$f * g \in L^r(\mathbb{R})$*
3. *$\|f * g\|_r \ \leq \ \|f\|_p \, \|g\|_q$.*

   Cette inégalité implique que si f_m $(m \in \mathbb{N})$ est une suite d'éléments de $L^p(\mathbb{R})$ qui converge dans L^p vers f et si g_m $(m \in \mathbb{N})$ est une suite d'éléments de $L^q(\mathbb{R})$ qui converge dans L^q vers g, alors la suite $f_m * g_m$ $(m \in \mathbb{N})$ converge dans L^r vers $f * g$.

Preuve. Etablissons la conséquence de la troisième propriété. On a successivement

$$\begin{aligned} \|f_m * g_m - f * g\|_r &= \|f_m * g_m - f_m * g + f_m * g - f * g\|_r \\ &= \|f_m * (g_m - g) + (f_m - f) * g\|_r \\ &\leq \|f_m * (g_m - g)\|_r \ + \ \|(f_m - f) * g\|_r \\ &\leq \|f_m\|_p \, \|g_m - g\|_q \ + \ \|f_m - f\|_p \, \|g\|_q \, . \end{aligned}$$

La convergence dans L^p de la suite f_m $(m \in \mathbb{N})$ et dans L^q de la suite g_m $(m \in \mathbb{N})$ donne tout de suite le résultat annoncé.

Etudions le cas $\boxed{L^1 * L^1}$. On doit d'abord se poser la question de savoir si la fonction

$$x \mapsto f(y - x) \ g(x)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour presque tout y. Clairement, cela ne s'obtient pas directement car si f et g sont bien intégrables, on ne peut rien dire de leur produit ! Mais tout va se démontrer directement par le théorème de Tonelli-Fubini.

De fait, considérons la fonction de deux variables

$$F \ : \ (x, y) \mapsto |f(y - x) \, g(x)|.$$

Pour presque tout x, la fonction $y \mapsto |f(y - x) \, g(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque f l'est. Ensuite, la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(y - x) \, g(x)| \ dy \ = \ |g(x)l \ \int_{\mathbb{R}} |f(y - x)| \ dy \ = \ |g(x)| \ \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \ dt$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque g l'est. Il s'ensuit que la fonction

$$(x,y) \mapsto f(y-x)\,g(x)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et que l'on peut notamment permuter les intégrales sans changer la valeur de l'intégrale double. On obtient donc que $x \mapsto f(y-x)\ g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour presque tout y et que $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y-x)\ g(x)\ dx = (f*g)(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Enfin, on a successivement

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |(f*g)(y)|\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} f(y-x)\,g(x)\ dx\right|\ dy \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y-x)\,g(x)|\ dx\right) dy \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} |f(y-x)\,g(x)|\ dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y-x)|\ dy\right)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\ dt\right)\ dx \\
&= \|g\|_1\ \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Etudions ensuite le cas $\boxed{L^1 * L^2}$. Ici encore, on doit d'abord se poser la question de savoir si la fonction

$$x \mapsto f(y-x)\ g(x)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour presque tout y. Et encore une fois ce n'est pas immédiat car il s'agit d'une fonction qui est le produit d'une fonction intégrable et d'une fonction de carré intégrable et on ne peut donc rien conclure directement quant à son intégrabilité. Ecrivons alors le module de ce produit d'une autre manière : comme on a

$$|f(y-x)\ g(x)| = \sqrt{|f(y-x)|}\ \sqrt{|f(y-x)|}\,|g(x)|,$$

on voit que la fonction (de x) dont on veut prouver l'intégrabiité pour presque tout y s'écrit comme le produit des fonctions

$$x \mapsto \sqrt{|f(y-x)|} \quad \text{et} \quad x \mapsto \sqrt{|f(y-x)|}\,|g(x)|.$$

La première fonction est bien sûr de carré intégrable pour tout y puisque f est intégrable ; quant à la seconde, elle est également de carré intégrable pour presque tout y car

$$x \mapsto |f(y-x)|\,|g^2(x)|$$

est intégrable pour presque tout y étant donné le fait que $f, g^2 \in L^1(\mathbb{R})$ et le cas $L^1 * L^1$. Ainsi,

$$x \mapsto |f(y-x)\ g(x)|$$

peut s'écrire comme le produit de deux fonctions de carré intégrable et est donc intégrable.

Il reste alors à montrer que le produit de composition est de carré intégrable et que l'on a la majoration annoncée pour la norme. En écrivant la fonction à intégrer comme précédemment et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a successivement

$$\begin{aligned}
|(f*g)(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(y-x)\,g(x)\ dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \sqrt{|f(y-x)|}\ \sqrt{|f(y-x)|}\,|g(x)|\ dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{|f(y-x)|}\right)^2\ dx\right)^{1/2}\ \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{|f(y-x)|}\right)^2\ |g(x)|^2\ dx\right)^{1/2} \\
&= \|f\|_1^{1/2}\ \left((|f|*|g^2|)(y)\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

donc

$$|(f*g)(y)|^2\ \leq\ \|f\|_1\ (|f|*|g^2|)(y)$$

avec $y \mapsto (|f|*|g^2|)(y)$ intégrable ; dès lors on a bien obtenu $f*g \in L^2(\mathbb{R})$. La majoration des normes est alors immédiate

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |(f*g)(y)|^2\ dy \\
&\leq \|f\|_1\ \int_{\mathbb{R}} (|f|*|g^2|)(y)\ dy \\
&= \|f\|_1\ \big\||f|*|g^2|\big\|_1 \\
&\leq \|f\|_1\ \|f\|_1\ \|g^2\|_1 \\
&= \|f\|_1^2\ \|g\|_2^2
\end{aligned}$$

et on termine donc le cas $L^1 * L^2$.

Passons au cas $\boxed{L^1 * L^\infty}$. Ici, lorsque f est intégrable et g borné (pp), il est clair que pour tout y, la fonction

$$x \mapsto f(y-x)\,g(x)$$

est intégrable puisque de module majoré par $\|g\|_\infty\,|f(y-x)|$.

Cela étant, l'appartenance du produit de composition à $L^\infty(\mathbb{R})$ et la majoration de la norme sont immédiates. De fait pour tout y, on a

$$|(f*g)(y)|\ =\ \left|\int_{\mathbb{R}} f(y-x)\,g(x)\ dx\right|\ \leq\ \|g\|_\infty\ \int_{\mathbb{R}} |f(y-x)|\,dx\ =\ \|g\|_\infty\ \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt\ =\ \|g\|_\infty\ \|f\|_1.$$

Pour terminer considérons le cas $\boxed{L^2 * L^2}$. Ici, l'existence du produit de composition pour tout y est claire aussi car la fonction

$$x \mapsto f(y-x)\,g(x)$$

est le produit de deux fonctions de carré intégrable, donc est intégrable.

L'appartenance du produit de composition à $L^\infty(\mathbb{R})$ et la majoration de la norme sont immédiates également par utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout y, on a

$$|(f*g)(y)|\ \leq\ \int_{\mathbb{R}} |f(y-x)|\,|g(x)|\ dx\ \leq\ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y-x)|^2\ dx\right)^{1/2}\ \|g\|_2\ =\ \|f\|_2\,\|g\|_2$$

donc $f * g$ est borné partout et

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |(f * g)(y)| \ \leq \ \|f\|_2 \, \|g\|_2.$$

□

Lorsque $r = \infty$, on a davantage de résultats.

Théorème 3.3.2. *1. Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ alors la fonction $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 à l'infini.*

2. $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ alors la fonction $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 à l'infini pour autant qu'il en soit de même pour g.

Preuve. (1) Considérons tout d'abord le cas $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

D'une part la continuité uniforme résulte d'une simple utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du théorème d'approximation. De fait, on a successivement

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f*g)(x+h) - (f*g)(x)| \ &= \ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+h-y)\, g(y)\ dy \ - \ \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\ dy \right| \\
&= \ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x+h-y) - f(x-y))\ g(y)\ dy \right| \\
&\leq \ \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+h-.) - f(x-.)\|_2 \ \ \|g\|_2 \\
&= \ \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(.+h) - f(.)\|_2 \ \ \|g\|_2 \\
&= \ \|f(.+h) - f(.)\|_2 \ \ \|g\|_2
\end{aligned}$$

et on conclut par le théorème d'approximation dans $L^2(\mathbb{R})$.

Montrons à présent que

$$\lim_{x\to\infty} (f*g)(x) \ = \ 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $R > 0$, on a

$$(f*g)(x) \ = \ \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\ dy \ = \ \int_{|y|\leq R} f(x-y)\, g(y)\ dy \ + \ \int_{|y|>R} f(x-y)\, g(y)\ dy.$$

Examinons le second terme du membre de gauche. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|y|>R} f(x-y)\, g(y)\ dy \right| \ &\leq \ \left(\int_{|y|>R} |f(x-y)|^2\ dy \right)^{1/2} \left(\int_{|y|>R} |g(y)|^2\ dy \right)^{1/2} \\
&\leq \ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2\ dy \right)^{1/2} \left(\int_{|y|>R} |g(y)|^2\ dy \right)^{1/2} \\
&= \ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\ dt \right)^{1/2} \left(\int_{|y|>R} |g(y)|^2\ dy \right)^{1/2} \\
&= \ \|f\|_2 \left(\int_{|y|>R} |g(y)|^2\ dy \right)^{1/2};
\end{aligned}$$

comme g^2 est intégrable, on a

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{|y|>R}|g(y)|^2\ dy\right)^{1/2} = 0$$

donc il existe $R_0>0$ tel que

$$\|f\|_2\ \left(\int_{|y|>R_0}|g(y)|^2\ dy\right)^{1/2} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Examinons alors

$$\int_{|y|\le R_0} f(x-y)\,g(y)\ dy.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz encore, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|y|\le R_0} f(x-y)\,g(y)\ dy\right| &\le \left(\int_{|y|\le R_0}|f(x-y)|^2\ dy\right)^{1/2}\left(\int_{|y|\le R_0}|g(y)|^2\ dy\right)^{1/2}\\
&\le \|g\|_2\ \left(\int_{|y|\le R_0}|f(x-y)|^2\ dy\right)^{1/2}\\
&= \|g\|_2\ \left(\int_{|x-t|\le R_0}|f(t)|^2\ dt\right)^{1/2}\\
&= \|g\|_2\ \left(\int_{x-R_0}^{x+R_0}|f(t)|^2\ dt\right)^{1/2};
\end{aligned}$$

comme f^2 est intégrable, on a

$$\lim_{x\to\infty}\left(\int_{x-R_0}^{x+R_0}|f(t)|^2\ dt\right)^{1/2} = 0$$

donc il existe $N>0$ tel que

$$\|g\|_2\ \left(\int_{x-R_0}^{x+R_0}|f(t)|^2\ dt\right)^{1/2} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout x tel que $|x|\ge N$.

Dès lors, on a

$$|(f*g)(x)| \le \left|\int_{|y|\le R_0} f(x-y)|\,g(y)\ dy\right| + \left|\int_{|y|>R_0} f(x-y)\,g(y)\ dy\right| \le \varepsilon$$

pur tout x tel que $|x|\ge N$ et on conclut.

(2) Examinons alors le cas $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $g\in L^\infty(\mathbb{R})$.

La continuité uniforme s'obtient de manière tout à fait analogue au cas précédent, en adaptant bien sûr les estimations utilisant les propriétés de f et g. On a successivement

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |(f*g)(x+h)-(f*g)(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+h-y)\,g(y)\;dy \;-\; \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\;dy \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x+h-y)-f(x-y))\;g(y)\;dy \right| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+h-.)-f(x-.)\|_1\;\;\|g\|_\infty \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(.+h)-f(.)\|_1\;\;\|g\|_\infty \\
&= \|f(.+h)-f(.)\|_1\;\;\|g\|_\infty
\end{aligned}$$

et on conclut par le théorème d'approximation dans $L^1(\mathbb{R})$.

Montrons à présent que

$$\lim_{x\to\infty} (f*g)(x) \;=\; 0$$

lorsqu'en outre $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$. La preuve est une adaptation de celle du cas $L^2 * L^2$.

Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $R>0$, on a

$$(f*g)(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\;dy \;=\; \int_{|y|\leq R} f(x-y)\,g(y)\;dy \;+\; \int_{|y|>R} f(x-y)\,g(y)\;dy.$$

Examinons le second terme du membre de gauche. On a

$$\left| \int_{|y|>R} f(x-y)\,g(y)\;dy \right| \;\leq\; \sup_{|y|>R} |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\;dy \;=\; \|f\|_1 \sup_{|y|>R} |g(y)|.$$

Dès lors, comme g tend vers 0 à l'infini, il existe $R_0>0$ tel que

$$\|f\|_1 \sup_{|y|>R_0} |g(y)| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

Examinons alors

$$\int_{|y|\leq R_0} f(x-y)\,g(y)\;dy.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|y|\leq R_0} f(x-y)\,g(y)\;dy \right| &\leq \|g\|_\infty \int_{|y|\leq R_0} |f(x-y)|\;dy \\
&= \|g\|_\infty \int_{|x-t|\leq R_0} |f(t)|\;dt \\
&= \|g\|_\infty \int_{x-R_0}^{x+R_0} |f(t)|\;dt.
\end{aligned}$$

Puisque la fonction f est intégrable, le membre de droite tend vers 0 si x tend vers l'infini.

Finalement, comme dans le cas précédent, il existe $N>0$ tel que

$$|(f*g)(x)| \;\leq\; \left| \int_{|y|\leq R_0} f(x-y)\,g(y)\;dy \right| + \left| \int_{|y|>R_0} f(x-y)\,g(y)\;dy \right| \;\leq\; \varepsilon$$

pour tout x tel que $|x|\geq N$ et on conclut. □

3.3.2 Généralisation

Le théorème précédent reste valable pour $p, q, r \in [1, +\infty[\cup\{\infty\}$ tels que $1/p+1/q = 1+1/r$ (avec convention $1/\infty = 0$), voir le chapitre 4.

3.4 Unités approchées de composition

Considérons tout d'abord le cas des fonctions intégrables ou de carré intégrable.

Définition 3.4.1. *Une suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est appelée unité approchée de composition dans $L^1(\mathbb{R})$ (resp. dans $L^2(\mathbb{R})$) lorsque l'on a*

$$\lim_{m\to+\infty} f_m * f \;=\; f \quad \textit{dans} \quad L^1(\mathbb{R}) \quad (\textit{resp. dans } L^2(\mathbb{R}))$$

quelle que soit la fonction f de $L^1(\mathbb{R})$ (resp. de $L^2(\mathbb{R})$).

Etant donné que l'on a $L^1 * L^1 \subset L^1$ et $L^1 * L^2 \subset L^2$, les produits de composition et les convergences qui interviennent dans la définition ont bien un sens.

Rappelons aussi que ces convergences concernent les normes naturelles définies sur les espaces $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$; elles signifient donc, respectivement

$$\lim_{m\to+\infty} \|f_m * f - f\|_1 \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \lim_{m\to+\infty} \|f_m * f - f\|_2 \;=\; 0$$

selon que $f \in L^1(\mathbb{R})$ ou $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Ces « unités approchées » sont définies pour pallier la non existence [1]d'une « vraie unité », à savoir d'une fonction intégrable δ qui serait telle que $\delta * f = f$ pour toute fonction intégrable (resp. de carré intégrable) f. En fait, une telle unité existe bel et bien, mais dans le cadre des distributions (distribution de Dirac !) On va voir plus comment construire de telles unités approchées et ces exemples illustreront bien le « phénomène Dirac ».

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes sur une suite de fonctions intégrables pour qu'elle soit effectivement une unité approchée de composition.

Proposition 3.4.2. *Soit une suite de fonctions f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ telle que*
- $f_m \in L^1(\mathbb{R})$*,* $f_m \geq 0$ *et* $\|f_m\|_1 = 1$ *pour tout* m
- *pour tout $R > 0$, on a*

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{|x|>R} f_m(x)\; dx \;=\; 0.$$

Alors cette suite constitue une unité approchée de composition dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve. Considérons tout d'abord le cas des fonctions intégrables et prenons donc $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Si une telle fonction existait, alors on aurait $\delta * \chi_{[a,b]} = \chi_{[a,b]}$ pp donc aussi, par continuité, en tout réel différent de a, b donc aussi en a, b étant donné que l'image de fonction caractéristique est $\{0, 1\}$. Ceci est absurde car $\delta * \chi_[a, b]$ est continu et pasla fonction caractéristique

On a successivement

$$\begin{aligned}
\|f_m * f - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |(f_m * f)(y) - f(y)| \ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\, f(y-x)\ dx \ - \ f(y) \right| \ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\, f(y-x)\ dx) \ - \ \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\, f(y)\ dx \right| \ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ (f(y-x) - f(y))\ dx \right| \ dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ |f(y-x) - f(y)|\ dx \right) dy.
\end{aligned}$$

Cela étant, comme la fonction de deux variables $(x, y) \mapsto f_m(x)\ |f(y-x) - f(y)|$ est intégrable, on peut permuter l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale et on obtient ainsi

$$\|f_m * f - f\|_1 \ \leq \ \int_{\mathbb{R}} f_m(x) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y-x) - f(y)| \ dy \right) dx \ = \ \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ \|f(.-x) - f(.)\|_1\, dx.$$

On va alors utiliser la seconde hypothèse sur la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) en faisant appel tout d'abord au théorème d'approximation. Si $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que

$$\|f(.-x) - f(.)\|_1 \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \text{ tel que } |x| \leq R.$$

Dès lors

$$\begin{aligned}
\|f_m * f - f\|_1 &\leq \int_{|x|>R} f_m(x)\ \|f(.-x) - f(.)\|_1\, dx \ + \ \int_{|x|\leq R} f_m(x)\ \|f(.-x) - f(.)\|_1 \ dx \\
&\leq 2\,\|f\|_1 \int_{|x|>R} f_m(x)\ dx \ + \ \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x|\leq R} f_m(x)\ dx \\
&\leq 2\,\|f\|_1 \int_{|x|>R} f_m(x)\ dx \ + \ \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

L'utilisation de la seconde hypothèse sur la suite f_m fournit ainsi M tel que le premier terme du second membre soit inférieur à $\varepsilon/2$ quel que soit $m \geq M$ donc finalement

$$\|f_m * f - f\|_1 \ \leq \ \varepsilon \quad \forall m \geq M$$

et on conclut.

Passons au cas des fonctions de carré intégrable et prenons donc $f \in L^2(\mathbb{R})$. Le même développement que dans le cas précédent mais en utilisant bien sûr la norme L^2 donne

$$\begin{aligned}
\|f_m * f - f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |(f_m * f)(y) - f(y)|^2 \ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ (f(y-x) - f(y))\ dx \right|^2 \ dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ |f(y-x) - f(y)|\ dx \right)^2 dy.
\end{aligned}$$

Cela étant, on a

$$f_m(x)\ |f(y-x) - f(y)| \ = \ \sqrt{f_m(x)}\ \sqrt{f_m(x)}\,|f(y-x) - f(y)|$$

avec $\sqrt{f_m}$ de carré intégrable et $x \mapsto \sqrt{f_m(x)}\,|f(y-x)-f(y)|$ également de carré intégrable car par exemple

$$f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)|^2\ \leq\ 2\,f_m(x)\ \left(|f(y-x)|^2+|f(y)|^2\right)$$

avec $x \mapsto f_m(x)\ \left(|f(y-x)|^2+|f(y)|^2\right)$ intégrable pour presque tout y (puisque f_m est intégrable et f est de carré intégrable (repenser encore au cas $L^1 * L^1$)). Notons au passage (cela sera utilisé ci-dessous) que la fonction de deux variables

$$(x,y) \mapsto f_m(x)\ \left(|f(y-x)|^2+|f(y)|^2\right)$$

est intégrable également. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)|\ dx\right)^2 &\leq \|\sqrt{f_m}\|_2^2 \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)|^2\ dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)|^2\ dx.\end{aligned}$$

On a donc obtenu

$$\|f_m * f - f\|_2^2\ \leq\ \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ |f(y-x)-f(y)|^2\ dx\right)\ dy.$$

Cela étant, une permutation de l'ordre d'intégration (justification ci-dessus) donne

$$\begin{aligned}\|f_m * f - f\|_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y-x)-f(y)|^2\ dy\right)\ dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ \|f(.-x)-f(.)\|_2^2\ \ dx\end{aligned}$$

et on termine la preuve comme dans le cas L^1 mais en utilisant bien sur le théorème d'approximation dans $L^2(\mathbb{R})$. □

Occupons-nous maintenant du cas L^∞.

Proposition 3.4.3. *Soit une suite de fonctions f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ telle que*
- *$f_m \in L^1(\mathbb{R})$, $f_m \geq 0$ et $\|f_m\|_1 = 1$ pour tout m*
- *pour tout $R > 0$, on a*

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{|x|>R} f_m(x)\ dx\ =\ 0.$$

Alors pour toute fonction f bornée sur $\mathbb{R}$ et toute partie A de $\mathbb{R}$ telles que[2]

$$\lim_{r\to 0}\ \sup_{t\in A,\,|h|\leq r} |f(t)-f(t+h)|\ =\ 0,$$

la suite $f_m * f$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge uniformément sur A vers f.

Preuve. Comme dans le cas L^1, L^2, on a

$$(f_m * f)(y) - f(y)\ =\ \int_{\mathbb{R}} f_m(x)\ \left(f(y-x)-f(y)\right)\ dx$$

2. cette propriété est bien sûr vérifiée pour $A = \mathbb{R}$ si f est uniformément continu sur $\mathbb{R}$

donc
$$\sup_{y\in A}|(f_m * f)(y) - f(y)| \ \leq \ \int_{\mathbb{R}} f_m(x) \sup_{y\in A}|f(y-x) - f(y)| \ dx$$
Dans le cas L^1 ou L^2, le théorème d'approximation permettait de continuer. Ici, on travaille avec L^∞ (borne supérieure dans l'intégrale ci-dessus) et on ne peut pas continuer de la sorte. L'hypothèse supplémentaire va permettre de conclure, avec les mêmes développements.

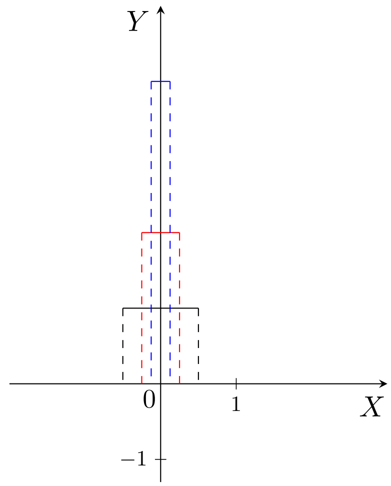
Si $\varepsilon > 0$, l'hypothèse supplémentaire (qui pallie donc le manque de théorème d'approximation) donne l'existence de $R > 0$ tel que
$$\sup_{y\in A}|f(x-y) - f(y)| \ \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \text{ tel que } |x| \leq R.$$
On obtient ainsi
$$\begin{aligned}
&\sup_{y\in A}|(f_m * f)(y) - f(y)| \\
&\quad\leq \int_{|x|>R} f_m(x) \sup_{y\in A}|f(y-x) - f(y)| \ dx \ + \ \int_{|x|\leq R} f_m(x) \sup_{y\in A}|f(y-x) - f(y)| \ dx \\
&\quad\leq 2\,\|f\|_\infty \int_{|x|>R} f_m(x) \ dx \ + \ \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x|\leq R} f_m(x) \ dx \\
&\quad\leq 2\,\|f\|_\infty \int_{|x|>R} f_m(x) \ dx \ + \ \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$
L'utilisation de la seconde hypothèse sur la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) fournit ainsi M tel que le premier terme du second membre soit inférieur à $\varepsilon/2$ quel que soit $m \geq M$ donc finalement
$$\sup_{y\in A}|(f_m * f)(y) - f(y)| \leq \ \varepsilon \quad \forall m \geq M$$
et on conclut. □

Donnons à présent des exemples, en fait une construction standard d'une unité approchée de composition.

Exemple(s) 3.4.4. *Si f est une fonction intégrable, à valeurs positives et d'intégrale égale à 1, alors la suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définie par $f_m(x) = mf(mx)$ est une suite de fonctions intégrables, à valeurs positives, d'intégrale égale à 1 et qui est telle que, pour tout $R > 0$, on a*
$$\lim_{m\to+\infty} \int_{|x|>R} f_m(x) \ dx \ = \ 0.$$

Preuve. Il est immédiat de constater qu'effectivement on a une suite de fonctions intégrables, à valeurs positives, d'intégrale égale à 1. Soit alors $R > 0$.On a
$$\int_{|x|>R} f_m(x) \ dx \ = \ m \int_{|x|>R} f(mx) \ dx \ = \ m \int_{|t|>mR} \frac{1}{m} f(t) \ dt \ = \ \int_{|t|>mR} f(t) \ dt$$
avec
$$\lim_{m\to+\infty} \int_{|t|>mR} f(t) \ dt \ = \ 0$$
puisque f est intégrable. On peut donc conclure. □

On peut alors « voir » l'illustration de l'effet « Dirac ».



3.5 Support (pp) d'une fonction, espaces L^p_{comp} et L^p_{loc}

3.5.1 Supports

• Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$. Par définition, le support de f (noté $supp(f)$ ou $[f]$) est l'adhérence de l'ensemble des points où f est non nul :

$$supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Le complémentaire du support de f est donc un ouvert Ω dans lequel f est nul en tout point. Notons que l'on a alors bien sûr $f = f\chi_{supp(f)}$.

Si la fonction n'est définie que presque partout, on doit trouver un autre moyen de définir le support, car la notion d'adhérence n'est plus de mise. Commençons par donner une définition équivalente du support, laquelle pourra être généralisée aux fonctions définies presque partout (et aussi aux distributions).

On appelle *ouvert d'annulation* de f un ouvert dans lequel f est nul en tout point. **Le complémentaire du support est donc un ouvert d'annulation. C'est en fait ≪ le plus grand ≫ ouvert d'annulation, au sens qu'il s'agit de l'union de tous les ouverts d'annulation.** Pour s'en convaincre, il suffit de montrer que tout ouvert d'annulation ω de f est inclus dans $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus supp(f)$. De fait, puisque ω est un ouvert dans lequel f est nul en tout point, on a

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \omega.$$

Dès lors, puisque ω est ouvert, son complémentaire est fermé est on obtient ainsi

$$supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}^n \setminus \omega$$

donc

$$\omega \subset \mathbb{R}^n \setminus supp(f) = \Omega.$$

• Soit f une fonction définie presque partout sur $\mathbb{R}^n$. On appelle *ouvert d'annulation presque partout* de f un ouvert dans lequel f est nul en tout point sauf dans un ensemble négligeable. L'union de tous les ouverts d'annulation presque partout est bien sûr un ouvert ; le fait qu'il soit encore d'annulation presque partout est vrai, mais demande une preuve (qu'ici nous omettrons). Par définition, *le support presque partout de f (noté $supp_{pp}(f)$ ou $[f]_{pp}$) est le complémentaire de l'union de tous les ouverts d'annulation presque partout de f.* On a donc encore

$$f = f\chi_{supp_{pp}(f)} \quad \text{presque partout.}$$

3.5.2 Espaces L^p_{comp} et L^p_{loc}

L'espace L^p_{comp} est l'ensemble des fonctions de L^p dont le support pp est compact.

L'espace L^p_{loc} est l'ensemble des fonctions f telle que $f\chi_K \in L^p$ quel que soit le compact K. Une fonction de L^p_{loc} est appelée fonction localement dans L^p.

On a bien sûr

$$L^p_{comp} \subset L^p \subset L^p_{loc}.$$

Diverses autres inclusions existent ; par exemple on a $L^2_{loc} \subset L^1_{loc}$ car si $f \in L^2_{loc}$ et si K est un compact, alors l'égalité

$$f\chi_K = (f\chi_K) \times \chi_K$$

donne l'intégrabilité voulue en utilisant le fait que le produit de deux fonctions de carré intégrable est une fonction intégrable.

3.6 ≪ Extension ≫ du produit de composition

3.6.1 Cas généraux d'existence

Propriété(s) 3.6.1. *Lorsque* $p, q, r \in \{1, 2, \infty\}$ *avec* $(1/p)+(1/q) = 1+(1/r)$ *(avec convention), on a*

$$L^p_{comp} * L^q_{loc} \subset L^r_{loc}$$

Preuve. Soient $f \in L^p_{comp}$ et $g \in L^q_{loc}$. Si y est fixé, on a

$$f(y-x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{[f]}(y-x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{y-[f]}(x).$$

Cela étant, si $y \in K \subset \mathbb{R}^n$ on a

$$f(y-x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{y-[f]}(x) \;=\; f(y-x)\,\chi_{K-[f]}(x)$$

car si $x \in y - [f]$ alors $x \in K - [f]$ et si $x \notin y - [f]$ alors $y - x \notin [f]$ donc $f(y - x) = 0$. On obtient donc, lorsque $y \in K$

$$\begin{aligned} f(y-x)\,g(x) &= f(y-x)\,\chi_{K-[f]}(x)\;g(x) \\ &= f(y-x)\;\left(g\chi_{K-[f]}\right)(x) \\ &= f(y-x)\,G(x) \end{aligned}$$

avec $G = g\chi_{K-[f]}$. Comme $[f]$ est compact, l'ensemble $K - [f]$ est également compact lorsque K est compact. Cela implique que $G \in L^q$ puisque $g \in L^q_{loc}$. Vu l'inclusion $L^p * L^q \subset L^r$, on a donc $f * G \in L^r$. Finalement, si $y \in K$, en intégrant les deux membres des égalités $f(y-x)\,g(x) = f(y-x)\,G(x)$ $(y \in K, x \in \mathbb{R})$ obtenues ci-dessus, on obtient

$$(f*g)(y) \;=\; (f*G)(y)$$

ou encore

$$(f*g)\,\chi_K \;=\; (f*G)\,\chi_K \;\in\; L^r.$$

On peut donc conclure que $f * g \in L^r_{loc}$.□

3.6.2 Unités approchées de composition « locales »

Proposition 3.6.2. *Soit une suite de fonctions f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ telle que*
- $f_m \in L^1_{comp}(\mathbb{R})$, $f_m \geq 0$ *et* $\|f_m\|_1 = 1$ *pour tout* m
- *pour tout* $R > 0$, *on a*
$$\lim_{m\to+\infty} \int_{|x|>R} f_m(x)\ dx \ = \ 0$$
- $\cup_{m=1}^{+\infty} supp(f_m)$ *est borné.*

Alors pour tout $f \in L^1_{loc}$ (resp. $f \in L^2_{loc}$), la suite $f * f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers f dans L^1_{loc} (resp. L^2_{loc}).

En outre, pour tout $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, la suite $f * f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ (donc dans L^∞_{loc}).

Preuve. Remarquons tout d'abord que la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ constitue une unité approchée de composition au sens classique général comme vu précédemment.

Soit alors un compact K de $\mathbb{R}^n$. Comme dans le développement du résultat précédent, pour tout $y \in K$, on a
$$f_m(y-x)\, f(x) \ = \ f_m(y-x)\ \big(f\chi_{K-[f_m]}\big)\,(x).$$
Dès lors, si K_0 est un compact qui contient l'union des supports des f_m, on obtient aussi
$$f_m(y-x)\, f(x) \ = \ f_m(y-x)\ (f\chi_{K-K_0})\,(x)$$
puisque si $x \in K-[f_m]$ alors $x \in K-K_0$ et si $x \notin K-[f_m]$ alors $y-x \notin [f_m]$ donc $f_m(y-x)=0$. Il s'ensuit que $f_m * f = f_m * (f\chi_{K-K_0})$ pp sur K dans le cas L^1_{loc} et L^2_{loc} et partout dans le cas où f est continu.

Cela étant, l'utilisation du résultat concernant les unités approchées de composition classiques donne la convergence de la suite $f_m * (f\chi_{K-K_0})$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ vers $f\chi_{K-K_0}$ dans $L^1(\mathbb{R})$ si $f \in L^1_{loc}$ et dans $L^2(\mathbb{R})$ si $f \in L^2_{loc}$. Si on a pris soin de prendre un compact K_0 qui contient l'origine, on a aussi $f\chi_{K-K_0} = f$ pp sur K (puisque si $x \in K$ alors $x = x - 0 \in K - K_0$). Ainsi
$$\|f_m * f - f\|_{L^1(K)} \ = \ \|f_m * (f\chi_{K-K_0}) - f\chi_{K-K_0}\|_{L^1(K)}$$
donne la conclusion dans le cas L^1_{loc} et de même dans L^2_{loc} en prenant les normes correspondantes.

Traitons alors le cas où $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Soit K' un compact dont l'intérieur contient $K - K_0$. Cela étant, une fonction continue est uniformément continue sur tout compact ; il s'ensuit que la fonction f est uniformément continue sur K' et par suite
$$\lim_{r\to 0} \sup_{t\in K-K_0\,|h|\leq r} |f(t) - f(t+h)| \ = \ 0,$$
puisque $K - K_0 \subset K'$ et $t+h \in K'$ pour tout $t \in K - K_0$ et tout r petit. Comme $f\chi_{K'}$ est borné sur $\mathbb{R}$, le résultat classique donne alors la convergence uniforme sur $K - K_0$ de la suite $f_m * f\chi_{K'}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ vers $f\chi_{K'}$. Mais on a encore $f_m * f = f_m * (f\chi_{K'})$ pp sur K (analogue à ci-dessus) et aussi $f = f\chi_{K'}$ pp sur K (également analogue à ci-dessus). Comme $K \subset K - K_0$, on obtient finalement
$$\sup_{y\in K} |(f * f_m)(y) - f(y)| \ = \ \sup_{y\in K} |(f\chi_{K'} * f_m)(y) - f\chi_{K'}(y)| \ \leq \ \sup_{y\in K-K_0} |(f\chi_{K'} * f_m)(y) - f\chi_{K'}(y)|$$
et on peut conclure. □

Exemple(s) 3.6.3. *Le noyau de Féjer, à savoir la suite*

$$F_n(x) \;=\; \frac{1}{2\pi n}\,\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad n\in\mathbb{N}_0$$

est tel que les fonctions $f_n = F_n\chi_{[-\pi,\pi]}$ $(n\in\mathbb{N}_0)$ *vérifient les hypothèses du résultat précédent.*

Preuve. Notons que si on pose

$$D_n(x) \;=\; \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikx},$$

(noyau de Dirichlet) on a

$$D_n(x) \;=\; \frac{\sin((2n+1)/(x/2))}{\sin(x/2)}, \quad n\in\mathbb{N}_0$$

et

$$F_n(x) \;=\; \frac{1}{2\pi n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$$

par un calcul direct (par exemple à partir des noyaux de Dirichlet dans lesquels le sinus du numérateur est mis sous forme d'une différence d'exponentielles ; on somme alors les termes de progressions géométriques). On aura l'occasion d'utiliser le noyau de Dirichlet dans le chapitre qui traite des séries trigonométriques de Fourier.

Cela étant, on a bien sûr $f_n\in L^1_{comp}(\mathbb{R})$, $f_n\geq 0$ pour tout n ; pour tout n, on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\;dx \;=\; \frac{1}{2\pi n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)\;dx \;=\; \frac{1}{2\pi n}\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \;=\; 1.$$

Dès lors le premier point des hypothèses du résultat précédent est vérifié.

Il est également clair que le troisième point est vérifié.

Reste le deuxième point. Soit $R>0$. Si $R>\pi$ alors $f_n(x)=0$ pour tout x tel que $|x|>R$ et dès lors, le second point est trivialement vérifié. Si $R\leq\pi$, la fonction $x\mapsto 1/\sin^2(x/2)$ est continue sur le compact $[-\pi,-R]\cup[R,\pi]$ donc y est bornée, disons par M. On obtient ainsi

$$0\leq \int_{|x|\geq R} f_n(x)\;dx = \int_{R\leq|x|\leq\pi} F_n(x)\;dx = \int_{R\leq|x|\leq\pi}\frac{1}{2\pi n}\,\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}\;dx \leq \frac{2(\pi-R)M}{2\pi n};$$

par conséquent le second point est également vérifié.

On peut donc conclure. □

3.7 Régularisations

Le produit de composition de fonctions permet de « régulariser » (au sens dérivabilité) une fonction comme on va le voir ci-dessous.

Commençons par une propriété sur le support d'un produit de composition et par un résultat donnant des conditions suffisantes sur f,g pour que $f*g$ soit dérivable. On poursuivra par une « régularisation » du théorème d'approximation et par un résultat appelé « régularisation d'un ensemble », lequel est abondamment exploité notamment dans le cours sur les distributions (masters).

Propriété(s) 3.7.1. *Si f et g sont composables, alors*

$$[f*g] \;\subset \overline{[f]+[g]}$$

Si le support de f ou de g est compact, alors la somme des supports est fermée et on peut donc enlever l'adhérence.

Preuve. Etablissons ce résultat pour les supports. Le cas des supports presque partout se traite de même.

Posons $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus (\overline{[f]+[g]})$. Pour conclure, il suffit de montrer que cet ouvert est d'annulation pour $f*g$. Soit donc $y \in \Omega$. On a

$$\begin{aligned}(f*g)(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)\,g(x)\;dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)\,g(x)\;\chi_{[f]}(y-x)\,\chi_{[g]}(x)\;dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)\,g(x)\;\chi_{(y-[f])\cap[g]}(x)\;dx\end{aligned}$$

et comme $y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus ([f]+[g])$, on a $(y-[f]) \cap [g] = \emptyset$ donc $(f*g)(y) = 0$.

La preuve du fait que la somme d'un fermé et d'un compact de $\mathbb{R}^n$ soit fermée est directe.□

Propriété(s) 3.7.2 (Dérivabilité)**.** *Le produit de composition $f*g$ appartient à $C_L(\mathbb{R}^n)$ lorsque (1) $f \in L^1_{comp}$ et $g \in C_L(\mathbb{R}^n)$ ou (2) $f \in L^1_{loc}$, $g \in C_L(\mathbb{R}^n)$ et $[g]$ compact. Dans ce cas on a*

$$D^\alpha(f*g) \;=\; f*D^\alpha g \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq L$$

Preuve. C'est direct en utilisant le théorème de dérivation des intégrales paramétriques.□

Nous allons maintenant montrer comment le produit de composition permet d'approcher (au sens des normes) des fonctions non régulières par des fonctions régulières.

Dans ce qui suit, nous utilisons la notation $d(x,E)$ pour désigner la distance entre un point $x \in \mathbb{R}^n$ et un ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ et, si $r > 0$, on définit E_r par

$$E_r \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,E) \leq r\}\,.$$

On définit aussi les fonctions ρ_ε $(\varepsilon > 0)$ de la façon suivante

$$\rho_\varepsilon(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon^n}\,\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

avec[3] $\rho \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, $[\rho] \subset b(1)$ (boule de rayon 1 centrée à l'origine), $\rho \geq 0$ et $\|\rho\|_1 = 1$.

Cela étant, on a le résultat suivant.

Propriété(s) 3.7.3 (« Régularisation d'un ensemble »)**.** *Pour tout ensemble non vide E et tout $\varepsilon > 0$, la fonction $f_\varepsilon = \chi_{E_\varepsilon} * \rho_\varepsilon$ possède les propriétés suivantes*

1. $f_\varepsilon \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$

3. La fonction ρ suivante, divisée par la norme, convient : $\rho(x) = \exp(1/(|x|^2-1))$ si $|x| < 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$

2. $0 \leq f_\varepsilon \leq 1$
3. $f_\varepsilon = 1$ *sur l'adhérence de* E *et* $f_\varepsilon = 0$ *sur le complémentaire de* $E_{2\varepsilon}$
4. $\forall \alpha$, *il existe* $C_\alpha > 0$ *tel que*
$$|D^\alpha f_\varepsilon| \ \leq \ C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}.$$

Preuve. Considérons le cas $n = 1$.

Comme χ_{E_ε} est localement intégrable et ρ_ε indéfinimement continûment dérivable à support compact, la fonction $f_\varepsilon = \chi_{E_\varepsilon} * \rho_\varepsilon$ appartient bien à $C_\infty(\mathbb{R})$.

Pour tout x on a aussi directement
$$0 \ \leq \ (\chi_{E_\varepsilon} * \rho_\varepsilon)(x) \ = \ \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_\varepsilon}(x-y)\, \rho_\varepsilon(y)\ dy \ \leq \ \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(y) \ = \ 1.$$

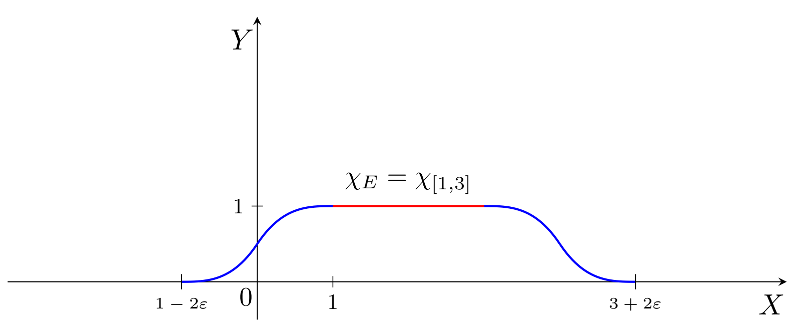
Cela étant, pour tous x, y, on a
$$\begin{aligned} \chi_{E_\varepsilon}(y)\, \rho_\varepsilon(x-y) &= \chi_{E_\varepsilon}(y)\, \rho_\varepsilon(x-y)\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x-y) \\ &= \chi_{E_\varepsilon}(y)\, \rho_\varepsilon(x-y)\chi_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}(y) \\ &= \rho_\varepsilon(x-y)\chi_{E_\varepsilon \cap [x-\varepsilon,x+\varepsilon]}(y). \end{aligned}$$

Si $x \in E$ alors $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset E_\varepsilon$ donc
$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) \ = \ (\chi_{E_\varepsilon} * \rho_\varepsilon)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-y)\chi_{E_\varepsilon \cap [x-\varepsilon,x+\varepsilon]}(y)\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-y)\chi_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}(y)\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-y)\ dy \ = \ 1 \end{aligned}$$

et si $x \notin E_{2\varepsilon}$ alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap E_\varepsilon = \emptyset$ donc
$$f_\varepsilon(x) \ = \ (\chi_{E_\varepsilon} * \rho_\varepsilon)(x) \ = \ \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-y)\chi_{E_\varepsilon \cap [x-\varepsilon,x+\varepsilon]}(y) \ = \ 0.$$

La fonction f_ε est bien sûr bornée par 1. Pour conclure, il reste donc à examiner les dérivées. Quels que soient $\alpha \in \mathbb{N}_0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a successivement
$$\begin{aligned} |D^\alpha f_\varepsilon(x)| &= |(\chi_{E_\varepsilon} * D^\alpha \rho_\varepsilon)(x)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |(D^\alpha \rho_\varepsilon)(y)|\ dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |D^\alpha (\rho(y/\varepsilon))|\ dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{1+\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |(D^\alpha \rho)(y/\varepsilon)|\ dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |(D^\alpha \rho)(t)|\ dt \end{aligned}$$

et on conclut. $\square$



Propriété(s) 3.7.4 (Théorème d'approximation « régularisé »)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $f \in L^1(\Omega)$ (resp. $f \in L^2(\Omega)$) et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact* **dans** *Ω tel que*

$$\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon \quad (\text{ resp. } \quad \|f - \varphi\|_2 \leq \varepsilon)$$

Preuve. Ici, la notation $\|.\|$ désigne la norme dans L^1 ou dans L^2. Considérons aussi une unité approchée de composition dans L^1 et L^2 du type $\rho_m(.) = m\rho(m.)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) comme dans le cas de la « régularisation d'un ensemble ».

Soient alors$f \in L^1(\Omega)$ (resp. $L^2(\Omega)$) et $\varepsilon > 0$. Par le théorème d'approximation, il existe une fonction étagée F dans Ω telle que

$$\Big\| f - F\| \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite, on a

$$\lim_{m\to+\infty} \|F - F * \rho_m\| \ = \ 0$$

avec

$$supp(F * \rho_m) \ \subset \ supp(F) + b(1/m).$$

Dès lors, il existe M tel que le support de la fonction $F * \rho_M$ soit un compact inclus dans Ω et $\|F - F * \rho_M\| \leq \varepsilon/2$. Il s'ensuit que

$$\|f - F * \rho_M\| \ \leq \ \|f - F\| + \|F - F * \rho_M\| \ \leq \ \varepsilon$$

et on conclut puisque $F * \rho_M$ appartient à $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ et est à support compact **dans** Ω. □

3.8 Propriété d'annulation

Propriété(s) 3.8.1 (« Annulation »)**.** *Soit f une fonction intégrable dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Alors f est nul presque partout si et seulement si*

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\ dx \ = \ 0$$

quelle que soit la fonction $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans Ω.

Preuve. Il est clair que si f est nul, alors les intégrales sont nulles également.

Considérons alors que toutes ces intégrales sont nulles. Prenons une fonction $\psi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $b(1)$, à valeurs positives et d'intégrale égale à 1. On sait que les fonctions ψ_m définies par $\psi_m(x) = m^n\psi(mx)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) forment une unité approchée de composition dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ donc que l'on a

$$\lim_{m\to+\infty} (f\chi_\Omega) * \psi_m \ = \ f\chi_\Omega$$

dans L^1 et presque partout pour une sous-suite. Cela étant, pour tout m on a

$$((f\chi_\Omega) * \psi_m)\,(x) \ = \ \int_\Omega f(y)\,\psi_m(x-y)\ dy \ = \ \int_{\Omega\cap[x-1/m,x+1/m]} f(y)\,\psi_m(x-y)\ dy.$$

Lorsque x est dans Ω, on a $supp(\psi_m(x - .)) \subset b(x, 1/m) \subset \Omega$ pour m assez grand [4]donc

$$((f\chi_\Omega) * \psi_m)\,(x) \ == \ \int_\Omega f(y)\,\psi_m(x-y)\ dy \ = \ 0.$$

Vu la convergence presque partout vers $f\psi_\Omega$ pour une sous-suite, on obtient finalement que f est nul presque partout dans Ω. □

4. $b(x, r)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ désigne la boule fermée centrée en x et de rayon r

Chapitre 4

Espaces L^p, $p \geq 1$

4.1 Les espaces $L^p(A)$

Soit $p > 0$ et soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$. On définit les espaces $L^p(A)$ comme on le fait pour $p = 1, 2$ et on pose

$$\|f\|_p \;=\; \left(\int_A |f(x)|^p \; dx\right)^{1/p}.$$

On voit directement qu'il s'agit d'espaces vectoriels (avec la somme et le produit par un scalaire habituels), notamment en notant que

$$(a+b)^p \;\leq\; (2 \sup\{a,b\})^p \;\leq\; 2^p \; (a^p + b^p)\,, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Il y a moyen d'améliorer cette inégalité mais nous n'en avons pas besoin pour montrer que l'on a affaire à des espaces vectoriels.

Propriété(s) 4.1.1 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $p > 1$ et soit p^* son conjugué, à savoir le réel $p^* > 1$ tel que $(1/p) + (1/p^*) = 1$. Alors quels que soient $f \in L^p(A)$ et $g \in L^{p^*}(A)$, on a $fg \in L^1(A)$ et*

$$\left|\int_A f(x)\, g(x)\; dx\right| \;\leq\; \|f\|_p \, \|g\|_{p^*}.$$

Preuve. Comme le logarithme est une fonction concave, quels que soient $a, b > 0$ on a

$$\frac{1}{p}\; \ln(a) + \frac{1}{p^*}\; \ln(b) \;\leq\; \ln\left(\frac{1}{p}\, a + \frac{1}{p^*}\, b\right).$$

En prenant alors a^p et b^{p^*} au lieu de a et b, on obtient

$$ab \;\leq\; \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{p^*}\, b^{p^*}. \qquad (*)$$

On en déduit donc que $fg \in L^1(A)$ lorsque $f \in L^p(A)$ et $g \in L^{p^*}(A)$.

Cela étant, si $f \in L^p(A)$ et $g \in L^{p^*}(A)$ sont tels que $\|f\|_p^p = 1$ et $\|g\|_{p^*}^{p^*} = 1$, en appliquant l'inégalité (*) à $|f|$ et $|g|$ puit en intégrant, on obtient

$$\int_A |f(x)\, g(x)| \; dx \;\leq\; \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{p^*}\|g\|_{p^*}^{p^*} \;=\; 1.$$

Dans le cas général, si ni f ni g ne sont nuls, vu ce qui précède les fonctions $f/\|f\|_p$ et $g/\|g\|_{p^*}$ vérifient

$$\int_A \left|\frac{f(x)}{\|f\|_p}\, \frac{g(x)}{\|g\|_{p^*}}\right| \; dx \;\leq\; 1$$

donc on peut conclure dans ce cas.

Bien sûr si l'une des deux fonctions est nulle, les deux membres de l'inégalité à démontrer sont nuls donc celle-ci est encore vraie. $\square$

Grâce à cette inégalité (qui généralise l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on montre que la fonction $\|.\|_p$ définit une norme sur $L^p(A)$.

Théorème 4.1.2. *La fonction $\|.\|_p$ est une norme sur $L^p(A)$ et l'espace normé est un espace de Banach.*

Preuve. Pour montrer que $\|.\|_p$ est une norme sur $L^p(A)$, seule l'inégalité triangulaire n'est pas immédiate. On l'obtient grâce à l'inégalité de Hölder.

De fait, pour $f, g \in L^p(A)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_A |f(x)+g(x)|^p \, dx &= \int_A |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \, dx \\
&\leq \int_A \Big(|f(x)|+|g(x)|\Big)\, |f(x)+g(x)|^{p-1} \, dx \\
&= \int_A |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \, dx + \int_A |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \, dx.
\end{aligned}$$

Cela étant, le réel $p^* = p/(p-1)$ est celui qui vérifie $1/p + 1/p^* = 1$ donc $|f+g|^{p-1} \in L^{p^*}(A)$ puisque f et g sont dans $L^p(A)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\int_A |f(x)+g(x)|^p \, dx &\leq \int_A |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \, dx + \int_A |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \, dx \\
&\leq \|f\|_p \left(\int_A |f(x)+g(x)|^p\right)^{(p-1)/p} + \|g\|_p \left(\int_A |f(x)+g(x)|^p\right)^{(p-1)/p} \\
&= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \left(\int_A |f(x)+g(x)|^p\right)^{(p-1)/p}.
\end{aligned}$$

Si $f+g$ n'est pas nul, on en déduit que

$$\int_A |f(x)+g(x)|^p \, dx \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \left(\int_A |f(x)+g(x)|^p\right) \left(\int_A |f(x)+g(x)|^p\right)^{-1/p}$$

donc

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bien sûr si $f+g$ est nul, l'inégalité est aussi vérifiée.

La preuve que toute suite de Cauchy converge suit le processus appliqué pour L^2, en utilisant l'inégalité de Hölder au lieu de celle de Cauchy-Schwarz. $\square$

On peut se demander pourquoi on ne conserve que le cas $p > 1$. En fait, dans le cas $p \in]0,1[$, la fonction $\|.\|_p$ ne vérifie pas l'inégalité triangulaire et n'est donc pas une norme. Il est bien sûr possible de définir une topologie sur $L^p(A)$ mais les propriétés ne sont pas tout à fait les mêmes que dans le cas $p \geq 1$.

Résultat auxiliaire 4.1.3. *Pour tous $a, b \geq 0$ et pour tout $p > 0$, on a*

$$2^{p-1}\left(a^p + b^p\right) \;\leq\; (a+b)^p \;\leq\; a^p + b^p \quad \text{si } p < 1$$

et

$$a^p + b^p \;\leq\; (a+b)^p \;\leq\; 2^{p-1}\,(a^p + b^p) \quad \textit{si } p > 1,$$

et les constantes dans les inégalités sont optimales.

Bien sûr pour $p = 1$ il faut remplacer les inégalités par des égalités.

Preuve. Il est clair que si a ou b est nul, alors les inégalités sont vraies. Supposons donc $a, b > 0$.

En divisant les membres des inégalités par a^p, on voit qu'elles sont équivalentes aux suivantes

$$2^{p-1}\,(1 + x^p) \;\leq\; (1+x)^p \;\leq\; 1 + x^p \quad \text{si } p < 1,\ x > 0$$

et

$$1 + x^p \;\leq\; (1+x)^p \;\leq\; 2^{p-1}\,(1 + x^p) \quad \text{si } p > 1,\ x > 0.$$

Définissons la fonction

$$f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p},\ x > 0.$$

On a $f \in C_\infty(]0, +\infty[)$ et

$$Df(x) = \frac{p(1+x)^{p-1}(1+x^p) - px^{p-1}(1+x)^p}{(1+x^p)^2} = \frac{p(1+x)^{p-1}\,(1 - x^{p-1})}{(1+x^p)^2}.$$

Le signe de cette dérivée est donc celui de la fonction $x \mapsto 1 - x^{p-1}$, laquelle s'annule en 1.

Ainsi

• lorsque $p < 1$, on a $Df < 0$ sur $]0, 1[$ et $Df > 0$ sur $]1, +\infty[$; f admet donc un minimum global en 1, lequel vaut $2^{p-1} (\leq 1)$; on a aussi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \geq f(x) \quad \forall x \in]0, 1[$$

et

$$f(x) \leq \lim_{t \to +\infty} f(t) = 1 \quad \forall x > 1,$$

donc

$$f(x) \leq 1 \quad \forall x > 0$$

• lorsque $p > 1$, on a $Df > 0$ sur $]0, 1[$ et $Df < 0$ sur $]1, +\infty[$; f admet donc un maximum global en 1, lequel vaut $2^{p-1} (\geq 1)$; on a aussi

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = 1 \leq f(x) \quad \forall x \in]0, 1[$$

et

$$f(x) \geq \lim_{t \to +\infty} f(t) = 1 \quad \forall x > 1,$$

donc

$$f(x) \geq 1 \quad \forall x > 0.$$

On peut donc conclure.$\square$

Revenons alors à la non-consiération des espaces L^p pour $p < 1$. Pour $p \in]0, 1[$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\int_A |f(x) + g(x)|^p \; dx \right)^{1/p} &\leq \left(\int_A (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \; dx \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_A |f(x)|^p \; dx + \int_A |g(x)|^p \; dx \right)^{1/p} \\
&\leq 2^{1/p-1} \left(\left(\int_A |f(x)|^p \; dx \right)^{1/p} + \left(\int_A |g(x)|^p \; dx \right)^{1/p} \right)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire
$$\|f+g\|_p \leq 2^{1/p-1}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)$$
avec $2^{1/p-1} > 1$. Puisque les bornes sont optimales, on en déduit que $\|.\|_p$ ne vérifie pas l'inégalité triangulaire dans le cas $p < 1$.

Etablissons maintenant une généralisation de l'inégalité de Hölder ; cela sera très utile pour étendre la définition du produit de composition aux espaces L^p avec $p \geq 1$.

Propriété(s) 4.1.4 (Inégalité de Hölder généralisée)**.** *Soient des réels $p_1, \ldots, p_n > 1$ tels que*
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \;=\; 1.$$
Alors quels que soient $f_k \in L^{p_k}(A)$ $(k = 1, \ldots, n)$, on a $\prod_{k=1}^n f_k \in L^1(A)$ et
$$\int_A \prod_{k=1}^{n} |f_k(x)|\; dx \;\leq\; \prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{p_k}.$$

Preuve. Une preuve s'effectue par récurrence de manière naturelle.

De fait, la propriété est vraie pour $n = 2$: il s'agit de l'inégalité de Hölder démontrée auparavant. Cela étant, supposons la propriété correcte pour n réels et démontrons qu'elle le reste pour des réels $p_1, \ldots, p_{n+1} > 1$ tels que
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{p_k} \;=\; 1.$$
On a donc
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{p_k} \;=\; 1 - \frac{1}{p_1}$$
et ainsi, en définissant
$$q = \frac{1}{1 - 1/p_1} > 1$$
on obtient
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{q}{p_k} \;=\; 1.$$
On note au passage qu'on a bien $p_k/q > 1$ pour tout $k = 2, \ldots, n+1$. Par ailleurs, comme $f_k \in L^{p_k}$ $(k = 2, \ldots, n+1)$, on a $|f_k|^q \in L^{p_k/q}$ $(k = 2, \ldots, n+1)$ et on peut ainsi appliquer l'hypothèse de récurrence. On obtient
$$\prod_{k=2}^{n+1} |f_k|^q \in L^1(A)$$
et
$$\left\|\prod_{k=2}^{n+1} f_k\right\|_q^q = \int_A \prod_{k=2}^{n+1} |f_k(x)|^q\; dx \;\leq\; \prod_{k=2}^{n+1} \|f_k^q\|_{p_k/q} = \prod_{k=2}^{n+1} \|f_k\|_{p_k}^q.$$
Il faut maintenant « réintégrer f_1 ». Par définition de q, on a
$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q} = 1$$

et par ce qui précède (utilisation de l'hypothèse de récurrence), on a aussi

$$\prod_{k=2}^{n+1} f_k \in L^q(A).$$

Ainsi, comme $f_1 \in L^{p_1}$, l'inégalité de Hölder donne

$$f_1 \prod_{k=2}^{n+1} f_k \in L^1(A)$$

et

$$\int_A \prod_{k=1}^{n+1} |f_k(x)| \; dx \leq \|f_1\|_{p_1} \left\| \prod_{k=2}^{n+1} f_k \right\|_q .$$

Pour conclure, il suffit alors de se rappeler que l'on a obtenu ci-dessus vu l'hypothèse se récurrence, à savoir

$$\left\| \prod_{k=2}^{n+1} f_k \right\|_q \;\leq\; \prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{p_k}.$$

□

Enonçons également le théorème d'approximation, valable aussi dans ce cadre.

Théorème 4.1.5. *Soit un réel $p \geq 1$ et soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Alors quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée α telle que*

$$\|f - \alpha\|_p \leq \varepsilon$$

et

$$\lim_{h \to 0} \|f(.+h) - f(.)\|_p = 0.$$

4.2 Produit de composition et espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$

La généralisation de ce qui a été fait pour $1, 2, \infty$ avec la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

repose sur l'inégalité de Hölder généralisée.

Pour ne pas alourdir les notations, dans la suite, nous utiliserons la notation L^p à la place de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 4.2.1 (Produit de composition)**.** *Soient les réels $p, q, r \geq 1$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Alors quels que soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ on a
(a) $f * g$ est défini pp
(b) $f * g \in L^r$
(c) on a l'inégalité suivante entre les normes

$$\|f * g\|_r \;\leq\; \|f\|_p \; \|g\|_q.$$

Preuve. Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ et r tel que $1/p + 1/q = 1 + 1/r$. Notons que puisque p, q sont réels et plus grands ou égaux à 1, on en déduit que $1/r = 1/p + 1/q - 1 \leq 1/p$, $1/r = 1/p + 1/q - 1 \leq 1/q$ donc $r \geq p \geq 1$ et $r \geq q \geq 1$.

Pour prouver le résultat, l'idée est d'utiliser l'inégalité de Hölder généralisée.

On a
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$
donc
$$1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$
Si p^* et q^* sont les conjugués de p et q respectivement, on obtient donc
$$\frac{1}{p^*} + \frac{1}{q^*} + \frac{1}{r} = 1.$$
Cela étant, vu le cas $L^1 * L^1$, on sait que la fonction $x \mapsto |f(y-x)|^p \, |g(x)|^q \in L^1$ pour presque tout y. Ainsi, pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on peut écrire
$$|f(y-x)|\,|g(x)| \;=\; \Big(|f(y-x)|^p\,|g(x)|^q\Big)^{1/r} \times |f(y-x)|^{1-p/r} \times |g(x)|^{1-q/r}$$
où le premier facteur du membre de droite définit une fonction (de x) qui appartient à L^r. Par ailleurs, on a
$$\Big(|f(y-x)|^{1-p/r}\Big)^{q^*} = \Big(|f(y-x)|^p\Big)^{q^*(1/p-1/r)} = \Big(|f(y-x)|^p\Big)^{q^*(1/q^*)} = |f(y-x)|^p,$$
donc le deuxième facteur du membre de droite définit une fonction (de x) qui appartient à L^{q^*} et enfin
$$\Big(|g(x)|^{1-q/r}\Big)^{p^*} = \Big(|g(x)|^q\Big)^{p^*(1/q-1/r)} = \Big(|g(x)|^q\Big)^{p^*(1/p^*)} = |g(x)|^q,$$
donc le troisième facteur du membre de droite définit une fonction (de x) qui appartient à L^{p^*}. Ainsi l'inégalité de Hölder généralisée donne l'existence de $f * g$ presque partout et la majoration
$$\begin{aligned}|(f*g)(y)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)\,g(x)\,dx\right| \;&\leq\; \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y-x)|^p\,|g(x)|^q\,dx\right)^{1/r} \|f\|_p^{p/q^*}\ \|g\|_q^{q/p^*}\\ &=\; \Big((|f|^p * |g|^q)(y)\Big)^{1/r}\ \|f\|_p^{p/q^*}\ \|g\|_q^{q/p^*}\end{aligned}$$
En élevant les deux membres à la puissance r, on obtient
$$|(f*g)(y)|^r \leq (|f|^p * |g|^q)(y)\ \|f\|_p^{rp/q^*}\ \|g\|_q^{rq/p^*};$$
on en déduit l'intégrabilité du membre de gauche, vu encore une fois le cas $L^1 * L^1$ qui donne l'intégrabilité du membre de droite.

Finalement, l'inégalité entre les normes est obtenue directement à partir de l'inégalité ci-dessus et les liens entre p, q, p^*, q^*, r : on a
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(y)|^r\ dy \;&\leq\; \|f\|_p^{rp/q^*}\ \|g\|_q^{rq/p^*} \int_{\mathbb{R}^n} (|f|^p * |g|^q)(y)\ dy\\ &=\; \|f\|_p^{rp/q^*}\ \|g\|_q^{rq/p^*}\ \|f^p\|_1\ \|g^q\|_1\\ &=\; \|f\|_p^{rp/q^*}\ \|g\|_q^{rq/p^*}\ \|f\|_p^p\ \|g\|_q^q\end{aligned}$$

donc
$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p^{p(1/q^*+1/r)}\ \|g\|_q^{q(1/p^*+1/r)}.$$
Dès lors on conclut car
$$\frac{1}{q^*}+\frac{1}{r}=1-\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}\quad \text{et}\quad \frac{1}{p^*}+\frac{1}{r}=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}.$$
□

Examinons maintenant le cas où p, q, r peuvent être ∞. Lorsque p ou q est infini, on doit nécessairement avoir $r=\infty$ et q ou p égal à 1 ; ce cas a donc déjà été traité. Examinons donc le cas où $r=\infty$ avec p, q réels et $p, q \geq 1$.

Théorème 4.2.2. *Cas p, p^* réels tels que $p, p^* \geq 1$ et*
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1.$$
Dans ce cas, quels que soient $f \in L^p$, $g \in L^{p^*}$, le produit de composition est défini sur $\mathbb{R}^n$, y est borné, y est une fonction uniformément continue et tend vers 0 à l'infini.

Preuve. Ceci est une généralisation du cas $L^2 * L^2$, utilisant (évidemment) l'inégalité de Höder.

De fait, l'inégalité de Hölder fournit tout de suite l'existence partout et la bornation.

Examinons à présent la continuité uniforme. Quels que soient $y, h \in \mathbb{R}^n$, on a
$$\begin{aligned}
|(f*g)(y+h)-(f*g)(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \Big(g(y+h-x)-g(y-x)\Big)\ dx\right| \\
&\leq \|f\|_p\, \|g(y+h-.)-g(y-.)\|_{p^*} \\
&= \|f\|_p\, \|g(h+.)-g(.)\|_{p^*}
\end{aligned}$$
et on conclut en utilisant le théorème d'approximation.

Pour terminer, montrons la convergence vers 0 à l'infini ; ici encore c'est l'inégalité de Hölder qui va permettre de conclure, la technique de base restant celle utilisée pour le cas $L^2 * L^2$. Quels que soient $R>0$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on a
$$\begin{aligned}
|(f*g)(y)| &\leq \int_{|x|>R} |f(x)|\,|g(y-x)|\ dx\ +\ \int_{|x|\leq R} |f(x)|\,|g(y-x)|\ dx \\
&\leq \|g\|_{p^*}\left(\int_{|x|>R} |f(x)|^p\ dx\right)^{1/p}\ +\ \|f\|_p\left(\int_{|x|\leq R} |g(y-x)|^{p^*}\ dx\right)^{1/p^*}.
\end{aligned}$$
Soit alors $\varepsilon>0$; puisque $|f|^p \in L^1$, il existe alors $R_0>0$ tel que
$$\|g\|_{p^*}\left(\int_{|x|>R_0} |f(x)|^p\ dx\right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
On obtient donc
$$|(f*g)(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\left(\int_{|x|\leq R_0} |g(y-x)|^{p^*}\ dx\right)^{1/p^*} = \frac{\varepsilon}{2}+\left(\int_{|y-t|\leq R_0} |g(t)|^{p^*}\ dx\right)^{1/p^*}.$$

Comme $|g|^{p^*} \in L^1$ et comme

$$\lim_{y\to\infty} |g(t)|^{p^*} \chi_{\{u:|y-u|\leq R_0\}}(t) \;=\; 0$$

pour presque tout t, on a

$$\lim_{y\to\infty} \int_{|y-t|\leq R_0} |g(t)|^{p^*} \; dx \;=\; 0$$

et on conclut.□

4.3 Unités approchées de composition

Rappelons que, vu le théorème 4.2.1, on a $L^1 * L^q \subset L^q$ quel que soit le réel $q \geq 1$.

Théorème 4.3.1. *Soit une suite de fonctions f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) telle que*
- *$f_m \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_m \geq 0$ et $\|f_m\|_1 = 1$ pour tout m*
- *pour tout $R > 0$, on a*

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{|x|>R} f_m(x) \; dx \;=\; 0.$$

Alors quel que soit $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\lim_{m\to+\infty} f_m * f \;=\; f \quad \textit{dans} \quad L^q(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. On connaît le résultat pour $q = 1$. Supposons donc $q > 1$. La preuve se déroule encore une fois comme celle du cas $q = 2$, en utilisant l'inégalité de Hölder.

On a successivement

$$\begin{aligned}
\|f_m * f - f\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f_m * f)(y) - f(y)|^q \; dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) \; (f(y-x) - f(y)) \; dx \right|^q \; dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) \; |f(y-x) - f(y)| \; dx \right)^q dy.
\end{aligned}$$

Notre but (comme dans le cas L^2 encore) est maintenant d'appliquer adéquatement l'inégalité de Hölder à l'intégrale en x. Si q^* désigne le conjugué de q, écrivons alors

$$f_m(x) \; |f(y-x) - f(y)| \;=\; (f_m(x))^{1/q^*} \; (f_m(x))^{1/q} \, |f(y-x) - f(y)|$$

Cela étant, d'une part on a $f_m^{1/q^*} \in L^{q^*}$ car $f_m \in L^1$. D'autre part, montrons que la fonction $x \mapsto (f_m(x))^{1/q}|f(y-x) - f(y)|$ appartient à L^q pour presque tout y. Comme $f_m \in L^1$, il est clair que la fonction $x \mapsto (f_m(x))^{1/q} f(y)$ appartient à L^q ; par ailleurs, la fonction $x \mapsto (f_m(x))^{1/q} f(y-x)$ appartient aussi à L^q pour presque tout y vu le cas $L^1 * L^1$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) \; |f(y-x) - f(y)| \; dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (f_m(x))^{1/q^*} \, (f_m(x))^{1/q} \; |f(y-x) - f(y)| \; dx \\
&\leq \|f_m^{1/q^*}\|_{q^*} \; \left\| f_m^{1/q} \; |f(y-.) - f(y)| \right\|_q \\
&= \|f_m\|_1^{1/q^*} \; \left\| f_m^{1/q} \; |f(y-.) - f(y)| \right\|_q \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) \, |f(y-x) - f(y)|^q \; dx \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Tout cela pour finalement obtenir

$$\begin{aligned}
\|f_m * f - f\|_q^q &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) \ |f(y-x) - f(y)| \ dx \right)^q dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) \ |f(y-x) - f(y)|^q \ dx \right) dy.
\end{aligned}$$

La preuve se poursuit alors exactement comme dans les cas L^1, L^2 après avoir montré qu'ici encore on peut permuter l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale. On a

$$f_m(x) \ |f(y-x) - f(y)|^q \quad \leq \quad f_m(x) \, 2^q \ (|f(y-x)|^q + |f(y)|^q) \, .$$

La fonction $(x, y) \mapsto f_m(x)|f(y)|^q$ est intégrable par rapport aux deux variables comme produit de fonctions à variables séparées et intégration sur l'espace tout entier. Quant à la fonction $x \mapsto f_m(x)|f(y-x)|^q$, elle est également intégrable par rapport aux deux variables vu le cas $L^1 * L^1$.$\square$

Chapitre 5

Transformation de Fourier dans L^1

5.1 Définition et interprétation

Donnons tout d'abord l'introduction suivante, récupérée dans wikipedia.

En analyse, la transformation de Fourier est une extension, pour les fonctions non périodiques, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques. La transformation de Fourier associe à une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes, une autre fonction sur $\mathbb{R}$ appelée transformée de Fourier dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation.

La transformée de Fourier représente une fonction par la densité spectrale dont elle provient, en tant que moyenne de fonctions trigonométriques de toutes fréquences. La théorie de la mesure ainsi que la théorie des distributions permettent de définir rigoureusement la transformée de Fourier dans toute sa généralité, elle joue un rôle fondamental dans l'analyse harmonique.

Lorsqu'une fonction représente un phénomène physique, comme l'état du champ électromagnétique ou du champ acoustique en un point, on l'appelle signal et sa transformée de Fourier s'appelle son spectre.

Pour illustrer cette introduction, voir la fin de cette section.

Dans ce qui suit, on utilise la notation $< .,. >$ pour le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^n$, à savoir

$$< x, y > = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 5.1.1. *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$. La transformée de Fourier « négative » de f est la fonction*

$$\mathcal{F}^- f \; : \; y \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(x) \; dx$$

et la transformée de Fourier « positive » de f est la fonction

$$\mathcal{F}^+ f \; : \; y \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>} f(x) \; dx.$$

Pour la valeur en y de ces fonctions, on utilise les notations

$$\mathcal{F}_y^- f, \quad \mathcal{F}_y^+ f$$

ou encore

$$\left(\mathcal{F}^- f\right)(y), \quad \left(\mathcal{F}^+ f\right)(y).$$

Notons que cette définition a bien un sens puisque pour tout y, la fonction $x \mapsto e^{\pm i<x,y>} f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ puisqu'en module c'est $|f|$.

Remarque 5.1.2. *Pour toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^n$, on a*

$$\mathcal{F}_y^- f \;=\; \mathcal{F}_{-y}^+ f \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Il s'agit d'une simple écriture différente pour l'expression

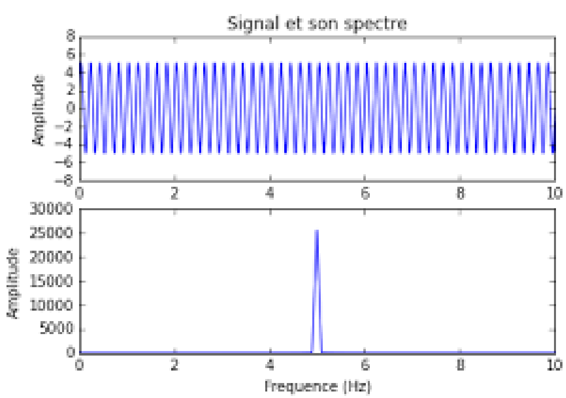
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,-y>} f(x)\, dx.$$

□

Pour illustrer un peu l'introduction qui met l'accent sur l'aspect fréquentiel de la transformation de Fourier, notons que, pour tout $r > 0$ (indispensable de recouper le cosinus, lequel n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$)

$$\mathcal{F}_y^{\pm}\left(\cos \chi_{[-r,r]}\right) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\sin(r(y+1))}{y+1} + \dfrac{\sin(r(y-1))}{y-1} & \text{si } y \neq 1,\ y \neq -1 \\ \dfrac{\sin(2r)}{2} + r & \text{si } y = 1 \text{ et si } y = -1 \end{cases}$$

La plus grande valeur de cette transformée de $x \mapsto \cos(\mathbf{1}x) = \cos(-\mathbf{1}x)$ est donc en -1 et 1, il y a ainsi un ≪ pic ≫ en ces points. En théorie des distributions où l'on peut vraiment prendre la transformée de Fourier de la distribution définie par le cosinus, on trouve effectivement les distributions de Dirac.



5.2 Exemples

Exemple(s) 5.2.1. *Transformation de Fourier de $\chi_{[a,b]}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ et de $e^{-a|.|}$ $(a > 0)$:*

$$\mathcal{F}_y^{\pm}\chi_{[a,b]} \;=\; \begin{cases} \dfrac{e^{\pm iby} - e^{\pm iay}}{\pm iy} & si\ y \neq 0 \\ b - a & si\ y = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_y^{\pm} e^{-a|.|} \;=\; \frac{2a}{y^2 + a^2}.$$

En particulier, pour tout $r > 0$, on a

$$\mathcal{F}_y^{\pm}\chi_{[-r,r]} = \begin{cases} \dfrac{2\sin(ry)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 2r & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Preuve. Ce sont des calculs immédiats d'intégrales simples. □

Le premier exemple montre que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est pas nécessairement intégrable. Lorsqu'on aura besoin de cette propriété, on devra donc donner des conditions suffisantes pour avoir cette intégrabilité. Dans la suite, nous donnons les deux résultats les plus courants, bien utiles.

Par ailleurs, ces deux exemples (ainsi que celui qui suit) conduisent à des transformées qui sont continues sur $\mathbb{R}$ et ont une limite nulle à l'infini. Ces propriétés sont en fait vraies pour toute transformée de Fourier de fonction intégrable, comme démontré dans la suite.

Voici alors un exemple qui se révèlera fondamental pour la suite, dans la preuve du théorème de Fourier.

Exemple(s) 5.2.2 (Le cas des fonctions gaussiennes)**.** *Pour tout $a > 0$ on définit la gaussienne g_a par*

$$g_a(x) = e^{-a|x|^2},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Cette fonction est intégrable et on a

$$\mathcal{F}^{\pm}g_a = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} g_{1/(4a)} \quad \text{partout.}$$

On en déduit que

$$\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm}g_a = (2\pi)^n\, g_a \quad \text{partout.}$$

Preuve. L'intégrabilité est claire : on a

$$g_a(x) = \prod_{j=1}^{n} e^{-ax_j^2}$$

avec $x \mapsto e^{-ax_j^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ quel que soit $j = 1, \ldots$.

Traitons le cas $n = 1$; on en déduira le cas général. Quel que soit $y \in \mathbb{R}$, on a directement (on se réfère à une intégrale « remarquable » obtenue par le théorème de dérivation des intégrales paramétriques et rappelée au début de ce syllabus),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^{\pm}g_a &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\, e^{-ax^2}\, dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} \cos(xy)\, e^{-ax^2}\, dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-y^2/(4a)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, g_{(4a)^{-1}}(y). \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}^n$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} g_a &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>}\, e^{-a|x|^2}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{\pm i x_j y_j}\, e^{-a x_j^2}\, dx \\
&= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{\pm i x_j y_j}\, e^{-a x_j^2}\, dx_j \\
&= \prod_{j=1}^n \mathcal{F}_{y_j}^{\pm} e^{-a.^2} \\
&= \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-y_j^2/(4a)} \\
&= \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^n e^{-|y|^2/(4a)} \\
&= \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^n g_{(4a)^{-1}}(y).
\end{aligned}$$

On vient donc de voir que la transformée de Fourier d'une gaussienne est un multiple d'une gaussienne. Reprenons alors la transformée de Fourier de cette transformée de Fourier, en utilisant l'expression générale qui vient d'être trouvée. Quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a successivement [1]

$$\mathcal{F}_x^{\mp} \mathcal{F}^{\pm} g_a \;=\; \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^n \mathcal{F}_x^{\mp} g_{(4a)^{-1}} \;=\; \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^n \left(\sqrt{\frac{\pi}{(4a)^{-1}}}\right)^n g_{(4(4a)^{-1})^{-1}}(x) \;=\; (2\pi)^n\, g_a(x)$$

et on conclut.$\square$

5.3 Premières propriétés

Propriété(s) 5.3.1. *(1) La transformation de Fourier est un opérateur linéaire.*

(2) La transformée de Fourier d'une fonction intégrable f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^n$ car on a

$$|\mathcal{F}_y f| \;\leq\; \|f\|_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

(3) La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

(4) (Riemann-Lebesgue) La transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers 0 à l'infini.

Preuve. (1) C'est immédiat vu la linéarité de l'intégration.

(2) C'est immédiat car le module d'une exponentielle imaginaire pur est égal à 1 :

$$|\mathcal{F}_y f| \;=\; \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>} f(x)\, dx \right| \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{\pm i<x,y>} \right| |f(x)|\, dx \;=\; \|f\|_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

1. Ici, les deux transformées de Fourier $\pm$ sont les mêmes car une gaussienne est paire ; cependant, pour le théorème de Fourier en toute généralité, cela ne sera pas toujours le cas et il importera de respecter l'alternance des ≪ signes ≫

(3) Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a successivement

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}^{\pm}_{y+h} f - \mathcal{F}^{\pm}_{y} f\right| &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{\pm i<y+h,x>} - e^{\pm i<y,x>}\right) f(x)\, dx \right| \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<y,x>} \left(e^{\pm i<h,x>} - 1\right) f(x)\, dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{\pm i<h,x>} - 1\right| |f(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Cela étant, comme

$$\left| e^{\pm i<h,x>} - 1\right| |f(x)| \;\leq\; 2\,|f(x)| \quad \forall h$$

et

$$\lim_{h\to 0} \left| e^{\pm i<h,x>} - 1\right| \;=\; 0 \quad \forall x$$

on a

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{\pm i<h,x>} - 1\right| |f(x)|\, dx \;=\; 0$$

donc

$$\lim_{h\to 0} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}^{\pm}_{y+h} f - \mathcal{F}^{\pm}_{y} f\right| \;=\; 0.$$

(4) Traitons tout d'abord le cas $n = 1$. Pour tout $y \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\pm}_{y} f &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} f(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm i(t+\pi/y)y} f\left(t + \frac{\pi}{y}\right) dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}} e^{\pm ity} f\left(t + \frac{\pi}{y}\right) dt.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\pm}_{y} f &= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} f(x)\, dx \;-\; \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ity} f\left(t + \frac{\pi}{y}\right) dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{y}\right)\right) dx
\end{aligned}$$

donc

$$\left|\mathcal{F}^{\pm}_{y} f\right| \;\leq\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{y}\right)\right| dx.$$

Comme f est intégrable, le théorème d'approximation (une de ses conséquences plutôt) donne la conclusion.

Le cas général s'inspire du cas $n = 1$. De fait, pour tout j et tout $y_j \neq 0$, les mêmes calculs mais avec le changement de variable linéaire[2] $x = t + (\pi/y_j)e^{(j)}$ on a

$$\left|\mathcal{F}^{\pm}_{y} f\right| \;\leq\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{y_j}e^{(j)}\right)\right| dx.$$

2. $e^{(j)}$ est l'élément de $\mathbb{R}^n$ donc toutes les composantes sont nulles sauf la numéro j, qui vaut 1

Soit alors $\varepsilon > 0$. Ici encore, le théorème d'approximation (une de ses conséquences plutôt) donne $\eta > 0$ tel que

$$|h| \leq \eta \;\Rightarrow\; \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+h)| \; dx \;\leq\; \varepsilon.$$

Par ailleurs, pour tout $r > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $|y| \geq r$, il existe j tel que $|y_j| \geq r/\sqrt{n}$ (sinon $|y_j|^2 < r^2/n$ pour tout j donc $|y|^2 < r^2$) ou encore

$$\frac{\pi}{|y_j|} \;\leq\; \frac{\pi\sqrt{n}}{r}.$$

Dès lors, avec r défini par

$$\eta \;=\; \frac{\pi\sqrt{n}}{r}$$

on obtient

$$|y| \;\geq\; r \;\Rightarrow\; |y_j| \geq r/\sqrt{n} \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{|y_j|} = \left|\frac{\pi}{y_j} e^{(j)}\right| \;\leq\; \eta$$

donc

$$\left|\mathcal{F}_y^{\pm} f\right| \;\leq\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{y_j} e^{(j)}\right)\right| \; dx \;\leq\; \varepsilon$$

et on conclut. □

5.4 Transfert et produit de composition

Propriété(s) 5.4.1 (Produit de composition)**.** *Si f et g sont intégrables alors*

$$\mathcal{F}^{\pm}(f * g) \;=\; \mathcal{F}^{\pm} f \times \mathcal{F}^{\pm} g \quad \textit{partout.}$$

Preuve. Vu les résultats concernant le produit de composition de fonctions intégrables, on sait que $f * g$ existe et est une fonction intégrable ; on a même que la fonction de $2n$ variables $(y,t) \mapsto f(t)\, g(y-t)$ est intégrable. On a alors directement, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_x^{\pm}(f * g) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>}\, (f * g)(y)\; dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, g(y-t)\; dt\right)\; dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>}\, g(y-t)\; dy\right)\; dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,t+u>}\, g(u)\; du\right)\; dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,t>} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,u>}\, g(u)\; du\right)\; dt \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,u>}\, g(u)\; du\right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,t>}\, f(t)\; dt\right) \\
&= \mathcal{F}_x^{\pm} g \times \mathcal{F}_x^{\pm} f.
\end{aligned}$$

□

Propriété(s) 5.4.2 (Transfert). *Si f et g sont intégrables alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x^{\pm} f \; g(x) \; dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \; \mathcal{F}_x^{\pm} g \; dx$$

Preuve. Il est clair que les deux membres de l'égalité ont un sens car le produit d'une fonction intégrable par une fonction bornée est intégrable.

Cela étant, une simple permutation de l'ordre d'intégration permet de conclure. De fait, la fonction $x \mapsto |f(y)|\,|g(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{2n}$ et on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x^{\pm} f \; g(x) \; dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>} f(y) \; dy \right) \; g(x) \; dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>} g(x) \; dx \right) \; f(y) \; dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_y^{\pm} g \; f(y) \; dy
\end{aligned}$$

□

5.5 Dérivation et transformation de Fourier

Propriété(s) 5.5.1. *(1) Si $f \in C_L(\mathbb{R}^n)$ et si $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ quel que soit le multi-indice α tel que $|\alpha| \leq L$ alors*

$$\mathcal{F}_y^{\pm} D^\alpha f \;=\; (\mp iy)^\alpha \, \mathcal{F}_y^{\pm} f$$

(2) Si les fonctions $x \mapsto x^\alpha f(x)$ ($|\alpha| \leq L$) sont intégrables, alors $\mathcal{F}^{\pm} f \in C_L(\mathbb{R}^n)$ et, quel que soit le multi-indice α tel que $|\alpha| \leq L$, on a

$$D^\alpha \mathcal{F}_y^{\pm} f \;=\; (\pm i)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \, e^{\pm i<x,y>} f(x) \; dx.$$

Preuve. (1) Pour $L = 1$ et pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a directement (ce qui se simplifie bien sûr si $n = 1$),

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{\pm} D_j f &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>} D_j f(x) \; dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\pm i<x,y>} D_j f(x) \; dx_j \right) \; dx_1 \ldots [dx_j] \ldots dx_n \\
&= (\mp i y_j) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\pm i<x,y>} f(x) \; dx_j \right) \; dx_1 \ldots [dx_j] \ldots dx_n \\
&= (\mp i y_j) \, \mathcal{F}_y^{\pm} f
\end{aligned}$$

puisque, dans l'intégration par parties, les termes intégrés sont nuls. Le cas général s'effectue de même, en répétant la manoeuvre précédente.

(2) L'expression

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i<x,y>} f(x) \; dx$$

est une intégrale paramétrique. Dans le cas présent, vu les hypothèses données, celles du théorème de dérivation sont clairement satisfaites et ainsi on obtient la dérivabilité et l'expression des dérivées en permutant dérivée et intégrale. □.

5.6 Intégration et transformation de Fourier

Propriété(s) 5.6.1. *Si une fonction intégrable est bornée et de transformée de Fourier à valeurs positives, alors sa transformée de Fourier est intégrable.*

Preuve. Soit f une telle fonction. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$f_m(x) \ = \ e^{-|x|^2/m}\, \mathcal{F}_x^{\pm} f.$$

Comme $\mathcal{F}^{\pm} f$ est à valeurs positives, cette suite est croissante ; de plus, elle converge partout vers $\mathcal{F}^{\pm} f$. Pour conclure à l'intégrabilité de cette limite ponctuelle, il suffit (par le théorème de Lévi (convergence monotone)) de montrer que les intégrales des f_m sont bornées indépendamment de m. Et c'est bien le cas car on a successivement

$$\begin{aligned}
0 \ \leq \ \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x)\, dx \ &= \ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/m}\ \mathcal{F}_x^{\pm} f\ dx \\
&= \ \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x^{\pm}\left(e^{-|.|^2/m}\right) f(x)\ dx \quad \text{(transfert)} \\
&= \ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\pi}{1/m}\right)^{n/2} e^{-m|x|^2/4}\ f(x)\ dx \quad \text{(transf. de Fourier d'une gaussienne)} \\
&= \ \pi^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|t|^2/4}\ f(t/\sqrt{m})\ dt \quad \text{(chgt. de var. } \sqrt{m}\, x = t) \\
&= \ \pi^{n/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|t|^2/4}\ f(t/\sqrt{m})\ dt \right| \\
&\leq \ \pi^{n/2}\ \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|t|^2/4}\ dt.
\end{aligned}$$

□

Propriété(s) 5.6.2. *Si $f \in C_{n+1}(\mathbb{R}^n)$ est tel que $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq n+1$, alors $\mathcal{F}^{\pm} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Notons tout d'abord que l'on a la continuité de la fonction dont on veut montrer l'intégrabilité.

Cela étant, pour $n = 1$ c'est immédiat car

$$|x|^2\, \left|\mathcal{F}_x^{\pm} f\right| \ = \ \left|x^2\, \mathcal{F}_x^{\pm} f\right| \ = \ \left|\mathcal{F}_x^{\pm} D^2 f\right| \ \leq \ C \quad \forall x$$

donc, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\left|\mathcal{F}_x^{\pm} f\right| \ \leq \ \frac{C}{x^2}$$

et on conclut étant donné l'intégrabilité de $x \mapsto 1/x^2$ à l'infini.

Pour le cas $n > 1$, pour imiter ce qui se passe pour $n = 1$, on doit regarder comment estimer $|x|^{|\alpha|}\, |\mathcal{F}_x^{\pm} f|$ en utilisant les égalités $|x^\alpha\ \mathcal{F}_x^{\pm} f| = |\mathcal{F}_x^{\pm} D^\alpha f|$. Nous allons alors regarder comment se comparent

$$|x|^M \quad \text{et} \quad g_M(x) = \sum_{|\alpha|=M} |x^\alpha|$$

pour M naturel strictement positif. Pour rappel, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ et $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$. Posons

$$S \ = \ \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| = 1\}\,.$$

L'ensemble S est un compact de $\mathbb{R}^n$ et

$$g_M(x) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^M + \sum_{|\alpha|=M \text{et au moins deux } \alpha_j \neq 0} |x^\alpha| > 0$$

pour tout $x \in S$; dès lors

$$\inf_{x\in S} g_M(x) = r_M > 0.$$

Ainsi, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{g_M(x)}{|x|^M} = \sum_{|\alpha|=M} \frac{|x^\alpha|}{|x|^{\alpha_1}\ldots|x|^{\alpha_n}} = \sum_{|\alpha|=M} \frac{|x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}|}{|x|^{\alpha_1}\ldots|x|^{\alpha_n}} = \sum_{|\alpha|=M} \left| \frac{x_1^{\alpha_1}}{|x|^{\alpha_1}} \cdots \frac{x_n^{\alpha_n}}{|x|^{\alpha_n}} \right| = g_M(x^*)$$

avec

$$x^* = \left(\frac{x_1}{|x|}, \ldots, \frac{x_n}{|x|}\right) \quad \text{tel que} \quad |x^*| = 1 \quad (\text{donc } x^* \in S);$$

on obtient donc

$$\frac{g_M(x)}{|x|^M} = g_M(x^*) \geq r_M$$

ce qui est équivalent à

$$g_M(x) = \sum_{|\alpha|=M} |x^\alpha| \geq r_M\, |x|^M;$$

notons que cette dernière inégalité est bien sûr toujours valable si $x = 0$.

On obtient donc, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|x|^{n+1} \left|\mathcal{F}_x^\pm f\right| \leq \frac{1}{r_{n+1}} \sum_{|\alpha|=n+1} |x^\alpha| \left|\mathcal{F}_x^\pm f\right| = \frac{1}{r_{n+1}} \sum_{|\alpha|=n+1} \left|\mathcal{F}_x^\pm D^\alpha f\right|$$

et on conclut comme dans le cas $n = 1$ car vu le changement de variable en coordonnées polaires [3], la fonction $x \mapsto 1/(1 + |x|^{n+1})$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. □

5.7 Théorème de Fourier

Théorème 5.7.1. *Si f est intégrable et de transformée de Fourier intégrable, on a*

$$\mathcal{F}^\mp \mathcal{F}^\pm f = (2\pi)^n f$$

presque partout. Cette égalité est valable partout si f est continu sur $\mathbb{R}^n$.

3. Pour rappel, pour quelles valeurs du réel s la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1 + |x|^s}$$

est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^n$? Vu le changement de variable en coordonnées polaires dont le déterminant jacobien est un produit de fonctions sinus, cosinus et de r^{n-1}, à considérer sur un produit cartésien d'intervalles bornés pour les fonctions trigonométriques et de $]0, +\infty[$ pour ce qui est de la variable r, on obtient donc que la fonction ci-dessus est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $s - n + 1 \geq 0$ puisque on doit examiner l'intégrabilité en $+\infty$ de $r \mapsto r^{n-1}/(1 + r^s)$.

Preuve. Pour démontrer cela, on utilise une unité approchée de composition formée de gaussiennes. Soit

$$g(x) \;=\; \pi^{-n/2}\, e^{-|x|^2} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Cette fonction est intégrable, à valeurs positives et d'intégrale égale à 1 ; il s'ensuit que les fonctions g_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définies par $g_m(x) = m^n g(mx)$ forment une unité approchée de composition. Dès lors, on a

$$\lim_{m\to+\infty} F * g_m \;=\; F \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^n)$$

quelle que soit la fonction $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\lim_{m\to+\infty} F * g_m \;=\; F$$

uniformément sur $\mathbb{R}^n$ quelle que soit la fonction F bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

Cela étant, le théorème étant exact pour les gaussiennes (voir l'exemple 5.2.2), quel que soit m, on a

$$f * g_m \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\, f * \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} g_m.$$

Le coeur technique de la preuve consiste à montrer que (penser au transfert !), quel que soit m, on a

$$f * \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} g_m \;=\; (\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f) * g_m. \qquad (*)$$

Si on a effectivement cela, alors on conclut rapidement. De fait, en utilisant les rappels précédents concernant les unités approchées de composition, on a d'une part

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{m\to+\infty} (\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f) * g_m \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\, \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f$$

uniformément sur $\mathbb{R}^n$ et d'autre part

$$\lim_{m\to+\infty} f * g_m \;=\; f$$

dans L^1 donc presque partout pour une sous-suite. Par unicité de la limite presque partout, à partir des égalités

$$f * g_m \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\, f * \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} g_m \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\, (\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f) * g_m$$

on obtient dès lors

$$f \;=\; \frac{1}{(2\pi)^n}\, \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f$$

presque partout.

Montrons donc que l'on a (*). Il s'agit effectivement d'utiliser le transfert, mais dans un contexte un peu différent du résultat « brut » lui même car des translations interviennent. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a successivement

$$\begin{aligned}
\left(f * \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} g_m\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\ \mathcal{F}^{\mp}_y \mathcal{F}^{\pm} g_m\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{\mp}_y\left(f(x-.)\right)\ \mathcal{F}^{\pm}_y g_m\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{\mp i<x,y>}\ \mathcal{F}^{\pm}_y f\right)\ \mathcal{F}^{\pm}_y g_m\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{\pm}_y\left(e^{\mp i<x,.>}\ \mathcal{F}^{\pm}_{.} f\right)\ g_m(y)\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mp i<t,x-y>}\ \mathcal{F}^{\pm}_t f\ dt\right)\ g_m(y)\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{\mp}_{x-y}\mathcal{F}^{\pm} f \quad g_m(y)\ dy \\
&= \left(\left(\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f\right) *\ g_m\right)(x)
\end{aligned}$$

donc on peut conclure. □

5.8 ≪ Transition ≫ pour L^2

Propriété(s) 5.8.1. *(1) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathcal{F}^{\pm} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(2) Quels que soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$< \mathcal{F}^{\pm} f, \mathcal{F}^{\pm} g > = (2\pi)^n < f, g > .$$

En particulier

$$\left\|\mathcal{F}^{\pm} f\right\|_2^2 = (2\pi)^n \|f\|_2^2 \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. (1) On a

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{F}^{\pm}_y f\right|^2 &= \mathcal{F}^{\pm}_y f \times \overline{\mathcal{F}^{\pm}_y f} \\
&= \mathcal{F}^{\pm}_y f \times \mathcal{F}^{\pm}_y\left(\overline{f}(-.)\right) \\
&= \mathcal{F}^{\pm}_y\left(f * \overline{f}(-.)\right).
\end{aligned}$$

Cela étant, comme la fonction intégrable $f * \overline{f}(-.)$ est aussi bornée (composée de deux fonctions de carré intégrable) et comme sa transformée de Fourier est à valeurs positives (elle vaut $|\mathcal{F}^{\pm} f|^2$ vu le calcul précédent), on a l'intégrabilité de cette transformée. Il s'ensuit donc que $\mathcal{F}^{\pm} f$ est de carré intégrable.

(2) Comme dans le cas (1), on a

$$\mathcal{F}^{\pm}_y f \times \overline{\mathcal{F}^{\pm}_y g} = \mathcal{F}^{\pm}_y\left(f * \overline{g}(-.)\right)$$

donc

$$< \mathcal{F}^{\pm} f, \mathcal{F}^{\pm} g > = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{\pm}_y\left(f * \overline{g}(-.)\right)\ dy = \mathcal{F}_0\mathcal{F}^{\pm}\left(f * \overline{g}(-.)\right).$$

Comme la fonction $f * \overline{g}(-.)$ est continue (produit de composition de deux fonctions de carré intégrable), l'égalité dans le théorème de Fourier est une égalité partout ; ainsi on obtient

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}^{\pm} f, \mathcal{F}^{\pm} g > &= \mathcal{F}_0 \mathcal{F}^{\pm} \left(f * \overline{g}(-.) \right) \\ &= (2\pi)^n \, \left(f * \overline{g}(-.) \right)(0) \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \overline{g}(x) \, dx \\ &= (2\pi)^n \, < f, g > . \end{aligned}$$

□

Chapitre 6

Transformation de Fourier dans L^2

Voir aussi le cours enseigné et les notes de J. Schmets (chapitre 8)

6.1 Définition

La définition de la transformation de Fourier pour les fonctions de carré intégrable utilise la transformation de Fourier des fonctions intégrables et est telle que si la fonction est à la fois intégrable et de carré intégrable, les transformations de Fourier soient les mêmes.

Cela étant, rappelons tout d'abord deux résultats vus précédemment, essentiels pour la suite ici.

Propriété(s) 6.1.1. *(1) Si f, g sont intégrables et de carré intégrable alors $\mathcal{F}^{\pm} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}^{\pm} g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et on a*

$$< \mathcal{F}^{\pm} f, \mathcal{F}^{\pm} g > = (2\pi)^n < f, g > .$$

En particulier

$$\left\| \mathcal{F}^{\pm} f \right\|_2^2 = (2\pi)^n \left\| f \right\|_2^2 \quad \forall f \in L^1 \cap L^2.$$

(2) (Cas particulier du théorème d'approximation cas régulier) Pour toute fonction de carré intégrable f et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact telle que

$$\| f - \varphi \|_2 \leq \varepsilon.$$

Preuve. Voir précédemment. □

Propriété(s) 6.1.2. *Soit $f$une fonction de carré intégrable et soit f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors la suite $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et la limite ne dépend pas de la suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Tout est direct et naturel. De fait, si f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors la suite $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ est une suite de fonctions de carré intégrable qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ car le critère de Cauchy s'applique étant donné qu'on a

$$\left\| \mathcal{F}^{\pm} f_p - \mathcal{F}^{\pm} f_q \right\|^2 = (2\pi)^n \left\| f_p - f_q \right\|^2$$

quels que soient les naturels p, q.

Soit maintenant des suites f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ et g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de fonctions intégrables et de carré intégrable qui convergent vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; on note respectivement F, G leur limite dans $L^2(\mathbb{R})$. La suite h_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ définie par $h_{2m} = f_m$ et $h_{2m+1} = g_m$ quel que soit m est alors encore une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; on note H sa limite. Comme les suites f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ et g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ sont des sous-suites de la suite h_m $(m \in \mathbb{N}_0)$, on obtient

$$F \;=\; H \quad \text{et} \quad G \;=\; H$$

et on conclut. □

Définition 6.1.3. *Soit f une fonction de carré intégrable. La transformée de Fourier de cette fonction est la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de toute suite $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ où f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cette limite est notée*

$$\mathbb{F}^{\pm} f.$$

Remarque 6.1.4. *Si f est intégrable et de carré intégrable, alors*

$$\mathcal{F}^{\pm} f \;=\; \mathbb{F}^{\pm} f$$

car la fonction $\mathbb{F}^{\pm} f$ peut être définie à partir de la suite $f_m = f$ $(m \in \mathbb{N}_0)$.

6.2 Cas $n = 1$ et exemple

Propriété(s) 6.2.1 (Cas pratique pour $n = 1$)**.** *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors la suite $f_m = f\chi_{[-m,m]}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ est une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ donc*

$$\mathbb{F}^{\pm}_y f \;=\; \lim_{m \to +\infty} \int_{-m}^{m} e^{\pm ixy} f(x)\; dx$$

dans $L^2(\mathbb{R})$.

Il s'ensuit que si la suite[1] *$\int_{-m}^{m} e^{\pm ixy} f(x)\; dx$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge presque partout vers une fonction $G^{\pm}$, alors $G^{\pm} = \mathbb{F}^{\pm} f$ presque partout.*

Preuve. Pour tout m, la fonction f_m est effectivement intégrable comme produit de deux fonctions de carré intégrable et aussi de carré intégrable car en module majorée par une fonction qui l'est.

On a également la convergence dans L^2. De fait, pour tout m on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)|^2 \;\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{-m} |f|^2 \;\, dx \;+\; \int_{m}^{+\infty} |f|^2 \;\, dx$$

donc

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)|^2 \;\, dx \;=\; \lim_{m \to +\infty} \int_{-\infty}^{-m} |f|^2 \;\, dx \;+\; \lim_{m \to +\infty} \int_{m}^{+\infty} |f|^2 \;\, dx \;=\; 0$$

puisque $|f|^2$ est intégrable.

Comme la suite $\mathcal{F}^{\pm} f_m = \int_{-m}^{m} e^{\pm ix\cdot} f(x)\; dx$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge dans L^2 vers $\mathbb{F}^{\pm} f$, une sous-suite converge aussi ponctuellement vers $\mathbb{F}^{\pm} f$. On obtient donc $G^{\pm} = \mathbb{F}^{\pm} f$. □

1. penser aux intégrales fléchées !

Exemple(s) 6.2.2. *Pour la fonction f définie par*

$$f(x) \;=\; \frac{\sin(x)}{x}$$

(qui est de carré intégrable mais n'est pas intégrable), on a

$$\mathbb{F}^{\pm} f \;=\; \pi\, \chi_{[-1,1]}.$$

Preuve. C'est direct en utilisant la suite $f_m = f \chi_{[-m,m]}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) pour définir $\mathbb{F}^{\pm} f$ et la valeur de l'intégrale fléchée

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(rx)}{x}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2} \quad \forall r > 0.$$

On a en effet successivement

$$\begin{aligned}
\int_{-m}^{m} e^{\pm ixy} \frac{\sin(x)}{x}\, dx &= 2 \int_0^m \cos(xy) \frac{\sin(x)}{x}\, dx \\
&= \int_0^m \frac{\sin(x+xy) + \sin(x-xy)}{x}\, dx \\
&= \int_0^m \frac{\sin(x(1+y))}{x}\, dx \;+\; \int_0^m \frac{\sin(x(1-y))}{x}\, dx
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(x(1+y))}{x}\, dx &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } y > -1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } y < -1 \end{cases} \\
\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(x(1-y))}{x}\, dx &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } y < 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } y > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dès lors, sauf en -1 et 1 pour la dernière égalité, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^{\pm}_y f &= \lim_{m\to+\infty} \int_{-m}^{m} e^{\pm ixy} \frac{\sin(x)}{x}\, dx \\
&= \int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(x(1+y))}{x}\, dx + \int_0^{\to+\infty} \frac{\sin(x(1-y))}{x}\, dx \\
&= \pi\, \chi_{[-1,1]}(y).
\end{aligned}$$

□

6.3 Propriétés de base

Théorème 6.3.1 (Théorème de Fourier)**.** *Pour toute fonction f de carré intégrable, on a*

$$\mathbb{F}^{\pm}\mathbb{F}^{\mp} f \;=\; (2\pi)^n\, f.$$

Preuve. Soit f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) une suite de fonctions intégrables et de carré intégrable qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On a donc

$$\mathbb{F}^{\pm} f \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm} f_m$$

dans $L^2(\mathbb{R})$. La suite $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite de fonctions de carré intégrable ; dès lors, si les $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ étaient également intégrables, on pourrait se servir de cette suite pour définir la transformée de Fourier de $\mathbb{F}^{\pm}$. Et pour avoir cela, il suffit de prendre $f_m \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact (et c'est possible vu le théorème d'approximation rappelé ci-dessus). On obtient donc

$$\mathbb{F}^{\mp}\mathbb{F}^{\pm}f \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm}f_m \;=\; (2\pi)^n \lim_{m\to+\infty} f_m \;=\; (2\pi)^m\, f.$$

□

Propriété(s) 6.3.2. *(1) L'opérateur*

$$\mathbb{F}^{\pm}\; L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \quad f \mapsto \mathbb{F}^{\pm}f$$

est linéaire, bijectif.

(2) Quels que soient les fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$< \mathbb{F}^{\pm}f, \mathbb{F}^{\pm}g > \;=\; (2\pi)^n \;< f, g > .$$

En particulier,

$$\left\|\mathbb{F}^{\pm}f\right\| \;=\; (2\pi)^{(n/2)}\; \|f\|\,,$$

ce qui implique que cette transformation de Fourier est un isomorphisme[2]*.*

Preuve. (1) Vu la définition de la transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable, il est clair que l'opérateur est bien à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$.

La linéarité s'obtient aussi directement en repassant à la définition. De fait, soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{C}$. Si f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ et g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ sont des suites de fonctions de $L^1 \cap L^2$ qui convergent dans L^2 respectivement vers f et g, alors les suites $f_m + g_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ et cf_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ sont des suites de fonctions de $L^1 \cap L^2$ qui convergent dans L^2 respectivement vers $f + g$ et cf. Vu l'indépendance de la suite choisie pour définir la transformation de Fourier dans L^2, on a donc

$$\mathbb{F}^{\pm}(f+g) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm}(f_m + g_m) \quad \text{et} \quad \mathbb{F}^{\pm}(cf) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm}(cf_m).$$

La linéarité de la transformation de Fourier des fonctions intégrables donne alors le résultat :

$$\mathbb{F}^{\pm}(f+g) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm}(f_m + g_m) \;=\; \lim_{m\to+\infty} (\mathcal{F}^{\pm}f_m + \mathcal{F}^{\pm}g_m) \;=\; \mathbb{F}^{\pm}f + \mathbb{F}^{\pm}g$$

et

$$\mathbb{F}^{\pm}(cf) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm}(cf_m) \;=\; c \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm}f_m \;=\; c\,\mathbb{F}^{\pm}f.$$

L'opérateur est aussi clairement injectif et surjectif en vertu du théorème de Fourier : d'une part si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est telle que $\mathbb{F}^{\pm}f = 0$, alors $0 = \mathbb{F}^{\mp}\mathbb{F}^{\pm}f = (2\pi)^n\, f$ donc $f = 0$; d'autre part, si $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $f = (2\pi)^{-n}\, \mathbb{F}^{\mp}g$ donne $\mathbb{F}^{\pm}f = (2\pi)^{-n}\, \mathbb{F}^{\pm}\mathbb{F}^{\mp}g = g$.

(2) Soient f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ et g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ des suites de fonctions de $L^1 \cap L^2$ qui convergent dans L^2 respectivement vers f et g. Cela étant, puisque les fonctions f_m et g_m sont à la fois intégrables et de carré intégrable, on sait que

$$< \mathcal{F}^{\pm}f_m, \mathcal{F}^{\pm}g_m > \;=\; (2\pi)^n \;< f_m, g_m > .$$

La convergence dans L^2 des suites $\mathcal{F}^{\pm}f_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, $\mathcal{F}^{\pm}g_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$, g_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ vers $\mathbb{F}^{\pm}f$, $\mathbb{F}^{\pm}g$, f, g respectivement donne alors

$$< \mathbb{F}^{\pm}f, \mathbb{F}^{\pm}g > \;=\; \lim_{m\to+\infty} < \mathcal{F}^{\pm}f_m, \mathcal{F}^{\pm}g_m > \;=\; (2\pi)^n \lim_{m\to+\infty} < f_m, g_m > \;=\; (2\pi)^n \;< f, g > .$$

□

2. au sens topologique du terme, à savoir continu et d'inverse continu

Chapitre 7

Suites orthonormées dans un espace de Hilbert

7.1 Définitions et propriétés de base des suites orthonormées

Voir aussi le cours enseigné et les notes de J. Schmets (chapitre 10, sections 1,2,3)

On se place dans un espace de Hilbert H, on note $< .,. >$ le produit scalaire et $\|.\|$la norme associée. Si e, f sont deux éléments de H, on dit qu'ils sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Cela étant, on généralise les résultats liés à Pythagore et aux projections orthogonales dans un espace de dimension finie comme suit.

Propriété(s) 7.1.1 (Pythagore généralisé)**.** *Si des éléments $f_1, \ldots, f_M$ de H sont orthogonaux deux à deux alors*

$$\left\| \sum_{m=1}^{M} f_m \right\|^2 = \sum_{m=1}^{M} \|f_m\|^2.$$

On en déduit que si f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ sont des éléments de H orthogonaux deux à deux alors la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} f_m$$

converge dans H si et seulement si la série numérique

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \|f_m\|^2$$

converge, auquel cas on a

$$\left\| \sum_{m=1}^{+\infty} f_m \right\|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \|f_m\|^2.$$

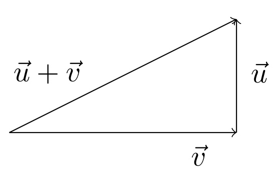
Preuve. Par définition de la norme à partir du produit scalaire et en utilisant l'hypothèse, on a directement

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{m=1}^{M} f_m\right\|^2 &= < \sum_{m=1}^{M} f_m, \sum_{j=1}^{M} f_j > \\
&= \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} < f_m, f_j > \\
&= \sum_{m=1}^{M} < f_m, f_m > \\
&= \sum_{m=1}^{M} \|f_m\|^2.
\end{aligned}$$

Prenons maintenant une suite f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ dont les éléments sont orthogonaux deux à deux. Comme H est un espace de Hilbert, la série dont il est question est convergente si et seulement si elle est de Cauchy, de même que pour la série numérique. Cela étant, vu ce qui précède, pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$, $p < q$, on a

$$\left\|\sum_{m=p}^{q} f_m\right\|^2 = \sum_{m=p}^{q} \|f_m\|^2$$

et on conclut directement. □



$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \vec{v}\|^2$$

Théorème 7.1.2 (Projection orthogonale généralisée). *Soit f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite d'éléments de H, orthogonaux deux à deux et normés. Alors pour tout $f \in H$, il existe des coefficients uniques c_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ et $g_f \in H$ uniques tels que*

$$f = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m f_m + g_f \quad \text{dans } H \quad \text{et} \quad < g, f_m >= 0 \ \forall m;$$

on a même

$$c_m =< f, f_m > \quad \forall m.$$

Il s'ensuit que, pour tous $f, h \in H$, on a

$$< f, h > = \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \overline{< h, f_m >} + < g_f, g_h >$$

et en particulier

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} | < f, f_m > |^2 + \|g_f\|^2.$$

Preuve. Rappelons que la convergence dans H de la série $\sum_{m=1}^{+\infty} c_m f_m$ est équivalente à la convergence dans $\mathbb{R}$ de la série $\sum_{m=1}^{+\infty} |c_m|^2$.

Cela étant, prouvons l'unicité. Supposons que, dans H, on ait

$$f \;=\; \sum_{m=1}^{+\infty} c_m f_m \;+\; g_f \;=\; \sum_{m=1}^{+\infty} c'_m f_m \;+\; g'_f$$

avec g_f et g'_f orthogonaux à chacun des f_k. Quel que soit j, on a alors

$$< f, f_j > = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m < f_m, f_j > \;+\; < g_f, f_j >= \sum_{m=1}^{+\infty} c'_m < f_m, f_j > \;+\; < g'_f, f_j > = \; c_j \;=\; c'_j$$

donc aussi

$$g_f \;=\; f - \sum_{m=1}^{+\infty} c_m f_m \;=\; f - \sum_{m=1}^{+\infty} c'_m f_m \;=\; g'_f.$$

Montrons alors que la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > f_m$$

converge et que

$$g \;=\; f - \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > f_m$$

est orthogonal à chacun des f_k.
Pour tout M, posons

$$S_M \;=\; \sum_{m=1}^{M} < f, f_m > f_m.$$

Quels que soient $M, k \in \mathbb{N}_0$ avec $k \leq M$, on a

$$< f - S_M, f_k > = < f, f_k > - \sum_{m=1}^{M} < f, f_m >< f_m, f_k > = < f, f_k > - < f, f_k > = \; 0$$

donc, par Pythagore

$$\|f\|^2 \;=\; \|f - S_M + S_M\|^2 \;=\; \|f - S_M\|^2 + \sum_{m=1}^{M} | < f, f_m > |^2$$

puisque les éléments $f - S_M,\; f_1, \ldots, f_M$ sont orthogonaux deux à deux. Il s'ensuit que

$$\sum_{m=1}^{M} | < f, f_m > |^2 \;\leq\; \|f\|^2 \quad \forall M$$

donc la série $\sum_{m=1}^{+\infty} | < f, f_m > |^2$ est convergente, ce qui est équivalent à la convergence de la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > f_m.$$

Pour conclure, il reste donc à prouver que

$$g \ = \ f - \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \ f_m \ = \ f - \lim_{M \to +\infty} S_M$$

est orthogonal à chacun des f_k. C'est direct car, quel que soit $M \in \mathbb{N}_0$ avec $k \leq M$, on a

$$< f - S_M, f_k > = \ 0$$

donc

$$< g, f_k > = \ 0$$

par passage à la limite sur M puisqu'on a la convergence dans H de la série.

Terminons alors la preuve. Vu ce qui précède, pour tous $f, h \in H$ on a

$$f = \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \ f_m \ + \ g_f \quad \text{et} \quad h = \sum_{m=1}^{+\infty} < h, f_m > \ f_m \ + \ g_h$$

dans H avec $< g_f, f_m >= 0 =< g_h, f_m >$ pour tout m ; ainsi on obtient

$$\begin{aligned} < f, h > \ &= \ < \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \ f_m \ + \ g_f, \sum_{k=1}^{+\infty} < h, f_k > \ f_k \ + \ g_h > \\ &= \ \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} < f, f_m > \overline{< h, f_k >} < f_m, f_k > \ + \ \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m >< f_m, g_h > \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{< h, f_k >} < g_f, f_k > \ + \ < g_f, g_h > \\ &= \ \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \overline{< h, f_m >} + \ < g_f, g_h > . \end{aligned}$$

□

Théorème 7.1.3 (Base ou suite orthonormée totale)**.** *Soit f_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite d'éléments de H, orthogonaux deux à deux, normés et telle que*

$$h \in H, \ < h, f_m >= 0 \quad \forall m \quad \Rightarrow \quad h = 0$$

(on dit que la suite est totale). Alors pour tout $f \in H$, on a

$$f \ = \ \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \ f_m \qquad \textit{dans} \ \ H.$$

Il s'ensuit que, pour tous $f, h \in H$, on a

$$< f, h > = \ \sum_{m=1}^{+\infty} < f, f_m > \overline{< h, f_m >}$$

et en particulier

$$\|f\|^2 \ = \ \sum_{m=1}^{+\infty} | < f, f_m > |^2.$$

Preuve. Cela résulte directement du théorème 7.1.2.□

7.2 Cas des séries trigonométriques de Fourier

7.2.1 Un peu d'histoire ...

Le texte en italique qui suit est extrait de wikipedia.

Les séries de Fourier constituent la branche la plus ancienne de l'analyse harmonique, mais n'en demeurent pas moins un domaine vivant, aux nombreuses questions ouvertes. L'étude de leurs particularités est allée de pair, pendant tout le 19e siècle, avec les progrès de la théorie de l'intégration.

Les origines.

Les premières considérations sur les séries trigonométriques apparaissent vers 1400 en Inde, chez Madhava, chef de file de l'école du Kerala. En Occident, on les trouve au début du 18e siècle chez Brook Taylor. C'est l'ouvrage de ce dernier, Methodus Incrementorum Directa et Inversa, paru en 1715, qui donne le coup d'envoi à l'étude systématique des cordes vibrantes et de la propagation du son, thème de recherche majeur pendant tout le siècle.

Une controverse éclate dans les années 1750 entre d'Alembert, Euler et Daniel Bernoulli sur le problème des cordes vibrantes. D'Alembert détermine l'équation d'onde et ses solutions analytiques. Bernoulli les obtient également, sous forme de décomposition en série trigonométrique. La controverse porte sur la nécessité de concilier ces points de vue avec les questions de régularité des solutions. [...]

Bernoulli avait introduit des séries trigonométriques dans le problème des cordes vibrantes pour superposer des solutions élémentaires.

Joseph Fourier introduit l'équation de la chaleur dans un premier mémoire en 1807 qu'il complète et présente en 1811 pour le Grand prix de Mathématiques. Ces premiers travaux, controversés sur le plan de l'analyse, ne furent pas publiés. En 1822, Fourier expose les séries et la transformation de Fourier dans son traité Théorie analytique de la chaleur. Il énonce qu'une fonction peut être décomposée sous forme de série trigonométrique, et qu'il est facile de prouver la convergence de celle-ci. Il juge même toute hypothèse de continuité inutile.

En 1829, Dirichlet donne un premier énoncé correct de convergence limité aux fonctions périodiques continues par morceaux ne possédant qu'un nombre fini d'extrema. Dirichlet considérait que les autres cas s'y ramenaient ; l'erreur sera corrigée par Jordan en 1881.

En 1848, Henry Wilbraham est le premier à mettre en évidence le phénomène de Gibbs en s'intéressant au comportement des séries de Fourier au voisinage des points de discontinuité.

Avancée conjointe des séries de Fourier et de l'analyse réelle.

Le Mémoire sur les séries trigonométriques de Bernhard Riemann, publié en 1867, constitue une avancée décisive. L'auteur lève un obstacle majeur en définissant pour la première fois une théorie de l'intégration satisfaisante. Il démontre notamment que les coefficients de Fourier ont une limite nulle à l'infini, et un résultat de convergence connu comme le théorème de sommabilité de Riemann.

Georg Cantor publie une série d'articles sur les séries trigonométriques entre 1870 et 1872, où il démontre son théorème d'unicité. Cantor raffine ses résultats en recherchant des « ensembles d'unicité », pour lesquels son théorème reste vérifié. C'est l'origine de l'introduction de la théorie des ensembles.

En 1873, du Bois-Reymond donne le premier exemple de fonction continue périodique dont la série de Fourier diverge en un point5. Le dernier quart du 19e siècle voit relativement peu d'avancées dans le domaine des séries de Fourier ou de l'analyse réelle en général, alors que l'analyse complexe connaît une progression rapide.

Dans une note de 1900 et dans un article de 1904, Fejér démontre son théorème de convergence uniforme utilisant le procédé de sommation de Cesàro (moyenne arithmétique des sommes *partielles de Fourier). Surtout, il dégage un principe nouveau : l'association systématique entre régularisation au moyen d'un « noyau » et procédé de sommation pour la série de Fourier.*

7.2.2 Résultats généraux fondamentaux

Voir aussi le cours enseigné et les notes de J. Schmets (chapitre 10)

Théorème 7.2.1. *Soient des réels a, b tels que $a < b$. Alors les fonctions définies explicitement par*

$$e_m(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{b-a}}\, e^{2im\pi x/(b-a)}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

forment une suite orthonormée totale de $L^2([a,b])$ (c'est-à-dire une base orthonormée de cet espace).

Preuve. Le fait que ces fonctions soient normées est évident. Le fait qu'elles soient orthogonales est immédiat au vu de leur périodicité : si $m \neq k$ alors

$$\begin{aligned}
< e^{2im\pi./(b-a)}, e^{2ik\pi./(b-a)} > &= \int_a^b e^{2i(m-k)\pi x/(b-a)}\, dx\\
&= \frac{b-a}{2i(m-k)\pi} \int_a^b D e^{2i(m-k)\pi x/(b-a)}\, dx\\
&= \frac{b-a}{2i(m-k)\pi} \left(e^{2i(m-k)\pi b/(b-a)} - e^{2i(m-k)\pi a/(b-a)}\right)\\
&= \frac{b-a}{2i(m-k)\pi} \left(e^{2i(m-k)\pi (b-a+a)/(b-a)} - e^{2i(m-k)\pi a/(b-a)}\right)\\
&= \frac{b-a}{2i(m-k)\pi} \left(e^{2i(m-k)\pi a/(b-a)} - e^{2i(m-k)\pi a/(b-a)}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour prouver la totalité, c'est moins direct. Nous allons établir un résultat auxiliaire qui, lui, permet de conclure directement. □

Avant cela présentons un exemple.

7.2.3 Exemple

On a

$$\frac{\pi - x}{2} \;=\; \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{m}$$

dans $L^2([0, 2\pi])$ et on en déduit que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}$$

COMPLETER (calcul)

7.2.4 Retour à la totalité

Si $f \in L^2([a,b])$, pour tout naturel non nul M, nous notons $S_M(f,.)$ la somme partielle

$$S_M(f,.) \;=\; \sum_{m=-M}^{M} < f, e_m > \; e_m(.)\,.$$

Définition 7.2.2. *Pour alléger les notations, considérons le cas $a = 0$ et $b = 2\pi$.*
Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, posons (D_M est appelé noyau de Dirichlet de degré M)

$$D_M(t) = \begin{cases} 2M+1 & \text{si } t \text{ est un multiple entier de } 2\pi \\ \dfrac{\sin\left((2M+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété(s) 7.2.3. *Pour alléger les notations, considérons le cas $a = 0$ et $b = 2\pi$.*
(1) Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, D_M est pair, 2π- périodique et on a

$$D_M(t) = \sum_{m=-M}^{M} e^{imt}, \qquad \int_0^{2\pi} D_M(t+r)\;dt \;=\; 2\pi,\ \forall r \in \mathbb{R}.$$

(2) Pour toute fonction f appartenant à $L^2([0,2\pi])$ et pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, on a

$$S_M(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(x-y)f(y)\;dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si f est défini sur $\mathbb{R}$ et est 2π-périodique, on a

$$S_M(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(y)f(x-y)\;dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(x-y)f(y)\;dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3) Pour toute fonction f de classe C_2 sur $\mathbb{R}$ et à support compact dans $]0,2\pi[$, la suite $S_M(f,.)$, $(M \in \mathbb{N}_0)$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$ vers f.

Preuve. (1) L'expression de D_M résulte d'une sommation de termes consécutifs d'une progression géométrique.

Pour l'intégrale, on utilise le fait que D_M est périodique de période 2π :

$$\int_0^{2\pi} D_M(t+r)\;dt \;=\; \int_r^{2\pi+r} D_M(x)\;dx \;=\; \int_0^{2\pi} D_M(x)\;dx.$$

(2) On a successivement

$$\begin{aligned} S_M(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-M}^{M}\left(\int_0^{2\pi} f(y)e^{-imy}dy\right)\; e^{imx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m=-M}^{M} e^{im(x-y)}\; f(y)\;dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(x-y)\; f(y)\;dy \end{aligned}$$

et, si f est 2π-périodique, un changement de variable linéaire conduit au résultat.

(3) Soit f^P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodisation de f considérée sur $[0, 2\pi[$. Cela signifie que $f^P(x) = f(x)$ pour $x \in [0, 2\pi[$ et $f^P(x) = f(x - 2k\pi)$ si $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[$ avec k entier non nul. Notons bien que comme le support de f est un compact de $]0, 2\pi[$, on a $f(x) = 0$ pour $x \in [0, 2\pi]$, voisin de 0 et de 2π. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $f^P(x) = 0$ pour tout x voisin de $2k\pi$. Dès lors la fonction f^P appartient aussi à $C_2(\mathbb{R})$. Et on a également $S_M(f) = S_M(f^P)$ quel que soit le naturel M.

Pour ne pas alourdir les notations, dans ce qui suit on utilise la notation f au lieu de f^P.

Montrons tout d'abord la convergence ponctuelle vers f.

Soit $x \in [0, 2\pi]$. Comme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) f(x) dy$$

pour tout M, on obtient

$$\begin{aligned} S_M(f, x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) \big(f(x-y) - f(x)\big) \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\Big((2M+1)\frac{y}{2}\Big) \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)} dy. \end{aligned}$$

Le théorème de Riemann Lebesgue donne alors

$$\lim_{M \to +\infty} (S_M(f, x) - f(x)) = \lim_{M \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\Big((2M+1)\frac{y}{2}\Big) \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)} dy = 0$$

pour autant que l'on montre que la fonction

$$y \mapsto \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)}$$

est intégrable sur $]0, 2\pi[$. De fait, cette fonction est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$ et même sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Examinons son intégrabilité en 0^+ et en $(2\pi)^-$. L' intégrabilité en 0^+ est directement acquise car la limite de cette fonction en 0 est finie :

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)} = \lim_{y \to 0} \left(\frac{f(x-y) - f(x)}{y} \frac{y}{\sin(y/2)} \right) = -2Df(x) \in \mathbb{C}.$$

Examinons ensuite l'intégrabilité en $(2\pi)^-$. On a de même (f est 2π-périodique)

$$\begin{aligned} \lim_{y \to 2\pi} \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)} &= \lim_{y \to 2\pi} \frac{f(x - (y - 2\pi)) - f(x)}{\sin(y/2)} \\ &= -\lim_{y \to 2\pi} \frac{f(x - (y - 2\pi)) - f(x)}{\sin((y - 2\pi)/2)} \\ &= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{\sin(h/2)} \\ &= -\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x-h) - f(x)}{h} \frac{h}{\sin(h/2)} \right) \\ &= 2Df(x) \end{aligned}$$

Montrons alors que la convergence est uniforme. Pour cela, on utilise le critère de Cauchy. Pour tout m différent de 0, vu la régularité de f et son support, on a successivement

$$\begin{aligned}
< f, e_m > &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-imt}\, dt \;=\; -\frac{1}{im\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\, De^{-imt}\, dt \\
&= \frac{1}{im\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} Df(t)\, e^{-imt}\, dt \\
&= -\frac{1}{(im)^2\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} Df(t)\, De^{-imt}\, dt \\
&= -\frac{1}{m^2\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} D^2 f(t)\, e^{-imt}\, dt \\
&= -\frac{1}{m^2} < D^2 f, e_m > .
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tous naturels p, q avec $p < q$, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,2\pi]} |S_p(f,x) - S_q(f,x)| &= \sup_{x\in[0,2\pi]} \left| \sum_{m=p+1}^{q} < f, e_m > e_m(x) \;+\; \sum_{m=-q}^{-p-1} < f, e_m > e_m(x) \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=p+1}^{q} |< f, e_m >| \;+\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-q}^{-p-1} |< f, e_m >| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=p+1}^{q} \frac{1}{m^2} \left|< D^2 f, e_m >\right| \;+\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-q}^{-p-1} \frac{1}{m^2} \left|< D^2 f, e_m >\right|
\end{aligned}$$

Comme on a

$$\begin{aligned}
\left|< D^2 f, e_m >\right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_0^{2\pi} D^2 f(t)\, e^{-imt}\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{t\in[0,2\pi]} |D^2 f(t)| \;\; 2\pi \\
&= \sqrt{2\pi} \sup_{t\in[0,2\pi]} |D^2 f(t)|
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,2\pi]} |S_p(f,x) - S_q(f,x)| \\
&\leq \sum_{m=p+1}^{q} \frac{1}{m^2} \sup_{t\in[0,2\pi]} |D^2 f(t)| \;+\; \sum_{m=-q}^{-p-1} \frac{1}{m^2} \sup_{t\in[0,2\pi]} |D^2 f(t)| \\
&= 2 \sup_{t\in[0,2\pi]} |D^2 f(t)| \sum_{m=p+1}^{q} \frac{1}{m^2}.
\end{aligned}$$

Et on peut conclure étant donné la convergence de la série de terme général $1/m^2$. □

Nous pouvons alors revenir à la preuve de la totalité.

Totalité *Les fonctions* e_m $(m \in \mathbb{Z})$ *forment une suite orthonormée totale dans* $L^2([a,b])$.

Preuve Comme précédemment, pour alléger les notations, prenons $a = 0, b = 2\pi$.

Soit donc $f \in L^2([0,2\pi])$ tel que $< f, e_m >= 0$ quel que soit l'entier m. On doit montrer que $f = 0$. Vu le théorème d'approximation (cas régulier), on sait qu'il existe une suite de fonctions φ_m $(m \in \mathbb{N})$ de fonctions de $C_\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans $]0,2\pi[$ telle que

$$\lim_{m\to+\infty} \varphi_m \;=\; f \quad \text{dans } L^2[0,2\pi]).$$

Cela étant, vu les propriétés 7.2.3 on a

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(\varphi_m,.) \;=\; \varphi_m(.)$$

pour tout m, la convergence étant une convergence uniforme sur $[0,2\pi]$. Il s'ensuit que

$$< f, \varphi_m > = \lim_{M\to+\infty} < f, S_M(\varphi_m) >$$

pour tout m (vu la convergence uniforme et aussi dans $L^2([0,2\pi])$). Mais vu l'hypothèse, puisque $S_M(\varphi_m)$ est une combinaison linéaire de e_k, la linéarité du produit scalaire donne $< f, S_M(\varphi_m) >= 0$ quels que soient m, M donc

$$< f, \varphi_m > = \; 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

On conclut alors directement car

$$\|f\|^2 \; = < f, f > = \lim_{m\to+\infty} < f, \varphi_m > = \; 0.$$

□

Théorème 7.2.4. *Soient des réels a, b avec $a < b$. Alors les fonctions définies explicitement par*

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad u_m(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\left(\frac{2m\pi x}{b-a}\right) \quad \textit{et} \quad v_m(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\left(\frac{2m\pi x}{b-a}\right) \;\; (m \in \mathbb{N}_0)$$

forment une suite orthonormée totale de $L^2([a,b])$ (c'est-à-dire une base orthonormée de cet espace).

Preuve. Le fait que les fonctions soient orthonormées résulte de calculs directs d'intégrales : on peut faire les calculs avec les fonctions sinus et cosinus ou même se ramener aux exponentielles en utilisant les liens qui les unissent.

Quant à la totalité elle s'obtient aussi directement. De fait, si on utilise l'expression des e_k en fonctions des u_k et v_k, on a, pour tout naturel strictement positif m, (avec $f \in L^2([a,b])$)

$$< f, e_m > = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(< f, u_m > -i < f, v_m >) \quad \text{et} \quad < f, e_{-m} > = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(< f, u_m > +i < f, v_m >)$$

donc si $< f, u_m >= 0$ pour tout naturel m et $< f, v_m >= 0$ pour tout naturel strictement positif m, on a $< f, e_m >= 0$ pour tout entier m donc $f = 0$ vu la totalité des fonctions e_m $(m \in \mathbb{Z})$. □

7.2.5 Le phénomène de Gibbs

Ce que la théorie nous dit, c'est que la convergence des séries trigonométriques est une convergence de type L^2. La théorie de la convergence dans L^2 permet alors de dire qu'une sous-suite de la suite des sommes partielles converge presque partout vers la fonction développée. Mais on a plus : *le théorème de Carleson affirme que la suite des sommes partielles elle-même converge presque partout.* [1]

Ce n'est que sous des conditions supplémentaires que l'on a la convergence ponctuelle de la suite des sommes partielles, même si f est continu (résultat du mathématicien allemand du Bois-Reymond en 1873).

Le phénomène de Gibbs décrit ci-dessous montre le comportement de la suite des sommes partielles au niveau d'un point de discontinuité [2] de f. Les sommes partielles $S_M(f,.)$ du développement en série trigonométrique de Fourier subissent une forte oscillation, une sorte de « sursaut ». Les images laissent soupçonner et le calcul montre effectivement que l'amplitude de ce sursaut tend vers une constante. Précisément, si la fonction a une discontinuité d'amplitude Δ, alors le « saut » en ordonnée des sommes partielles est de l'ordre de 17% de plus que Δ.

Enoncé relatif au phénomène de Gibbs.

Soit f une fonction périodique et localement dans L^2, dont les coefficients de Fourier c_m sont tels que l'ensemble $\{m|c_m| : m \in \mathbb{Z}\}$ soit borné et qui possède un nombre fini de points de discontinuité, en chacun desquels elle admet une limite finie à gauche et à droite. Alors, en chacune de ces discontinuités x_0, il existe $x_M \to x_0+$ et $y_M \to x_0-$ tels que

$$\lim_{M\to+\infty} |S_M(f, x_M) - S_M(f, y_M)| = G\Delta$$

où G est la constante de Gibbs

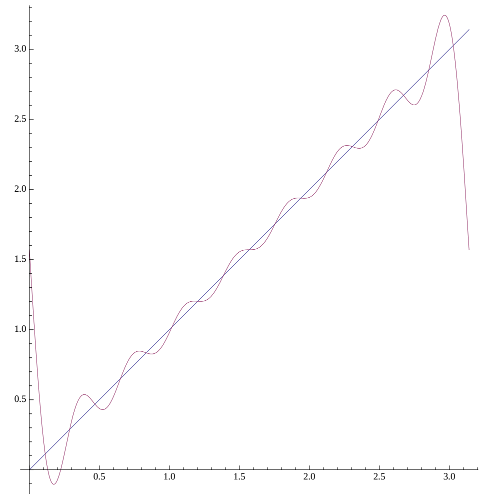
$$G = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx \ (> 1.17)$$

et où

$$\Delta = |f(x_0+) - f(x_0-)|\,.$$

Voici une illustration, mais via internet vous en trouvez beaucoup d'autres ! (Remarque : ne pas oublier de considérer la fonction périodisée ; ici, il faut répéter le graphique de f (à savoir $f(x) = x,\ x \in [0, \pi]$) de façon périodique pour mieux visualiser)

1. La preuve date de 1966. Lennart Axel Edvard Carleson est un mathématicien suédois né le 18 mars 1928 à Stockholm
2. d'un certain type



<u>Illustration sur le cas de $f(x) = x$.</u>

Soit le développement de $f : x \mapsto x$ en série trigonométrique de Fourier dans $L^2([0, \pi])$, à savoir [3]

$$x = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(2mx)}{m}.$$

On pose

$$S_M(f, x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{\sin(2mx)}{m}, \quad M \in \mathbb{N}_0.$$

On sait que

$$\lim_{M \to +\infty} \int_0^\pi |S_M(f, x) - x|^2 \, dx = 0 \quad \text{(convergence dans } L^2([0, \pi]))$$

Le phénomène de Gibbs décrit le comportement des sommes partielles $S_M(f, .)$ au voisinage des points de discontinuité (de la fonction f périodisée). Ici, les points considérés sont donc les multiples entiers de π.

Ici on a directement

$$\Delta = |f(0+) - f(0-)| = \pi$$

et aussi (prouvé plus loin *)

$$\begin{aligned} \lim_{M \to +\infty} S_M\left(f, -\frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \\ \lim_{M \to +\infty} S_M\left(f, \frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

Dès lors

$$\lim_{M \to +\infty} \left| S_M\left(f, \frac{\pi}{2M}\right) - S_M\left(f, -\frac{\pi}{2M}\right) \right| = 2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \; = \; G\Delta$$

Il reste à montrer que

$$G \; = \; \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \; > \; 1.17$$

3. L'exemple donné au cours-podcast permet d'obtenir le résultat, pas besoin ICI de refaire le calcul

De fait, du développement

$$\sin x = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

on tire

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \int_0^\pi x^{2m} dx = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m+1}}{(2m+1)!(2m+1)}.$$

Dès lors, quel que soit le naturel strictement positif M, on a (car[4] ...)

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx &= 2 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} \\
&= 2 \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} + 2 \sum_{m=M+1}^{+\infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} \\
&\geq 2 \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} - 2 \frac{\pi^{2(M+1)}}{(2M+3)!\ (2M+3)}.
\end{aligned}$$

Si on note

$$RG(M) = 2 \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!(2m+1)} - 2 \frac{\pi^{2(M+1)}}{(2M+3)!\ (2M+3)},$$

on a

$$RG(0) = 0.90338, RG(1) = 0.57868, RG(2) = 1.17357, RG(3) = 1.16776$$
$$RG(4) = 1.17896, RG(5) = 1.17893, RG(6) = 1.17898, RG(7) = 1.17898$$

Démontrons que (*)

$$\begin{aligned}
\lim_{M \to +\infty} S_M\left(f, -\frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \\
\lim_{M \to +\infty} S_M\left(f, \frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.
\end{aligned}$$

Démontrons par exemple la seconde égalité sur la limite de $S_M(f,.)$. La première s'y ramène immédiatement. On a successivement

$$\begin{aligned}
S_M\left(f, \frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{\sin(\pi m/M)}{m} \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{M} \frac{\sin(\pi m/M)}{m/M} \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{\pi}{M} \frac{\sin(\pi m/M)}{\pi m/M} \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} \frac{\pi}{M} F(x_m) \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{M} (x_m - x_{m-1}) F(x_m)
\end{aligned}$$

4. penser à $|a+b| \geq \big||a| - |b|\big|$ et à la majoration de la queue d'une série alternée

avec

$$F(x) = \frac{\sin x}{x}$$

et $x_m = \pi m/M,\ m = 1, \ldots, M$. Dès lors en utilisant la définition de l'intégrale (de Riemann) pour le prolongement continu sur $[0, \pi]$ de F et le découpage $x_m = \pi m/M,\ m = 1, \ldots, M$ de $[0, \pi]$ on obtient

$$\lim_{M \to +\infty} S_M\left(f, \frac{\pi}{2M}\right) = \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi F(x)dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.$$

7.2.6 Convergence ponctuelle

Examinons maintenant un cas où l'on peut préciser la convergence ponctuelle : nous présentons ici le cas des fonctions « C_1 par morceaux ».

Propriété(s) 7.2.5 (Résultats auxiliaires)**.** *(1) Soient D_M ($M \in \mathbb{N}$) les noyaux de Dirichlet introduits précédemment. Pour rappel*

$$D_M(t) = \frac{\sin\left((2M+1)t/2\right)}{\sin\left(t/2\right)}$$

On a

$$\int_0^{2\pi} D_M(t)\ dt = 2\pi \quad et \quad \int_0^\pi D_M(t)\ dt = \int_{-\pi}^0 D_M(t)\ dt = \pi.$$

(2) Si f est une fonction définie sur un intervalle borné $]\alpha, \beta[$ et est la restriction d'une fonction F appartenant à $C_1(I)$ où I est un intervalle ouvert contenant $[\alpha, \beta]$, alors f admet une limite finie à droite en α et à gauche en β. On note ces limites respectivement

$$f(\alpha+) \quad et \quad f(\beta-)$$

Preuve. (1) La première égalité a déjà été prouvée (elle est immédiate à partir de l'expression du noyau de Dirichlet sous forme d'une somme d'exponentielles). Quant à la seconde, elle s'obtient directement en utilisant la périodicité et la parité des noyaux D_M : on a successivement

$$2\pi = \int_0^{2\pi} D_M(t)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} D_M(t)\ dt = 2\int_0^\pi D_M(t)\ dt = 2\int_{-\pi}^0 D_M(t)\ dt$$

donc

$$\int_0^\pi D_M(t)\ dt = \int_{-\pi}^0 D_M(t)\ dt = \pi.$$

(2) On a $f = F$ sur $]\alpha, \beta[$ avec $F \in C_0([\alpha, \beta])$ donc on conclut. □

Avant de passer au résultat de convergence ponctuelle annoncé, définissons ce que l'on entend ici par fonction « C_1 par morceaux ».

Définition 7.2.6. *Soit f une fonction définie sur un intervalle borné $]a, b[$. On dit qu'elle est « C_1 par morceaux » s'il existe un naturel non nul J, des réels $a_1, \ldots, a_{J-1}$ tels que $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{J-1} < b = a_J$ et des fonctions F_j ($j = 1, \ldots, J$) appartenant à $C_1(I_j)$, avec I_j intervalle ouvert contenant $[a_{j-1}, a_j]$ qui vérifient $F_j = f$ sur $]a_{j-1}, a_j[$ quel que soit $j = 1, \ldots J$.*

On a alors le résultat suivant.

Proposition 7.2.7. *Soit f une fonction périodique de période $b-a$, de classe « C_1 par morceaux » sur $]a,b[$. Alors cette fonction est dans $L^2([a,b])$ et, en notant $S_M(f,.)$ les sommes partielles habituelles de la série trigonométrique de Fourier, on a*

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(f,x) \;=\; \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \quad \forall x\in]a,b[$$

et

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(f,x) \;=\; \frac{f(a+)+f(b-)}{2} \quad si\ x=a\ ou\ \ x=b$$

Preuve. On reprend les notations de la définition de « C_1 par morceaux ».

Les hypothèses impliquent que la fonction est dans $L^2([a,b])$. De fait, on a

$$]a,b[=\bigcup_{j=1}^{J-1}]a_{j-1},a_j]\cup]a_{J-1},a_J[;$$

sur chacun des sous-intervalles ouverts, la fonction est continue et, aux bords, elle admet une limite finie (cf le résultat auxiliaire précédent). Ainsi, sur chaque sous-intervalle, elle est bornée ; dès lors elle l'est aussi sur $]a,b[$. Il s'ensuit qu'elle est de carré intégrable (elle est bien sûr aussi mesurable).

Cela étant, reprenons les expressions calculées dans le résultat de totalité. On simplifie aussi les notations en prenant $a=0$ et $b=2\pi$.

Pour tout $x\in]0,2\pi[$ différent des a_j, cela se passe comme dans le cas de la totalité. On a

$$f(x) \;=\; \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

et

$$\begin{aligned}
S_M(f,x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(y)f(x-y)\,dy \;-\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(y)\,\Big(f(x-y)-f(x)\Big)\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_M(y)\,\Big(f(x-y)-f(x)\Big)\,dy \quad \text{(vu la périodicité)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{(2M+1)y}{2}\right)\frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(y/2)}\,dy.
\end{aligned}$$

La conclusion s'obtient alors par Riemann-Lebesgue car la fonction

$$y\mapsto\frac{y/2}{\sin(y/2)}$$

est continue sur $[-\pi,\pi]$ (prolongement continu en 0) et

$$y\mapsto\frac{f(x-y)-f(x)}{y/2}$$

est intégrable sur $]-\pi,\pi[$. De fait, sur $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$, elle est continue sauf en les points $x-a_j$ et en ceux-ci, elle admet une limite finie à droite et à gauche ; en π, elle admet aussi une limite finie à gauche (qui est $f(x-\pi)-f(x)$ si $x-\pi\neq a_k$ et $f(a_k-)-f(x)$ sinon) ; c'est analogue en $-\pi$. En 0, elle admet aussi une limite finie car x diffère des a_j et cette limite vaut $-2Df(x)$.

Prenons alors le cas où $x = a_j$ avec $j \neq 0$ et $j \neq J$. On a successivement

$$\begin{aligned}
&S_M(f,x) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_M(y)f(x-y)\,dy \;-\; \frac{f(x+)+f(x-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_M(y)f(x-y)\,dy \;-\; \frac{f(x+)}{2} \;+\; \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_M(y)f(x-y)\,dy \;-\; \frac{f(x-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_M(y)\Big(f(x-y)-f(x+)\Big)\,dy \;+\; \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_M(y)\Big(f(x-y)-f(x-)\Big)\,dy.
\end{aligned}$$

Pour conclure comme ci-dessus en utilisant le théorème de Riemann-Lebesgue, il reste à vérifier que les fonctions

$$y \mapsto \frac{f(x-y)-f(x+)}{y} \quad \text{et} \quad y \mapsto \frac{f(x-y)-f(x-)}{y}$$

admettent des limites finies en $0-$ et $0+$ respectivement. Si y est proche de 0 et négatif (resp. positif), on a

$$f(x-y)-f(x+) \;=\; F_{j+1}(x-y)-F_{j+1}(x) \quad (\text{resp.}\quad f(x-y)-f(x-) \;=\; F_j(x-y)-F_j(x))$$

et on conclut comme précédemment.

Enfin, pour $x = 0$ ou $x = 2\pi$: on fait comme précédemment en utilisant la périodicité. Faisons-le pour $x = 0$. On a

$$\begin{aligned}
&S_M(f,0) - \frac{f(0+)+f(2\pi-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_M(y)f(-y)\,dy \;-\; \frac{f(0+)+f(2\pi-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_M(y)f(-y)\,dy \;-\; \frac{f(0+)}{2} \;+\; \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_M(y)f(-y)\,dy \;-\; \frac{f(2\pi-)}{2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_M(y)\Big(f(-y)-f(0+)\Big)\,dy \;+\; \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_M(y)\Big(f(-y)-f(2\pi-)\Big)\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_M(y)\Big(f(-y)-f(0+)\Big)\,dy \;+\; \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_M(y)\Big(f(2\pi-y)-f(2\pi-)\Big)\,dy
\end{aligned}$$

et on conclut comme précédemment.□

Remarque 7.2.8. *Les résultats précédents sont aussi valables si on prend les sommes partielles provenant de la décomposition dans la base formée des sinus et cosinus.*

Preuve. Notons e_m ($m \in \mathbb{Z}$) les fonctions exponentielles « imaginaire pur ». La base orthonormée formée des fonctions sinus et cosinus est la famille des fonctions

$$e_0, \quad \sqrt{2}\,\Re(e_m) = \sqrt{2}\,\Re(e_{-m})\ (m \in \mathbb{N}_0) \quad \text{et} \quad \sqrt{2}\,\Im(e_m) = -\sqrt{2}\,\Im(e_{-m})\ (m \in \mathbb{N}_0).$$

Cela étant, soit $f \in L^2([a,b])$. Pour tout naturel non nul m on a

$$\begin{aligned}
&< f, e_m > e_m\\
&= \; < f, \Re(e_m) > \Re(e_m) + i < f, \Re(e_m) > \Im(e_m) - i < f, \Im(e_m) > \Re(e_m) + < f, \Im(e_m) > \Im(e_m)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&< f, e_{-m} > e_{-m}\\
&= \; < f, \Re(e_m) > \Re(e_m) - i < f, \Re(e_m) > \Im(e_m) + i < f, \Im(e_m) > \Re(e_m) + < f, \Im(e_m) > \Im(e_m)
\end{aligned}$$

donc

$$< f, e_m > e_m + < f, e_{-m} > e_{-m} \;=\; 2 < f, \Re(e_m) > \Re(e_m) + 2 < f, \Im(e_m) > \Im(e_m).$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} S_M(f,.) &= \sum_{m=-M}^{M} < f, e_m > e_m \\ &= < f, e_0 > e_0(.) + 2 \sum_{m=1}^{M} \left(< f, \Re(e_m) > \Re(e_m) + < f, \Im(e_m) > \Im(e_m)\right), \end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre que l'égalité des sommes partielles, quelle que soit la base choisie.□

7.3 Autres exemples de suites orthonormées totales

Voir cours enseigné et notes de J. Schmets (chapitre 11)

Chapitre 8

Compléments sur la théorie de Fourier

8.1 Le théorème d'échantillonnage de Shannon

Le théorème d'échantillonnage de Shannon [1] est un résultat fondamental de la théorie du signal. Il donne également une explication pour un phénomène courant : la vision de roues qui semblent tourner à l'envers [2].

Imaginons ainsi qu'une caméra prend y clichés par seconde d'une roue qui tourne à x tours par seconde (dans le sens des aiguilles d'une montre, pour mieux visualiser) et que l'on fixe un rayon de la roue comme repère. Entre deux clichés successifs, la roue a donc tourné de x/y tour(s). Si $x < y$, entre deux clichés, la roue n'aura ainsi pas fait un tour complet : il lui manque une portion d'arc de $1 - x/y$. Si y^* est le nombre de clichés nécessaires pour voir la roue faire 1 tour complet ≪ à l'envers ≫, alors

$$y^* \times \left(1 - \frac{x}{y}\right) \;=\; 1$$

c'est-à-dire

$$y^* \;=\; \frac{y}{y-x}.$$

Par exemple, si on voit la roue faire 1 tour complet ≪ à l'envers ≫ en 1 seconde, on a pris y clichés donc $y^* = y$ et ainsi

$$y - x \;=\; 1.$$

La différence entre la fréquence réelle (x) et la fréquence d'échantillonnage (y) est appelée *fréquence apparente* et elle est égale à $x - y$. Ici, on a donc $x - y = -1$: la roue tourne ≪ à l'envers ≫ une fois par seconde.

Voir par exemple https ://www.cooperation.ch/rubriques/famille/le-savais-tu/2019/pourquoi-les-roues-tournent-a-l-envers-lorsqu-une-voiture-roule-vite–225667/

1. Claude Elwood Shannon (né le 30 avril 1916 à Petoskey, Michigan - mort le 24 février 2001 à Medford, Massachusetts) est un ingénieur en génie électrique et mathématicien américain. Il est l'un des pères, si ce n'est le père fondateur, de la théorie de l'information. Il a publié la preuve du théorème en 1949. On associe ensuite le nom de Nyquist à ce résultat car celui-ci avait ouvert la voie dès 1928. Shannon et Nyquist ont tous les deux travaillé chez Bell Laboratories.

2. c'est un phénomène aussi appelé ≪ repli du spectre ≫

Une autre illustration consiste à ne regarder que la trotteuse sur une horloge lorsqu'on prend des clichés toutes les 59 secondes (par exemple). On obtient le tableau suivant

$$\begin{array}{ccc} 0 & : & 00 \\ 1 & : & 59 \\ 2 & : & 58 \\ 3 & : & 57 \\ ... & : & ... \end{array}$$

Sur le cadran, la trotteuse semble donc reculer ! Voir par exemple (seulement la trotteuse) https ://couleur-science.eu/ ?d=af1b19–photographie-le-phenomene-de-repliement-de-spectre-ou-lillusion-de-la-roue-qui-tourne-en-sens-inverse

Passons alors au résultat précis de Shannon. Il exprime qu'*un signal limité en fréquence est entièrement déterminé à partir d'un échantillonnage de ce signal correspondant à* ***deux échantillons par période***[3].

Ainsi, dans les illustrations ci-dessus, voir le phénomène de « à l'envers » résulte du fait que le pas d'échantillonnage $(1/y)$ est trop petit par rapport à la période de rotation de la roue $(1/x)$.

Et, dans les notations du théorème ci-dessous, la période est $T = 2\pi/\nu$ et le pas d'échantillonnage est $\pi/\nu = T/2$: la fonction est évaluée deux fois par période.

Nous donnons ci-dessous une démonstration du résultat basée sur le développement en série trigonométrique de Fourier. On peut aussi l'obtenir en utilisant la théorie des distributions (ici les distributions de Dirac) ; cette preuve fait ressortir davantage les aspects de la théorie du signal mais nous ne la présentons pas ici car l'acquis mathématique n'est pas suffisant à ce stade.

Théorème 8.1.1. (Théorème d'échantillonnage de Shannon)

Soit ν un réel strictement positif. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, appartenant à $L^2(\mathbb{R})$ et dont le support de la transformée de Fourier (négative) est inclus dans $[-\nu, \nu]$, alors, dans $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$f(x) = \lim_{M\to+\infty} \sum_{m=-M}^{M} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right) \frac{\sin(\nu x - m\pi)}{\nu x - m\pi}$$

Preuve. Le développement en série trigonométrique de Fourier de $\widehat{f}$ dans $L^2([-\nu,\nu])$ donne

$$\begin{aligned} \widehat{f}(y) &= \frac{1}{2\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\nu}^{\nu} \widehat{f}(u) e^{im\pi u/\nu} du \right) \ e^{-im\pi y/\nu} \\ &= \frac{1}{2\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{+}_{\frac{m\pi}{\nu}} \widehat{f} \ \ e^{-im\pi y/\nu}. \end{aligned}$$

Cela étant, on a

$$\mathcal{F}^{+}\widehat{f} \ = \ F^{+}\widehat{f} \ = \ 2\pi f$$

presque partout mais comme f est continu, cette égalité a lieu partout et on obtient ainsi

$$\widehat{f}(y) \ = \ \frac{\pi}{\nu} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right) e^{-im\pi y/\nu},$$

3. dans le langage de l'analyse du signal : « échantillonnage deux fois par cycle de la plus haute fréquence »

la convergence ayant lieu dans $L^2([-\nu,\nu])$. Maintenant, comme $\hat{f} = \hat{f}\chi_{[-\nu,\nu]}$ on obtient alors

$$\begin{aligned} F_x^+\widehat{f} \;=\; 2\pi\, f(x) \;=\; \int_{-\nu}^{\nu} e^{iyx}\, \widehat{f}(y)\; dy \;&=\; \frac{\pi}{\nu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right)\int_{-\nu}^{\nu} e^{iyx}\, e^{-im\pi y/\nu}\; dy \\ &=\; \frac{2\pi}{\nu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right)\frac{\sin(\nu x - m\pi)}{x - m\pi/\nu} \\ &=\; 2\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{m\pi}{\nu}\right)\frac{\sin(\nu x - m\pi)}{\nu x - m\pi} \end{aligned}$$

dans $L^2(\mathbb{R})$ et on peut conclure.□

Notons que si f a un « bon » comportement à l'infini, la convergence peut être fortement améliorée.

Remarquons aussi que ce résultat exprime qu'après normation, les fonctions

$$x \mapsto \frac{\sin(\nu x - m\pi)}{\nu x - m\pi} \quad m \in \mathbb{Z}$$

forment une base orthonormée de l'espace des fonctions de carré intégrable dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans l'intervalle $[-\nu,\nu]$.

8.2 Produit de convolution et transformées de Fourier

Propriété(s) 8.2.1. (Transformées de Fourier et produit de composition)

(1) *Si f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\mathcal{F}^{\pm}(f * g) \;=\; \mathcal{F}^{\pm}f \times \mathcal{F}^{\pm}g \quad \textit{partout.}$$

(2) *Si $f \in L^1 \cap L^2$ et si $g \in L^2$ alors*

$$\mathbb{F}^{\pm}(f * g) \;=\; \mathbb{F}^{\pm}f \times \mathbb{F}^{\pm}g \;=\; \mathcal{F}^{\pm}f \times \mathbb{F}^{\pm}g \quad \textit{presque partout.}$$

Preuve. **(1)** est immédiat en repassant aux définitions (et a d'ailleurs été traité dans le chapitre consacré à la transformation de Fourier des fonctions intégrables).

(2) Soit g_m $(m \in \mathbb{N})$ une suite d'éléments de $L^1 \cap L^2$ qui converge vers g dans L^2. On a donc

$$f * g \;=\; \lim_{m\to+\infty} f * g_m \quad \text{dans } L^2$$

donc aussi

$$\mathbb{F}^{\pm}(f * g) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathbb{F}^{\pm}(f * g_m) \quad \text{dans } L^2.$$

Cela étant, f et g_m étant aussi intégrables, on a

$$\mathbb{F}^{\pm}(f * g_m) \;=\; \mathcal{F}^{\pm}(f * g_m) \;=\; \mathcal{F}^{\pm}f \times \mathcal{F}^{\pm}g_m.$$

Comme la suite $\mathcal{F}^{\pm}g_m$ $(m \in \mathbb{N})$ converge dans L^2 vers $\mathbb{F}^{\pm}g$ et comme $\mathcal{F}^{\pm}f$ est une fonction bornée, on obtient

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{F}^{\pm}(f * g_m) \;=\; \lim_{m\to+\infty}\left(\mathcal{F}^{\pm}f \times \mathcal{F}^{\pm}g_m\right) \;=\; \mathcal{F}^{\pm}f \times \mathbb{F}^{\pm}g \quad \text{dans } L^2.$$

Ainsi

$$\mathbb{F}^{\pm}(f * g) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathbb{F}^{\pm}(f * g_m) \;=\; \mathcal{F}^{\pm} f \times \mathbb{F}^{\pm} g \quad \text{dans} \;\; L^2$$

et on conclut.□

On peut alors se poser la question de savoir si on peut appliquer le théorème de Fourier pour retrouver $f * g$. Dans le premier cas, comme $\mathcal{F}^{\pm}(f * g)$ n'est pas nécessairement intégrable, on ne peut pas le faire sans hypothèse supplémentaire. Par contre dans le second cas, il n'y a aucun problème, les deux membres de l'égalité appartenant même à $L^1 \cap L^2$.

Etudions divers cas où c'est possible ; nous appellerons ces égalités les *formules de Parseval*[4].

Propriété(s) 8.2.2. (Formules de Parseval-Exercices théoriques)

(1) *Si f, g sont deux fonctions intégrables et si la transformée de Fourier de l'une d'entre elles l'est aussi, alors*

$$\mathcal{F}^{\mp}\left(\mathcal{F}^{\pm} f \times \mathcal{F}^{\pm} g\right) \;=\; 2\pi\; f * g \quad \textit{partout.}$$

(2) *Si f, g sont deux fonctions intégrables et de carré intégrable, alors*

$$\mathcal{F}^{\mp}\left(\mathcal{F}^{\pm} f \times \mathcal{F}^{\pm} g\right) \;=\; \mathcal{F}^{\mp}\left(\mathbb{F}^{\pm} f \times \mathbb{F}^{\pm} g\right) \;=\; 2\pi\; f * g \quad \textit{partout.}$$

(3) *Si f, g sont deux fonctions de carré intégrable, alors*

$$\mathcal{F}^{\mp}\left(\mathbb{F}^{\pm} f \times \mathbb{F}^{\pm} g\right) \;=\; 2\pi\; f * g \quad \textit{partout.}$$

Preuve. **(1)** Remarquons tout d'abord que si une fonction intégrable a une transformée de Fourier intégrable également, alors la fonction est bornée. Il s'ensuit que le membre de droite de l'égalité est une fonction bornée et continue.

Cela étant, comme f et g sont intégrables, on a

$$\mathcal{F}^{\pm}(f * g) \;=\; \mathcal{F}^{\pm} f \times \mathcal{F}^{\pm} g \quad \text{partout}$$

et comme la transformée de Fourier de f ou de g est intégrable, le second membre (donc le premier aussi) est une fonction intégrable. L'utilisation du théorème de Fourier pour les fonctions intégrables conduit donc à l'égalité

$$\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm}(f * g) \;=\; 2\pi\; f * g \;=\; \mathcal{F}^{\mp}\left(\mathcal{F}^{\pm} f \times \mathcal{F}^{\pm} g\right),$$

qui a lieu en tout point vu la remarque précédente.

(2) Rappelons tout d'abord que si une fonction appartient à $L^1 \cap L^2$ alors sa transformée de Fourier dans L^1 appartient aussi à L^2 et les transformées de Fourier dans L^1 et L^2 sont les mêmes. Rappelons aussi que le produit de convolution de deux fonctions de carré intégrable est une fonction bornée et continue.

Cela étant, comme les fonctions f et g sont intégrables, on a

$$\mathcal{F}^{\pm}(f * g) \;=\; \mathcal{F}^{\pm} f \times \mathcal{F}^{\pm} g \quad \text{partout;}$$

comme elles sont aussi de carré intégrable, leur transformée de Fourier est aussi de carré intégrable donc le second membre, produit de deux fonctions de carré intégrable, est intégrable. L'utilisation du théorème de Fourier pour les fonctions intégrables conduit donc à l'égalité

$$\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm}(f * g) \;=\; 2\pi\; f * g \;=\; \mathcal{F}^{\mp}\left(\mathcal{F}^{\pm} f \times \mathcal{F}^{\pm} g\right) \;=\; \mathcal{F}^{\mp}\left(\mathbb{F}^{\pm} f \times \mathbb{F}^{\pm} g\right),$$

4. Marc-Antoine Parseval des Chênes, né le 27 avril 1755 à Rosières-aux-Salines et mort le 16 août 1836 à Paris, est un mathématicien français.

qui a lieu en tout point vu le rappel ci-dessus.

(3) Dans ce cas, comme les fonctions ne sont pas intégrables, on ne peut pas procéder directement comme dans les cas précédents. On repart alors de la définition de la transformée de Fourier dans L^2.

Soient f_m ($m \in \mathbb{N}$) et g_m ($m \in \mathbb{N}$) deux suites d'éléments de $L^1 \cap L^2$ qui convergent dans L^2 respectivement vers f et g. Par définition on a

$$\mathbb{F}^{\pm} f \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm} f_m \quad \text{et} \quad \mathbb{F}^{\pm} g \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}^{\pm} g_m,$$

la convergence ayant lieu dans L^2. Vu le point (2) précédent, pour tout m on a

$$\mathcal{F}^{\mp}\left(\mathcal{F}^{\pm} f_m \times \mathcal{F}^{\pm} g_m\right) \;=\; \mathcal{F}^{\mp}\left(\mathbb{F}^{\pm} f_m \times \mathbb{F}^{\pm} g_m\right) \;=\; 2\pi\; f_m * g_m \quad \text{partout.}$$

Cela étant, d'une part, vu l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la convergence dans L^2 des suites $\mathcal{F}^{\pm} f_m$ ($m \in \mathbb{N}$) et $\mathcal{F}^{\pm} g_m$ ($m \in \mathbb{N}$) vers $\mathbb{F}^{\pm} f$ et $\mathbb{F}^{\pm} g$ respectivement, implique que la suite $\mathcal{F}^{\pm} f_m \times \mathcal{F}^{\pm} g_m$ ($m \in \mathbb{N}$) converge dans L^1 vers $\mathbb{F}^{\pm} f \times \mathbb{F}^{\pm} g$: de fait on a successivement

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}^{\pm} f_m \times \mathcal{F}^{\pm} g_m - \mathbb{F}^{\pm} f \times \mathbb{F}^{\pm} g\right| \\
&= \left|\mathcal{F}^{\pm} f_m \times \mathcal{F}^{\pm} g_m - \mathcal{F}^{\pm} f_m \times \mathbb{F}^{\pm} g + \mathcal{F}^{\pm} f_m \times \mathbb{F}^{\pm} g - \mathbb{F}^{\pm} f \times \mathbb{F}^{\pm} g\right| \\
&\leq \left|\mathcal{F}^{\pm} f_m\right| \left|\mathcal{F}^{\pm} g_m - \mathbb{F}^{\pm} g\right| \;+\; \left|\mathbb{F}^{\pm} g\right| \left|\mathcal{F}^{\pm} f_m - \mathbb{F}^{\pm} f\right|
\end{aligned}$$

donc

$$\left\|\mathcal{F}^{\pm} f_m \times \mathcal{F}^{\pm} g_m - \mathbb{F}^{\pm} f \times \mathbb{F}^{\pm} g\right\|_1 \;\leq\; \left\|\mathcal{F}^{\pm} f_m\right\|_2 \left\|\mathcal{F}^{\pm} g_m - \mathbb{F}^{\pm} g\right\|_2 \;+\; \left\|\mathbb{F}^{\pm} g\right\|_2 \left\|\mathcal{F}^{\pm} f_m - \mathbb{F}^{\pm} f\right\|_2 .$$

Il s'ensuit que la suite

$$\mathcal{F}^{\mp}\left(\mathcal{F}^{\pm} f_m \times \mathcal{F}^{\pm} g_m\right) \;(m \in \mathbb{N})$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers

$$\mathcal{F}^{\mp}\left(\mathbb{F}^{\pm} f \times \mathbb{F}^{\pm} g\right).$$

D'autre part, la convergence dans L^2 des suites f_m ($m \in \mathbb{N}$) et g_m ($m \in \mathbb{N}$) respectivement vers f et g entraîne que la suite

$$f_m * g_m \;(m \in \mathbb{N})$$

converge aussi uniformément sur $\mathbb{R}$ vers

$$f * g.$$

On obtient dès lors

$$\mathcal{F}^{\mp}\left(\mathbb{F}^{\pm} f \times \mathbb{F}^{\pm} g\right) \;=\; 2\pi\; f * g \quad \text{partout}$$

et on peut conclure.□

8.3 Dérivation et transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Propriété(s) 8.3.1. (Dérivation et transformée de Fourier dans L^2)

Si $f \in C_p(\mathbb{R})$ et si $D^k f \in L^2$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq p$, alors

$$\mathbb{F}^{\pm}_y\left(D^k f\right) \;=\; (\mp i)^k\; y^k \mathbb{F}^{\pm}_y f \quad \textit{pour presque tout } y.$$

Preuve. On sait que cette propriété est correcte dans L^1.

Cela étant, si $\rho \in L^1$ est tel que $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$ et si on définit les fonctions ρ_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ par $x \mapsto m\rho(mx)$ alors

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty} \mathcal{F}_y^{\pm}\rho_m = \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\rho_m(x)\ dx &= m\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy}\rho\,(mx)\ dx\\ &= \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{\pm iyt/m}\rho\,(t)\ dt\\ &= 1\end{aligned}$$

quel que soit y, la dernière égalité étant obtenue par le théorème de la convergence majorée (Lebesgue). Si en outre $\rho \in C_\infty(\mathbb{R})$ et est à support compact, alors $f * \rho_m \in C_\infty(\mathbb{R})$ quel que soit m et on a

$$D^k\,(f*\rho_m)\ =\ f*D^k\rho_m\ =\ D^k f*\rho_m \quad \text{partout}$$

avec $k\in\mathbb{N}$, $k\le p$. Ensuite, comme $f, D^k f\in L^2$ et comme $\rho_m, D^k\rho_m \in L^1\cap L^2$, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_y^{\pm}\left(D^k\,(f*\rho_m)\right) &= \mathbb{F}_y^{\pm} f\times \mathcal{F}_y^{\pm}D^k\rho_m\ =\ \mathbb{F}_y^{\pm}\left(D^k f\right)\times\mathcal{F}_y^{\pm}\rho_m\\ &= \mathbb{F}_y^{\pm} f\times(\mp i)^k\ y^k\mathcal{F}_y^{\pm}\rho_m\end{aligned}$$

presque partout. Puisque $\lim_{m\to+\infty}\mathcal{F}_y^{\pm}\rho_m = 1$ quel que soit y, on obtient

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\mathbb{F}_y^{\pm} f\times(\mp i)^k\ y^k\mathcal{F}_y^{\pm}\rho_m\right) = (\mp i)^k\ y^k\mathbb{F}_y^{\pm} f = \lim_{m\to+\infty}\left(\mathbb{F}_y^{\pm}\left(D^k f\right)\times\mathcal{F}_y^{\pm}\rho_m\right) = \mathbb{F}_y^{\pm}\left(D^k f\right)$$

et on peut conclure.□

8.4 Le principe d'incertitude de Heisenberg

Ce qui suit est extrait de Wikipedia (07/08/23). *En mécanique quantique, le principe d'incertitude ou, plus correctement, principe d'indétermination, aussi connu sous le nom de principe d'incertitude de Heisenberg, désigne toute inégalité mathématique affirmant qu'il existe une limite fondamentale à la précision avec laquelle il est possible de connaître simultanément deux propriétés physiques d'une même particule[...]*

Cela étant, on suppose que les intégrales suivantes existent. On appelle alors *énergie du signal* f le carré de la norme de f dans L^2, que l'on désigne par E_f

$$E_f\ =\ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\ dx\ =\ \|f\|_2^2$$

et la dispersion d'énergie de f en temps et en fréquence respectivement les nombres

$$\sigma_f^2\ =\ \int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\ dx,\qquad \sigma_{\hat f}^2\ =\ \int_{\mathbb{R}} y^2|\hat f(y)|^2\ dy$$

où $\hat f$ désigne le plus souvent la transformée de Fourier « - » de f (mais notons que la valeur de $\sigma_{\hat f}^2$ est la même quelle que soit la transformée que l'on considère).

Théorème 8.4.1. (Principe d'incertitude de Heisenberg dans $\mathbb{R}$, cas régulier)

Soit une fonction $f\in L^2\cap C_1(\mathbb{R})$ telle que Df et $x\mapsto xf(x)$ appartiennent aussi à $L^2(\mathbb{R})$. Alors on a

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}E_f\ \le\ \sigma_f\times\sigma_{\hat f}.$$

Un changement de variable dans l'intégrale avec la transformation de Fourier permet de dire que le résultat est vrai aussi avec la transformée ≪ positive ≫.

Lorsque f est une fonction gaussienne, on a l'égalité.

Preuve. Notons que les hypothèses donnent déjà (cf la propriété 8.3.1)

$$y\hat{f}(y) \;=\; i\widehat{Df}(y) \quad \text{pour presque tout } y.$$

Cela étant, commençons par prouver que

$$2\Re\left(\int_{\mathbb{R}} x\overline{f}(x)Df(x)\;dx\right) \;=\; -\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\;dx \;=\; -\|f\|_2^2. \qquad (*)$$

En utilisant une intégration par parties, on obtient directement

$$\int_{\mathbb{R}} x\overline{f}(x)Df(x)\;dx \;=\; -\int_{\mathbb{R}} \left(\overline{f} + x\overline{Df}(x)\right)\;f(x)\;dx \;=\; -\|f\|_2^2 \;-\; \int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{Df}(x)\;dx$$

et ainsi l'égalité (*).

En utilisant alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient successivement

$$\begin{aligned}
E_f = \|f\|_2^2 &= 2\left|\Re\left(\int_{\mathbb{R}} x\overline{f}(x)Df(x)\;dx\right)\right| \\
&\leq 2\left|\int_{\mathbb{R}} x\overline{f}(x)Df(x)\;dx\right| \\
&\leq 2\sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\;dx} \times \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |Df(x)|^2\;dx} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\;dx} \times \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\widehat{Df}(y)|^2\;dy} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\;dx} \times \sqrt{\int_{\mathbb{R}} y^2|\widehat{f}(y)|^2\;dy} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\sigma_f \times \sigma_{\hat{f}}
\end{aligned}$$

et l'inégalité de l'énoncé est démontrée.

Pour terminer, examinons le cas où f est une gaussienne :

$$f_a(x) \;=\; e^{-ax^2}$$

avec $a > 0$. On a

$$\begin{aligned}
\sigma_{f_a}^2 &= \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-2ax^2}\;dx \\
&= -\frac{1}{4a}\int_{\mathbb{R}} xDe^{-2ax^2}\;dx \\
&= \frac{1}{4a}\int_{\mathbb{R}} e^{-2ax^2}\;dx \\
&= \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}.
\end{aligned}$$

Cela étant, comme $\widehat{f_a} = \sqrt{\pi/a}\, f_{1/(4a)}$, on obtient alors directement

$$\sigma^2_{\hat{f}_a} \;=\; \frac{\pi}{a} \times \sigma_{f_{1/(4a)}} \;=\; \frac{\pi}{a} \times \frac{1}{4/(4a)}\sqrt{\frac{\pi}{2/(4a)}} \;=\; \pi\sqrt{2a\pi}.$$

Dès lors

$$\sigma^2_{f_a} \times \sigma^2_{\hat{f}_a} \;=\; \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}} \times \pi\sqrt{2a\pi} \;=\; \frac{\pi^2}{4a}$$

donc

$$\sigma_{f_a} \times \sigma_{\hat{f}_a} \;=\; \frac{\pi}{2\sqrt{a}}.$$

D'un autre côté, on a

$$E_{f_a} = \|f_a\|_2^2 \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-2ax^2}\, dx \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2a}}.$$

Il s'ensuit que

$$\sigma_{f_a} \times \sigma_{\hat{f}_a} \;=\; \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, E_f.$$

On a donc bien l'égalité annoncée dans le cas de fonctions gaussiennes. □

Avant de passer à la démonstration du cas général du principe d'Heisenberg (c'est-à-dire sans l'hypothèse de dérivabilité de f), établissons un résultat auxiliaire qui peut aussi se révéler utile ailleurs.

Résultat auxiliaire 8.4.2. *Soit une fonction $\chi \in C_\infty(\mathbb{R})$, à support compact et égale à 1 en 0. Quel que soit le naturel non nul m, posons*

$$\chi_m(x) \;=\; \chi\left(\frac{x}{m}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors, quelle que soit la fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{m\to+\infty} f\chi_m \;=\; f \quad \textit{et} \quad \lim_{m\to+\infty} f * \mathcal{F}^{\pm}\chi_m \;=\; 2\pi f \quad \textit{dans} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Preuve. Noter que comme χ est intégrable et de carré intégrable, les transformées de Fourier de χ_m dans L^1 et L^2 coïncident.

Regardons la convergence de gauche. Puisque $\chi(0) = 1$, la suite $f\chi_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge bien sûr presque partout vers f. Par ailleurs, comme

$$|f\chi_m - f|^2 \;\le\; |f|^2\,(1 + \|\chi\|_\infty)^2 \quad \forall m$$

le théorème de Lebesgue (convergence majorée) permet d'obtenir

$$\lim_{m\to+\infty} f\chi_m \;=\; f \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Regardons à présent la convergence de droite. Comme $\mathbb{F}^{\pm}f$ est de carré intégrable, on vient de voir que l'on a

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{F}^{\pm}f \times \chi_m \;=\; \mathbb{F}^{\pm}f \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R})$$

donc aussi

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{F}^{\mp}\left(\mathbb{F}^{\pm}f \times \chi_m\right) \;=\; 2\pi\, f \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Cela étant, vu la propriété 8.2.2 pour la dernière égalité, on a

$$\mathbb{F}^{\mp}\left(\mathbb{F}^{\pm}f\times\chi_m\right)=\mathcal{F}^{\mp}\left(\mathbb{F}^{\pm}f\times\chi_m\right)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^{\mp}\left(\mathbb{F}^{\pm}f\times\mathbb{F}^{\pm}\mathbb{F}^{\mp}\chi_m\right)=f*\mathcal{F}^{\mp}\chi_m.$$

Dès lors, on a bien

$$\lim_{m\to+\infty} f*\mathcal{F}^{\pm}\chi_m \ = \ 2\pi f.$$

□

Théorème 8.4.3. (Principe d'incertitude de Heisenberg dans $\mathbb{R}$, cas général)

Soit une fonction $f\in L^2$ telle que $x\mapsto xf(x)$ et $y\mapsto y\hat{f}(y)$ appartiennent aussi à $L^2(\mathbb{R})$ [5]. *Alors on a*

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}E_f \ \leq\ \sigma_f\times\sigma_{\hat{f}}$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx\ \leq\ \sqrt{\int_{\mathbb{R}}x^2\,|f(x)|^2\,dx}\times\sqrt{\int_{\mathbb{R}}y^2\,|\hat{f}(y)|^2\,dy}.$$

Un changement de variable dans l'intégrale avec la transformation de Fourier permet de dire que le résultat est vrai aussi avec la transformée « positive ».

Preuve. Remarquons tout d'abord que les hypothèses impliquent que f et $\hat{f}$ sont aussi intégrables sur $\mathbb{R}$. De fait, elles sont bien sûr localement intégrables puisqu'elles sont de carré intégrable. Et elles sont intégrables à l'infini puisqu'elles s'écrivent sous la forme du produit de deux fonctions qui sont de carré intégrable à l'infini :

$$f(x)\ =\ xf(x)\times\frac{1}{x}\qquad\text{et de même}\qquad \hat{f}(y)\ =\ y\hat{f}(y)\times\frac{1}{y}.$$

Considérons la suite χ_m ($m\in\mathbb{N}_0$) du résultat auxiliaire précédent et pour tout m, posons

$$\phi_m^{\pm}\ =\ f*\mathcal{F}^{\pm}\chi_m.$$

Montrons que ces fonctions vérifient toutes les hypothèses de l'inégalité de Heisenberg dans le cas régulier.

Par construction, ces fonctions sont de carré intégrable (L^2*L^1) et indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ (on le voit par application du théorème de dérivation des intégrales paramétriques ; l'intégrabilité de f permettant à l'hypothèse « non naturelle » d'être vérifiée). De plus, par construction encore, on a aussi

$$D\phi_m^{\pm}\ =\ f*D\mathcal{F}^{\pm}\chi_m\ \in\ L^2(\mathbb{R})\quad (L^2*L^1).$$

Pour avoir toutes les hypothèses de l'inégalité de Heisenberg dans le cas régulier, il reste donc à montrer que

$$x\mapsto x\phi_m^{\pm}(x)\ \in\ L^2(\mathbb{R}).$$

5. f appartient donc à l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$, lequel est l'espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ qui, en plus, sont telles que $y\mapsto y\hat{f}(y)$ appartiennent aussi à $L^2(\mathbb{R})$ (ceci signifiant que la dérivée de f au sens distribution est une fonction de carré intégrable)

On a successivement

$$\begin{aligned} x\phi_m^{\pm}(x) = x(f * \mathcal{F}^{\pm}\chi_m)(x) &= x \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\mathcal{F}_t^{\pm}\chi_m \; dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x-t)f(x-t)\mathcal{F}_t^{\pm}\chi_m \; dt \; + \; \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \; t\,\mathcal{F}_t^{\pm}\chi_m \; dt \\ &= \Big((.f(.)) * \mathcal{F}^{\pm}\chi_m\Big)(x) \; + \; \Big(f * (.\,\mathcal{F}_.^{\pm}\chi_m)\Big)(x). \end{aligned}$$

Chacun des termes de la somme de la dernière ligne est de carré intégrable, comme produit de convolution d'une fonction de carré intégrable avec une fonction intégrable. On peut donc conclure que les fonctions $x \to x\phi_m^{\pm}(x)$ sont de carré intégrable quel que soit m. Ainsi on a (**)

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \; \|\phi_m^{\pm}\|_2^2 \; \leq \; \sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2 \left|\phi_m^{\pm}(x)\right|^2 \; dx} \times \sqrt{\int_{\mathbb{R}} y^2 \left|\mathcal{F}^{\pm}\phi_m^{\pm}(y)\right|^2 \; dy}.$$

Noter qu'il n'y a pas de correspondance entre le $\pm$ de la transformation de Fourier et celui de ϕ_m.

On va maintenant passer à la limite sur m en ayant au préalable vérifié toutes les convergences indispensables dans L^2.

Vu le résultat auxiliaire 8.4.2, on a déjà

$$\lim_{m\to+\infty} \phi_m^{\pm} \; = \; 2\pi f.$$

Etudions alors le cas de la première intégrale du membre de droite. On a (cf précédemment)

$$x\phi_m^{\pm}(x) \; = \; \Big((.f(.)) * \mathcal{F}^{\pm}\chi_m\Big)(x) \; + \; \Big(f * (.\,\mathcal{F}_.^{\pm}\chi_m)\Big)(x).$$

Vu encore le résultat auxiliaire 8.4.2, on a également

$$\lim_{m\to+\infty} \Big((.f(.)) * \mathcal{F}^{\pm}\chi_m\Big)(x) \; = \; 2\pi\, xf(x) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Vu l'expression de $x\phi_m^{\pm}(x)$, pour prouver que cette suite converge vers la fonction $x \mapsto 2\pi x f(x)$ dans $L^2(\mathbb{R})$, il reste à prouver que

$$\lim_{m\to+\infty} f * (.\,\mathcal{F}_.^{\pm}\chi_m) \; = \; 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Montrons cela. Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $(.\,\mathcal{F}_.^{\pm}\chi_m) \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\left\|f * (.\,\mathcal{F}_.^{\pm}\chi_m)\right\|_2 \; \leq \; \|f\|_1 \times \left\|(.\,\mathcal{F}_.^{\pm}\chi_m)\right\|_2 \; \forall m \in \mathbb{N}_0$$

et

$$\left\|(.\,\mathcal{F}_.^{\pm}\chi_m)\right\|_2^2 \; = \; \left\|\widehat{D\chi_m}\right\|_2^2 \; = \; 2\pi \int_{\mathbb{R}} |D\chi_m(x)|^2 \; dx \; = \; \frac{2\pi}{m^2} \int_{\mathbb{R}} \left|(D\chi)\left(\frac{x}{m}\right)\right|^2 \; dx \; = \; \frac{2\pi}{m} \|D\chi\|_2^2.$$

Ainsi, quel que soit m, on a

$$\left\|f * (.\,\mathcal{F}_.^{\pm}\chi_m)\right\|_2 \; \leq \; \|f\|_1 \times \left\|(.\,\mathcal{F}_.^{\pm}\chi_m)\right\|_2 \; \forall m \in \mathbb{N}_0$$

$$\|f * (.\widehat{\chi_m}(.))\|_2 \; \leq \; \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{m}} \; \|f\|_1 \, \|D\chi\|_2^2$$

et on peut conclure pour le point traité.

Enfin, on a

$$\mathcal{F}^{\mp}\phi_m^{\pm} \;=\; \mathcal{F}^{\mp}\left(f * \mathcal{F}^{\pm}\chi_m\right) \;=\; 2\pi\,\mathcal{F}^{\mp}f \times \chi_m$$

et le résultat auxiliaire 8.4.2 donne encore une fois

$$\lim_{m\to+\infty} y\,\mathcal{F}_y^{\mp}\phi_m^{\pm} \;=\; 2\pi\,y\,\mathcal{F}_y^{\mp}f \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}).$$

La conclusion est alors immédiate. On reprend (**), on divise chacun des membres de l'inégalité par $4\pi^2$ et on passe à la limite sur m. On a d'une part

$$\frac{1}{4\pi^2}\lim_{m\to+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;\|\phi_m^{\pm}\|_2^2 \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\;\|f\|_2^2$$

et d'autre part,

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{m\to+\infty} y\,\mathcal{F}_y^{\mp}\phi_m^{\pm} \;=\; y\,\mathcal{F}_y^{\mp}f \qquad \frac{1}{2\pi}\lim_{m\to+\infty} x\,\phi_m^{\pm}(x) \;=\; x\,f(x) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}).$$

On peut alors conclure. □

Remarque 8.4.4. *Quels que soient $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, sous les mêmes hypothèses sur f que dans le théorème 8.4.3, a aussi*

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\|f\|_2^2 \;\leq\; \sqrt{\int_{\mathbb{R}}(x-x_0)^2|f(x)|^2\;dx} \times \sqrt{\int_{\mathbb{R}}(y-y_0)^2|\hat{f}(y)|^2\;dy}.$$

Preuve. Soit f vérifiant les hypothèses comme annoncé. Comme la fonction g définie par

$$g(x) \;=\; e^{-iy_0x}f(x+x_0)$$

vérifie ces mêmes hypothèses, on peut utiliser le théorème 8.4.3 avec elle. Des changements de variables clairs et directs donnent alors

$$\begin{aligned}\|g\|_2^2 &= \|f\|_2^2\\ \int_{\mathbb{R}} x^2\,|g(x)|^2\;dx &= \int_{\mathbb{R}}(x-x_0)^2\,|f(x)|^2\;dx\\ \int_{\mathbb{R}} y^2\,|\hat{g}(y)|^2\;dy &= \int_{\mathbb{R}}(y-y_0)^2\,|\hat{f}(y)|^2\;dy\end{aligned}$$

et on conclut.□

Chapitre 9

Compléments sur les espaces de Hilbert

9.1 Rappels

Rappelons tout d'abord quelques définitions de base ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que l'on désignera par $\mathbb{K}$. On appelle produit scalaire sur H une application

$$< .,. > : \ H \times H \to \mathbb{K}$$

qui vérifie les propriétés suivantes. Quels que soient $h, g, e \in H$ et $c \in \mathbb{K}$, on a

$$(1) \ < h, h > \geq 0 \ \text{ et } \ < h, h >= 0 \Leftrightarrow h = 0, \quad (2) \ < ch, g >= c < h, g >,$$

$$(3) \ < h + g, e >=< h, e > + < g, e >, \quad (4) \overline{< h, g >} =< g, h > .$$

Propriété(s) 9.1.1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Quels que soient $g, h \in H$, on a

$$|< g, h >| \ \leq \ \sqrt{< g, g >} \sqrt{< h, h >}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si g et h sont linéairement dépendants.

Preuve. Pour tout complexe λ, on a (*)

$$0 \ \leq < h - \lambda g, h - \lambda g > = < h, h > -\lambda < g, h > -\overline{\lambda} < h, g > +|\lambda|^2 < g, g > .$$

Si $< g, g >\neq 0$, en prenant $\lambda =< h, g > / < g, g >$, on obtient (**)

$$0 \ \leq < h, h > -\frac{| < h, g > |^2}{< g, g >} - \frac{| < h, g > |^2}{< g, g >} + \frac{| < h, g > |^2}{< g, g >} \ = < h, h > -\frac{| < h, g > |^2}{< g, g >}$$

donc

$$|< g, h >| \ \leq \ \sqrt{< g, g >} \sqrt{< h, h >}.$$

Lorsque $< g, g >= 0$, on a $g = 0$ donc $< g, h >= 0$ et l'inégalité reste vraie.

Cela étant, si g et h sont linéairement dépendants, il est clair que l'égalité a lieu. Réciproquement, si l'égalité a lieu et si $g \neq 0$, alors, vu l'inégalité (**), on obtient

$$0 \ = < h - \lambda g, h - \lambda g >$$

avec $\lambda = <h,g> / <g,g>$ donc $h = \lambda g$. Si g est nul, g,h sont bien sûr linéairement dépendants.

Remarquons qu'en prenant $\lambda = r<h,g>$ avec r réel, l'inégalité (*) devient

$$0 \leq <h-\lambda g, h-\lambda g> = <h,h> -r|<g,h>|^2 - r|<h,g>|^2 + r^2|<h,g><g,g>$$

et on peut aussi conclure en utilisant le fait que si le coefficient de r^2 n'est pas nul, alors le discriminant du trinôme est négatif. □

Grâce à cette inégalité, on va montrer que la loi $\|.\| : H \to [0,+\infty[\quad h \mapsto \sqrt{<h,h>}$ est une norme sur H. Un espace H muni d'un produit scalaire et de la norme associée est appelé *espace pré-hilbertien* et *hilbertien* (ou de Hilbert) si en outre toutes les suites de Cauchy (pour la norme) convergent.

Propriété(s) 9.1.2. *La loi*

$$\|.\| : H \to [0,+\infty[\quad h \mapsto \sqrt{<h,h>}$$

est une norme sur H.

Preuve. Vu la propriété (1) du produit scalaire, il est clair que cette application est bien définie et telle que $\|h\| = 0$ si et seulement si $h = 0$.

Cela étant, pour $h \in H$ et $c \in \mathbb{K}$, on a aussi directement

$$\|ch\| = \sqrt{<ch,ch>} = \sqrt{c\bar{c}<h,h>} = |c|\|h\|$$

en utilisant les propriétés (2) et (4) du produit scalaire.

Il reste donc à montrer l'inégalité triangulaire, à savoir

$$\sqrt{<h+g,h+g>} \leq \sqrt{<h,h>} + \sqrt{<g,g>} \quad \forall h,g \in H.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} <h+g,h+g> &= <h,h> + <g,g> + <h,g> + <g,h> \\ &= <h,h> + <g,g> +2\Re(<h,g>) \\ &\leq <h,h> + <g,g> +2|<h,g>| \\ &\leq <h,h> + <g,g> +2\sqrt{<h,h>}\sqrt{<g,g>} \quad \text{inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &= \left(\sqrt{<h,h>} + \sqrt{<g,g>}\right)^2 \end{aligned}$$

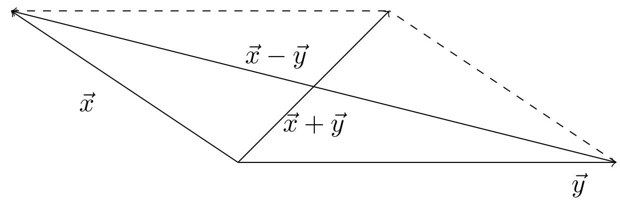
et on conclut. □

9.2 Compléments

Résultat auxiliaire 9.2.1. (Identité du parallélogramme)

Soit un espace pré-hilbertien H, de norme et produit scalaire notés respectivement $\|.\|$ et $<.,.>$. Quels que soient les éléments x,y de H, on a

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$



Preuve. C'est immédiat en repassant à la définition de la norme d'un tel espace. De fait, on a

$$\|x+y\|^2 \;=\; \|x\|^2+\|y\|^2+ < x,y > + < y,x > \quad \text{et} \quad \|x-y\|^2 \;=\; \|x\|^2+\|y\|^2- < x,y > - < y,x >$$

donc

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 \;=\; 2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

□

Théorème 9.2.2. (Distance à un sous-espace fermé)

Soit V un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. Alors, pour tout $h \in H$, il existe $v_0 \in V$ tel que

$$\|h-v_0\| \;=\; \inf_{v\in V} \|h-v\|.$$

Cet élément v_0 est unique.

Preuve. Démontrons d'abord l'existence. La borne inférieure existe puisqu'une norme est à valeurs positives. Posons

$$d \;=\; \inf_{v\in V} \|h-v\|.$$

Cela étant, vu la définition d'une borne inférieure (« le plus grand des minorants »), il existe une suite w_m ($m \in \mathbb{N}_0$) d'éléments de V telle que

$$d^2 \;\leq\; \|h-w_m\|^2 \;\leq\; d^2+\frac{1}{m}. \qquad (*)$$

Montrons alors que cette suite est de Cauchy. En utilisant l'identité du parallélogramme avec les vecteurs w_r-h et w_s-h et le fait que V est un espace vectoriel, on obtient

$$\begin{aligned}
\|w_r-w_s\|^2 = \|(w_r-h)-(w_s-h)\|^2 &= 2\|w_r-h\|^2+2\|w_s-h\|^2-\|(w_r-h)+(w_s-h)\|^2\\
&\leq 4d^2+\frac{2}{r}+\frac{2}{s}-\|w_r+w_s-2h\|^2\\
&= 4d^2+\frac{2}{r}+\frac{2}{s}-4\left\|\frac{w_r+w_s}{2}-h\right\|^2\\
&\leq 4d^2+\frac{2}{r}+\frac{2}{s}-4d^2\\
&= \frac{2}{r}+\frac{2}{s}
\end{aligned}$$

quels que soient les naturels strictement positifs r,s ; on peut donc conclure.

Maintenant, comme l'espace H est complet et que V en est un sous-espace vectoriel fermé, la suite w_m ($m \in \mathbb{N}$) converge en norme vers un élément v_0 de V donc la suite $h-w_m$ ($m \in \mathbb{N}$) converge en norme vers $h-v_0$ et les inégalités (*) donnent

$$\|h-v_0\| \;=\; d.$$

Passons alors à l'unicité. Supposons que v_0' soit aussi un élément de V qui réalise la borne inférieure dont il est question ici. En utilisant l'identité du parallélogramme on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\|v_0 - v_0'\|^2 &= \left\|(v_0 - h) - \left(v_0' - h\right)\right\|^2 \\
&= 2\left\|v_0 - h\right\|^2 + 2\left\|v_0' - h\right\|^2 - \left\|(v_0 - h) + \left(v_0' - h\right)\right\|^2 \\
&= 4d^2 - 4\left\|\frac{v_0 + v_0'}{2} - h\right\|^2 \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

et donc $v_0 = v_0'$. □

Propriété(s) 9.2.3. (Distance à un sous-espace fermé et orthogonalité)

Soit V un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H et soit $h \in H$. Alors $v_0 \in V$ est tel que

$$\|h - v_0\| = \inf_{v \in V} \|h - v\|$$

si et seulement si

$$< h - v_0, v > = 0 \quad \forall v \in V.$$

Preuve. Supposons que v_0 réalise la borne inférieure. On va montrer que

$$\Re\left(< h - v_0, v >\right) = 0,\ \forall v \in V,$$

et, de façon analogue, que

$$\Im\left(< h - v_0, v >\right) = 0,\ \forall v \in V.$$

Quel que soit le complexe λ, comme V est un espace vectoriel, on a

$$\|h - v_0 + \lambda v\| = \|h - (v_0 - \lambda v)\| \geq d = \|h - v_0\|.$$

Notons aussi que (*)

$$\|h - v_0 + \lambda v\|^2 = \|h - v_0\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\Re\left(< h - v_0, \lambda v >\right).$$

Cela étant, si λ est réel strictement positif, comme

$$\|h - v_0 + \lambda v\|^2 = \|h - v_0\|^2 + \lambda^2\|v\|^2 + 2\lambda\Re\left(< h - v_0, v >\right)$$

on déduit de l'inégalité précédente que

$$\lambda^2\|v\|^2 + 2\lambda\Re\left(< h - v_0, v >\right) \geq 0$$

donc

$$\lambda\|v\|^2 + 2\Re\left(< h - v_0, v >\right) \geq 0.$$

On obtient

$$\Re\left(< h - v_0, v >\right) \geq 0,\ \forall v \in V,$$

en passant à la limite quand $\lambda \to 0$.

Si λ est réel strictement négatif, en procédant de même, on obtient

$$\Re\left(< h - v_0, v >\right) \leq 0,\ \forall v \in V,$$

en passant à la limite quand $\lambda \to 0$.

Dès lors

$$\Re\left(< h - v_0, v >\right) \ = \ 0, \ \forall v \in V,$$

Pour obtenir la même chose de la même manière mais avec la partie imaginaire, il suffit de prendre $\lambda = ir$ avec r réel dans (*) car dans ce cas, vu que $\Re(-i(a+ib)) = b$ avec a, b réels, on a

$$\Re\left(< h - v_0, irv >\right) \ = \ r\Im(< h - v_0, v >).$$

Passons alors à la réciproque et montrons que si le vecteur $h - v_0$ est orthogonal à tout vecteur de v, il réalise la borne inférieure dont il est question ici.

Quel que soit $v \in V$, on a (en utilisant Pythagore)

$$\|h - v\|^2 \ = \ \|h - v_0 + v_0 - v\|^2 \ = \ \|h - v_0\|^2 + \|v_0 - v\|^2 \ \geq \ \|h - v_0\|^2.$$

Ainsi

$$\inf_{v \in V} \|h - v\| \geq \|h - v_0\| \ \geq \inf_{v \in V} \|h - v\|$$

et on conclut. $\square$

Théorème 9.2.4. (Projection orthogonale et complément orthogonal)

Soit V un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. On définit alors le complément orthogonal de V dans H comme étant l'ensemble

$$V^\perp \ = \ \{h \in H \ : < h, v >= 0, \ \forall v \in V\}.$$

Alors
(1) *$V^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H*
(2) *on a $V \cap V^\perp = \{0\}$ et pour tout élément h de H, il existe des vecteurs uniques $v \in V$ et $v' \in V^\perp$ tels que $h = v + v'$; on a même $\|h - v\| = \inf_{u \in V} \|h - u\|$*
(3) *$\left(V^\perp\right)^\perp = V$*
(4) *l'opérateur $P_V : H \mapsto V$ défini par $P_V h = v$ (v comme ci-dessus) est linéaire, continu, surjectif et tel que $P_V \circ P_V = P_V$. On l'appelle le projecteur orthogonal de H sur V.*

Preuve. **(1)** C'est tout à fait immédiat vu la propriété de linéarité d'un produit scalaire et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(2) D'une part si $v \in V \cap V^\perp$, alors $< v, v >= 0$ donc $v = 0$.

D'autre part si $h \in H$, alors $h = h - v_0 + v_0$ avec v_0 comme dans les propriétés 9.2.2 et 9.2.3. On a donc l'existence de la décomposition. Quant à l'unicité, si $v_1 \in V$ et $v_1' \in V^\perp$ sont tels que $h = v_1 + v_1' = v_0 + v_0'$ alors

$$u \ = \ v_0 - v_1 \ = \ v_1' - v_1 \ \in V \cap V^\perp = \{0\}$$

donc

$$v_0 \ = v_0' \quad \text{et} \quad v_1 = v_1'$$

et on conclut.

(3) Soit $v \in V$. Pour tout $u \in V^\perp$, on a $< v, u >= 0$, ce qui implique $v \in \left(V^\perp\right)^\perp$; ainsi

$$V \subset \left(V^\perp\right)^\perp.$$

Soit alors $w \in \left(V^\perp\right)^\perp \subset H$. Vu le point (2) ci-dessus, il existe des vecteurs uniques $v \in V$ et $v' \in V^\perp$ tels que $w = v + v'$. On a alors

$$0 \ = < w, v' > = < v, v' > + \|v'\|^2 \ = \ \|v'\|^2$$

donc $v' = 0$ et finalement $w = v \in V$.

(4) Montrons que l'opérateur est linéaire. Soient $h, h' \in H$ et $c \in \mathbb{C}$; montrons que

$$P_V(ch) = cP_V h \quad \text{et} \quad P_V(h + h') = P_V h + P_V h'.$$

D'une part vu le point (2) ci-dessus, on a

$$h \ = \ P_V(h) + h - P_V(h)$$

avec $P_V(h) \in V$ et $h - P_V(h) = V^\perp$ donc

$$ch \ = \ cP_V(h) + c(h - P_V(h))$$

avec $cP_V(h) \in V$ et $c(h - P_V(h)) \in V^\perp$ puisque V et $V^\perp$ sont des espaces vectoriels. Ainsi, vu (2) encore (unicité), on obtient

$$P_V(ch) \ = \ cP_V(h).$$

Montrons alors la seconde égalité. Vu le point (2) ci-dessus (unicité), on a

$$h + h' \ = \ P_V(h) + (h - P_V(h)) \ + \ P_V(h') + (h' - P_V(h'))$$

avec

$$P_V(h), P_V(h') \in V \quad \text{et} \quad h - P_V(h), h' - P_V(h') \in V^\perp.$$

Ainsi

$$h + h' \ = \ \Big(P_V(h) + P_V(h')\Big) \ + \ \Big(h - P_V(h) + h' - P_V(h')\Big)$$

avec

$$P_V(h) + P_V(h') \in V \quad \text{et} \quad h - P_V(h) + h' - P_V(h') \in V^\perp.$$

Ainsi, encore vu le point (2) ci-dessus, on obtient

$$P_V(h + h') \ = \ P_V(h) + P_V(h').$$

La continuité est immédiate car

$$\|h\|^2 \ = \ \|P_V(h) + (h - P_V(h)\|^2 \ = \ \|P_V(h)\|^2 + \|h - P_V(h)\|^2 \ \geq \ \|P_V(h)\|^2.$$

La surjectivité est encore plus immédiate : si $v \in V$ alors $v = v + 0$ avec $v \in V$ et $0 \in V^\perp$. L'unicité de la décomposition permet alors d'obtenir $P_V(v) = v$.

Et enfin, puisque $P_V(h) \in V$ quel que soit $h \in H$, comme ci-dessus on a $P_V(P_V(h)) = P_V(h)$.$\square$

9.3 A propos de suite croissante de sous-espace fermés...

Cette section met en place toute une série de résultats qui seront utilisés dans le chapitre consacré aux ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$. Il sont placés ici car ils sont valables dans un espace de Hilbert général, pas seulement dans $L^2(\mathbb{R})$.

Considérons une suite croissante V_j ($j \in \mathbb{Z}$) de sous-espaces linéaires fermés d'un espace de Hilbert H. Pour tout j, notons alors W_j le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1}. Pour tout j, on a donc

$$V_j \underset{\perp}{\oplus} W_j = V_{j+1}.$$

Désignons alors par P_j la projection orthogonale de H sur V_j. On a donc $P_j(f) = 0$ pour tout f orthogonal à V_j et $P_j(f) = f$ pour tout $f \in V_j$. De même, désignons par Q_j la projection orthogonale de H sur W_j.

Propriété(s) 9.3.1. (Lien entre les opérateurs P_j et Q_j) *Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$(1) P_{j+k} \circ P_j \;=\; P_j \quad (2)\; P_j \circ P_{j+k} \;=\; P_j \quad \textit{et} \quad (3)\; Q_j = P_{j+1} - P_j$$

Preuve. Soit $f \in H$.
(1) Comme $P_m(f) = f$ si $f \in V_m$, on a $P_{j+k}\left(P_j(f)\right) = \; P_j(f)$ puisque $P_j(f) \in V_j \subset V_{j+k}$.
(2) Par définition d'un projecteur orthogonal, on a

$$f \;=\; P_{j+k}(f) + g \quad \text{avec} \quad g \text{ orthogonal à } V_{j+k}$$

donc

$$P_j(f) \;=\; P_j\left(P_{j+k}(f)\right) + P_j(g) \;=\; P_j\left(P_{j+k}(f)\right)$$

puisque $V_j \subset V_{j+k}$ et que g est orthogonal à V_{j+k}.
(3) Par définition d'un projecteur orthogonal, on a

$$f \;=\; P_{j+1}(f) + g$$

où g est orthogonal à V_{j+1}. Ecrivons ensuite

$$f \;=\; P_{j+1}(f) - P_j(f) + P_j(f) + g.$$

On a $P_j(f) \in V_j$, donc $P_j(f)$ est orthogonal à W_j ; comme g est orthogonal à V_{j+1}, il l'est aussi à W_j vu que $W_j \subset V_{j+1}$. Dès lors $P_j(f) + g$ est orthogonal à W_j et pour conclure que $Q_j = P_{j+1} - P_j$, il suffit donc de démontrer que $P_{j+1}(f) - P_j(f)$ appartient à W_j.

C'est bien le cas car d'une part $P_{j+1}(f) - P_j(f) \in V_{j+1}$ et d'autre part $P_{j+1}(f) - P_j(f)$ est orthogonal à V_j ; de fait en utilisant la décomposition de $P_{j+1}(f)$, on a

$$P_{j+1}(f) \;=\; P_j(P_{j+1}(f)) + g'$$

avec g' orthogonal à V_j et $P_j(P_{j+1}(f)) = P_j(f)$ comme établi en (2) ; dès lors $P_{j+1}(f) - P_j(f) = g'$ est bien orthogonal à V_j. □

Lemme 9.3.2. *(1) Pour tout $f \in H$, la suite*

$$\sum_{j=-N}^{N} \|Q_j(f)\|^2 \quad N \in \mathbb{N}$$

converge vers une limite finie ; on en déduit que la suite

$$\sum_{j=-N}^{N} Q_j(f) \quad N \in \mathbb{N}$$

converge dans H.

(2) Pour tout $f \in H$, les suites

$$P_j(f),\ (j \in \mathbb{N}) \quad et \quad P_{-j}(f),\ (j \in \mathbb{N})$$

convergent dans H.

Preuve. Notons d'abord que si $j, j' \in \mathbb{Z}$ diffèrent, alors W_j et $W_{j'}$ sont orthogonaux car par exemple si $j < j'$, on a $W_j \subset V_{j+1} \subset V_{j'}$ et $W_{j'}$ est orthogonal à $V_{j'}$. Dès lors si on démontre la première partie de (1), on aura la seconde.

Et de même si $j \leq k$ alors W_k et V_j sont othogonaux car $V_j \subset V_k$ et $V_k \perp W_k$.

(1) Cela étant, pour tout $N \in \mathbb{N}$, de l'égalité (cf (3) de la propriété 9.3.1)

$$P_{N+1}(f) \;=\; P_N(f) + Q_N(f) \;=\; \ldots \;=\; P_{-N}(f) + \sum_{j=-N}^{N} Q_j(f)$$

on tire

$$\|P_{N+1}(f)\|^2 \;=\; \|P_{-N}(f)\|^2 + \sum_{j=-N}^{N} \|Q_j(f)\|^2$$

donc

$$\sum_{j=-N}^{N} \|Q_j(f)\|^2 \;\leq\; \|P_{N+1}(f)\|^2 \;\leq\; \|f\|^2.$$

On en déduit que les suites

$$\sum_{j=-N}^{N} \|Q_j(f)\|^2, \quad N \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{j=0}^{N} \|Q_j(f)\|^2, \quad N \in \mathbb{N}$$

et

$$\sum_{j=-N}^{0} \|Q_j(f)\|^2, \quad N \in \mathbb{N}$$

sont croissantes et majorées, donc convergent.

(2) Pour tous entiers p, q tels que $q > p$, on a aussi (cf (2) de la propriété 9.3.1 et l'orthogonalité de W_j)

$$\|P_p(f) - P_q(f)\|^2 \;=\; \sum_{j=p}^{q-1} \|Q_j(f)\|^2.$$

Les suites de l'énoncé sont donc de Cauchy dans H et par conséquent elles y convergent. □

Propriété(s) 9.3.3. *(1) On a*

$$\lim_{j\to+\infty} P_j(f) \;=\; f$$

pour tout $f \in H$ si et seulement si

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = H.$$

(2) On a

$$\lim_{j\to-\infty} P_j(f) \;=\; 0$$

pour tout $f \in H$ si et seulement si

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$$

Preuve. (1) Il est évident que si $\lim_{j\to+\infty} P_j(f) \;=\; f$ pour tout $f \in H$ alors $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = H$.

Montrons la réciproque. Soient $f \in H = \overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe donc J et $f_J \in V_J$ tels que $\|f - f_J\| \le \varepsilon$ et ainsi, pour $j \ge J$

$$\begin{aligned}
\|f - P_j(f)\| &= \|f - f_J + f_J - P_j(f)\| \\
&\le \|f - f_J\| + \|f_J - P_j(f)\| \\
&= \|f - f_J\| + \|P_j(f_J) - P_j(f)\| \\
&\le 2\,\|f - f_J\| \;\le\; 2\varepsilon
\end{aligned}$$

et on conclut.

(2) Il est évident que la convergence des projections implique que l'intersection est réduite au seul élément 0 car si f appartient à cette intersection alors $P_j(f) = f$ pour tout j et on conclut.

Montrons alors la réciproque. Supposons donc que l'intersection des V_j soit réduite à l'espace trivial et prenons $f \in H$. Vu le lemme 9.3.2, on sait que la suite $P_j(f)$ $(j \in \mathbb{Z})$ converge quand $j \to -\infty$. Sa limite g est nécessairement nulle : de fait, pour tout J, on a $P_j(f) \in V_J$ lorsque $j \le J$ donc la limite (sur $j \to -\infty$) g appartient aussi à V_J puisque cet ensemble est fermé. Ainsi g est dans l'intersection de tous les V_J et est donc nul. □

Maintenant, combinons alors les résultats précédents.

Théorème 9.3.4. *Supposons que les sous-espaces V_j possèdent en outre les propriétés suivantes*

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = H \quad \text{et} \quad \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$$

Alors pour tout $f \in H$, on a (convergence dans H bien sûr)

$$f = \lim_{J\to+\infty} \sum_{j=-J}^{J} Q_j(f) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Q_j(f).$$

Preuve. Pour tout $J \in \mathbb{N}$, on a (cf (2) de la propriété 9.3.1)

$$P_{J+1}(f) \;=\; P_J(f) + Q_J(f) \;=\; \ldots \;=\; P_{-J}(f) + \sum_{j=-J}^{J} Q_j(f).$$

Vu le résultat 9.3.3, on a

$$\lim_{J\to+\infty} P_{J+1}(f) = f \quad \text{et} \quad \lim_{J\to+\infty} P_{-J}(f) = 0.$$

On peut donc conclure. □

Dans le chapitre consacré aux ondelettes, les espaces V_j servent *d'espaces d'approximation* et W_j, complément orthogonal de V_j dans V_{j+1}, apparaît comme étant un espace de compléments d'information pour passer de l'approximation dans V_j à celle dans V_{j+1}.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\ldots & V_j & & \subset & & V_{j+1} & & \subset & & V_{j+2} & & \subset & & V_{j+3} & \ldots \\
 & & \underset{\perp}{\oplus} & & = & & \underset{\perp}{\oplus} & & = & & \underset{\perp}{\oplus} & & = & & \\
\ldots & & & W_j & & \perp & & W_{j+1} & & \perp & & W_{j+2} & & \ldots &
\end{array}$$

9.4 Base de Riesz

Notons l^2 l'ensemble des suites de complexes $\vec{c} = (c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telles que la série

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |c_m|^2$$

soit convergente. On montre directement (s'inspirer de $\mathbb{C}^N$) que
- cet espace est un espace vectoriel
- la loi

$$(\vec{c}, \vec{d}) \mapsto \sum_{m=0}^{+\infty} c_m \overline{d_m}$$

est un produit scalaire sur l^2
- muni de la norme associée à ce produit scalaire, l^2 est un espace de Banach (donc finalement de Hilbert).

On a alors le résultat suivant, qui généralise la notion de base orthonormée.

Théorème 9.4.1. *Soit un espace de Hilbert H et soit une suite f_m $(m \in \mathbb{N})$ d'éléments de H d'enveloppe linéaire dense dans H et pour laquelle il existe des constantes $A, B > 0$ telles que $A \leq B$ et*

$$A \sum_{(m)} |c_m|^2 \;\leq\; \left\| \sum_{(m)} c_m f_m \right\|_H^2 \;\leq\; B \sum_{(m)} |c_m|^2$$

pour toute famille finie de complexes c_m (condition de Riesz). Alors pour tout $f \in H$, il existe une suite unique c_m $(m \in \mathbb{N})$ de l^2 telle que

$$f \;=\; \sum_{m=0}^{+\infty} c_m f_m \quad \textit{dans } H.$$

Preuve. L'unicité est immédiate car si les suites c_m $(m \in \mathbb{N})$ et d_m $(m \in \mathbb{N})$ de l^2 sont telles que

$$f \;=\; \sum_{m=0}^{+\infty} c_m f_m \;=\; \sum_{m=0}^{+\infty} d_m f_m \quad \text{dans } H,$$

on obtient

$$A \sum_{m=0}^{+\infty} |c_m - d_m|^2 \;\leq\; \left\| \sum_{m=0}^{+\infty} (c_m - d_m) f_m \right\|_H^2 \;=\; \|f - f\|_H^2 \;=\; 0$$

donc $c_m = d_m$ quel que soit m.

Considérons alors l'opérateur T défini sur l^2 par

$$T: \ l^2 \ \to \ H \qquad \vec{c} = (c_m)_{m\in\mathbb{N}} \ \mapsto \ \sum_{m=0}^{+\infty} c_m \, f_m.$$

Celui-ci est bien défini grâce à la seconde inégalité de la condition de Riesz et on peut écrire

$$A \, \|\vec{c}\|_{l^2}^2 \ \leq \ \|T\vec{c}\|^2 \ \leq \ B \, \|\vec{c}\|_{l^2}^2$$

quel que soit $\vec{c} \in l^2$. Il est aussi linéaire et continu, encore grâce à cette seconde inégalité.

Montrons que son image $V = Tl^2$ est un fermé de H. Soit $\vec{c}^{(m)}$ ($m \in \mathbb{N}$) une suite de l^2 telle que

$$\lim_{m\to+\infty} T\vec{c}^{(m)} \ = \ h \in H \quad \text{dans } H.$$

Comme on a

$$A \, \|\vec{c}^{(p)} - \vec{c}^{(r)}\|_{l^2}^2 \ \leq \ \|T\vec{c}^{(p)} - T\vec{c}^{(r)}\|^2$$

quels que soient $p, r \in \mathbb{N}$, la suite $\vec{c}^{(m)}$ ($m \in \mathbb{N}$) est de Cauchy dans l^2, donc y converge vers un élément $\vec{c}$. Comme T est continu, on a aussi

$$\lim_{m\to+\infty} T\vec{c}^{(m)} \ = \ T\vec{c}$$

et dès lors, par unicité de la limite dans H, on obtient

$$h \ = \ T\vec{c}.$$

Cela étant, comme l'enveloppe linéaire des éléments de la suite f_m ($m \in \mathbb{N}$) est incluse dans TV et est dense dans H on obtient

$$\overline{span\{f_m \ : \ m \in \mathbb{N}\}} = H \ \subset \ \overline{Tl^2} \ = Tl^2 \subset \ H.$$

L'opérateur T est donc surjectif et par conséquent la suite f_m ($m \in \mathbb{N}$) est bien une base (topologique) de H.□

Proposition 9.4.2. *Soit un espace de Hilbert H et soit une suite f_m ($m \in \mathbb{N}$) d'éléments de H ; alors les f_m ($m \in \mathbb{N}$) forment une famille orthonormée si et seulement si*

$$\sum_{(m)} |c_m|^2 \ = \ \left\| \sum_{(m)} c_m \, f_m \right\|_H^2$$

quelle que soit la famille finie de complexes c_m.

Dès lors, si

$$f \ = \ \sum_{m=0}^{+\infty} c_m \, f_m \quad \textit{dans } H$$

alors $c_m =< f, f_m >$ quel que soit m.

Preuve. Il est clair que l'orthonormalité donne l'égalité annoncée (cf le chapitre consacré aux suites orthonormées).

Montrons que la réciproque est vraie.

D'une part, pour tout m, en prenant $c_m = 1$, on obtient directement $\|f_m\| = 1$. D'autre part, pour $m \neq k$, en prenant $c_k = c_m = 1$ on a

$$2 \;=\; \|f_m + f_k\|^2 \;=\; \|f_m\|^2 + \|f_k\|^2 + 2\Re\left(< f_m, f_k >\right) \;=\; 2 + 2\Re\left(< f_m, f_k >\right)$$

et, en prenant $c_m = 1, c_k = i$ n a

$$2 \;=\; \|f_m + if_k\|^2 \;=\; \|f_m\|^2 + \|f_k\|^2 + 2\Re\left(< f_m, if_k >\right) \;=\; 2 + 2\Im\left(< f_m, f_k >\right)$$

donc

$$\Re\left(< f_m, f_k >\right) \;=0\;=\; \Im\left(< f_m, f_k >\right).$$

$\square$

Chapitre 10

Ondelettes

Ce qui suit est un extrait de Wikipedia.

Les ondelettes ont vu le jour lorsque certains sujets d'étude ont nécessité une analyse en fréquence et en temps. Au 19e siècle, l'analyse de Fourier était la seule technique permettant la décomposition d'un signal et sa reconstruction sans perte d'information ; malheureusement elle fournit une analyse en fréquence mais ne permet pas la localisation temporelle de changements abrupts, comme l'apparition d'une deuxième note de musique après qu'une première note a été jouée. En 1909, Alfréd Haar définit une fonction composée d'une courte impulsion négative suivie d'une courte impulsion positive, connue pour être la première ondelette (Ondelette de Haar). En 1946, Dennis Gabor, mathématicien hongrois, inventa une transformation de fonction analogue à celle de Joseph Fourier, appliquée sur une fenêtre temporelle exprimée par une fonction gaussienne. Finalement, le terme d'ondelette fut introduit dans le langage mathématique par Jean Morlet et Alex Grossmann en 1984. Terme initialement français, il fut traduit en anglais par wavelet, à partir des termes wave (onde) et le diminutif let (petite). Yves Meyer (prix Abel 2017), reconnu comme un des fondateurs de la théorie des ondelettes, rassembla en 1986 toutes les découvertes précédentes (il en dénombra 16) puis définit les ondelettes orthogonales. La même année, Stéphane Mallat fit le lien entre les ondelettes et l'analyse multirésolution. Enfin, Ingrid Daubechies mit au point en 1987 des ondelettes orthogonales appelées ondelettes de Daubechies, faciles à mettre en oeuvre, et utilisées dans le standard JPEG 2000.

L'intérêt des ondelettes réside dans le fait qu'elles procurent une analyse temps-échelle, en utilisant à la fois un facteur de translation et un facteur de dilatation (respectivement k, j dans le cas discret). La fenêtre pour l'analyse du signal peut ainsi être translatée et ≪ zoomée ≫ pour s'adapter au signal et en donner une meilleure et moins couteuse (mémoire de stockage) analyse.

10.1 Cas de $H = L^2(\mathbb{R})$ et des translatés dilatés

L'idée est de construire une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ de telle sorte que les fonctions

$$\psi_{j,k}(.) \; = \; 2^{j/2}\, \psi(2^j. - k)$$

forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

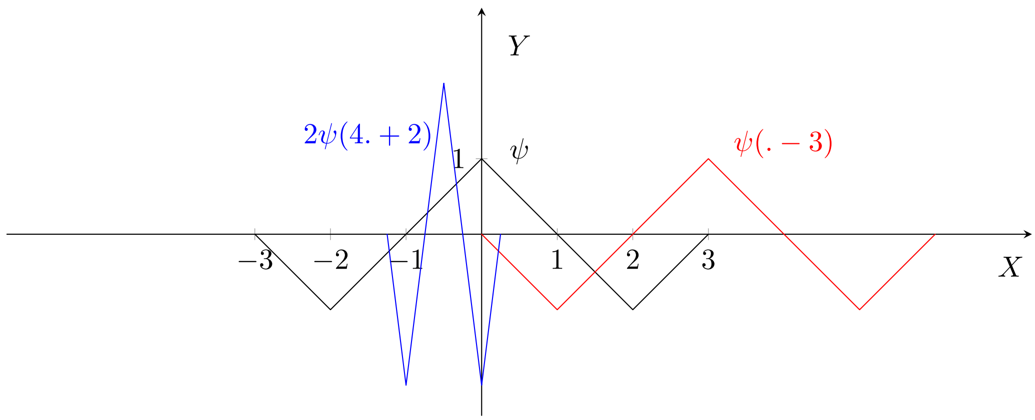
Définition 10.1.1. *Une base orthonormée d'ondelettes dans $L^2(\mathbb{R})$ est une suite de fonctions $\psi_{j,k}$ $(j, k \in \mathbb{Z})$ formant une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ et qui sont définies par*

$$\psi_{j,k}(x) \; = \; 2^{j/2}\psi\left(2^j x - k\right), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

avec $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

L'expression explicite de ψ ci-dessous est

$$\psi(x) \ = \ \begin{cases} |x+2|-1 & \text{si } x \in [-3,-1] \\ -|x|+1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ |x-2|-1 & \text{si } x \in [1,3] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



La fonction $\psi_{2,0} : x \mapsto \psi(4x)$ a donc pour support $[-3/4, 3/4]$ et est formée de trois « morceaux » (ceux qui correspondent aux descriptions ci-dessus de ψ) ; chaque « morceau » doit être tracé sur un intervalle de longueur $2/4 = 1/2$. Et comme on a $\psi(4x+2) = \psi(4(x+1/2)$, on obtient le graphique bleu ($\psi_{2,-2}$) par une translation de $\psi_{2,0}$ vers la gauche d'amplitude $1/2$, ce qui donne une fonction de support $[-5/4, 1/4]$.

Etudions les propriétés relatives à ces translatés dilatés, lesquelles seront exploitées par la suite dans le processus de construction.

Propriété(s) 10.1.2. (Orthogonalité et échelles) *Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. L'orthogonalité des fonctions $\psi_{0,k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ est équivalente au fait que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les fonctions $\psi_{j,k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont orthogonales.*

Preuve. Cela résulte d'un simple calcul. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tous $k, k' \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} < \psi_{j,k}, \psi_{j,k'} > \ &= \ 2^j \int_{\mathbb{R}} \psi\left(2^j x - k\right) \overline{\psi\left(2^j x - k'\right)} \, dx \\ &= \ \int_{\mathbb{R}} \psi\left(2^j(2^{-j}t + 2^{-j}k') - k\right) \overline{\psi(t)} \, dt \\ &= \ \int_{\mathbb{R}} \psi\left(t + k' - k\right) \overline{\psi(t)} \, dt \\ &= \ < \psi_{0,k-k'}, \psi_{0,0} > \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variables $t = 2^j x - k'$. $\square$

Lemme 10.1.3. (Condition de Riesz)

Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ et soient $A, B > 0$ tels que $A \leq B$. Alors les inégalités (a), (b) suivantes sont équivalentes

$$(a) \quad A \sum_{(k)} |c_k|^2 \ \leq \ \left\| \sum_{(k)} c_k \, \psi(.-k) \right\|_2^2 \ \leq \ B \sum_{(k)} |c_k|^2 \quad \textit{pour toute famille finie de } c_k \in \mathbb{C}$$

$$(b) \quad A \ \leq \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{\psi}(y+2k\pi)\right|^2 \ \leq B \quad \textit{pour presque tout } y \in \mathbb{R}.$$

Rappelons que (a) signifie que les fonctions $\psi(.-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ vérifient la condition de Riez.

Preuve. Notons d'abord que puisque $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, la suite de fonctions

$$y \to \sum_{k=-N}^{N} \left|\hat{\psi}(y+2k\pi)\right|^2 \ (N \in \mathbb{N})$$

converge dans $L^1([0,2\pi])$ et définit une fonction $2\pi-$ périodique Ψ. En effet, ces fonctions sont intégrables sur $[0,2\pi]$, forment une suite croissante et on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} \left|\hat{\psi}(y+2k\pi)\right|^2 \ dy &= \sum_{k=-N}^{N} \int_0^{2\pi} \left|\hat{\psi}(y+2k\pi)\right|^2 \ dy \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \left|\hat{\psi}(t)\right|^2 \ dt \\
&= \int_{-2N\pi}^{2(N+1)\pi} \left|\hat{\psi}(t)\right|^2 \ dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left|\hat{\psi}(t)\right|^2 \ dt \quad \forall N \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

On conclut avec le théorème de Lévi (convergence monotone).

Ensuite notons aussi que l'on a, quelle que soit la famille finie de complexes c_k,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{(k)} c_k\psi(.-k)\right\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\left\|\sum_{(k)} c_k e^{-ik.}\,\hat{\psi}(.)\right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\sum_{(k)} c_k e^{-iky}\right|^2 \left|\hat{\psi}(y)\right|^2 \ dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{(k)} c_k e^{-iky}\right|^2 \Psi(y) \ dy.
\end{aligned}$$

Cela étant, $(b) \Rightarrow (a)$ s'obtient immédiatement. De fait, vu (b), l'égalité précédente donne

$$\begin{aligned}
A\left\|\sum_{(k)} c_k e^{-iky}\right\|_{L^2([0,2\pi])}^2 = A\,2\pi\sum_{(k)}|c_k|^2 \ &\leq \ 2\pi\left\|\sum_{(k)} c_k\psi(.-k)\right\|_2^2 \\
&\leq \ B\left\|\sum_{(k)} c_k e^{-iky}\right\|_{L^2([0,2\pi])}^2 = B\,2\pi\sum_{(k)}|c_k|^2
\end{aligned}$$

donc les inégalités (a).

Montrons à présent que $(a) \Rightarrow (b)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$, écrivons les égalités

$$\left\|\sum_{k=-n}^{n} c_k\psi(.-k)\right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-iky}\right|^2 \Psi(y)\ dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-iky}\right|^2 \Psi(y)\ dy$$

avec

$$c_k = e^{ik\xi} \quad k = -n, \ldots, n.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=-n}^{n} c_k \psi(. - k) \right\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\xi}\, e^{-iky} \right|^2 \Psi(y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^2(\xi - y)\, \Psi(y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\xi}^{\pi+\xi} D_n^2(\xi - y)\, \Psi(y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} D_n^2(\xi - y) \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi - y)\, \Psi(y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(D_n^2 \chi_{[-\pi,\pi]} * \Psi \right)(\xi)
\end{aligned}$$

où

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikx} = \frac{\sin((2n+1)/(x/2))}{\sin(x/2)}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

est le noyau de Dirichlet. L'hypothèse (a) donne donc

$$A\,(2n+1) \leq \frac{1}{2\pi} \left(D_n^2 \chi_{[-\pi,\pi]} * \Psi \right)(\xi) \leq B\,(2n+1) \quad (*)$$

quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$. Cela étant, les fonctions (appelées noyau de Féjer [1])

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

restreintes à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ forment une unité approchée de composition dans L^1_{loc} et L^2_{loc} et on a

$$F_{2n+1} = \frac{1}{2\pi\ (2n+1)} D_n^2.$$

Il s'ensuit que (*) donne

$$A \leq \left(F_{2n+1} \chi_{[-\pi,\pi]} * \Psi \right)(\xi) \leq B.$$

Comme la suite $F_{2n+1}\chi_{[-\pi,\pi]} * \Psi$ ($n \in \mathbb{N}$) converge dans L^1_{loc} vers Ψ, une sous-suite converge vers Ψ presque partout. On obtient ainsi finalement (b).□

Propriété(s) 10.1.4. *Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Alors les translatés $\psi(. - k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) sont orthonormés si et seulement si*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \hat{\psi}(y + 2k\pi) \right|^2 = 1 \quad \textit{pour presque tout } y.$$

Preuve. Cela résulte de ce qui précède et du résultat 9.4.2 du chapitre consacré à des compléments sur les espaces de Hilbert.□

1. L'expression explicite du noyau de Féjer résulte d'un calcul direct (par exemple à partir des noyaux de Dirichlet dans lesquels le sinus du numérateur est mis sous forme d'une différence d'exponentielles ; on somme alors les termes de progressions géométriques).

Propriété(s) 10.1.5. (Fourier et Riesz) *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, définissons la fonction f_k par $f_k(x) = f(x-k)$, $x \in \mathbb{R}$. Supposons que les fonctions f_k $(k \in \mathbb{Z})$ vérifient la condition de Riesz et notons H l'adhérence de leur enveloppe linéaire.*

Alors $h \in H$ si et seulement s'il existe une fonction $m \in L^2_{loc}$, $2\pi-$périodique telle que

$$\widehat{h} \ = \ m\,\widehat{f}.$$

Preuve. Quelle que soit la famille finie c_k de complexes, la condition de Riesz donne

$$A\sum_{(k)}|c_k|^2 \ \leq \ \left\|\sum_{(k)} c_k\, f_k\right\|_2^2 \ \leq \ B\sum_{(k)}|c_k|^2$$

Cela étant, d'une part, soit $\widehat{h} \ = \ m\,\widehat{f}$ avec $m \in L^2_{loc}$, $2\pi-$périodique. Si $m(y) \ = \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{-iky}$ avec $(c_k)_k \in l^2$, l'inégalité précédente implique alors que la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, f_k$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une fonction G. Bien sûr $G \in H$. Montrons que $G = h$. En passant à la transformée de Fourier dans la convergence vers G, on obtient

$$\widehat{G}(y) \ = \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, \left(e^{-iky}\,\widehat{f}(y)\right) \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

On a aussi la convergence presque partout pour une sous-suite. Comme on a

$$\sum_{(k)} c_k\, \left(e^{-iky}\,\widehat{f}(y)\right) \ = \ \widehat{f}(y)\sum_{(k)} c_k\, e^{-iky}$$

pour toute somme finie et comme la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{-iky}$ converge presque partout, on obtient

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, \left(e^{-iky}\,\widehat{f}(y)\right) \ = \ m(y)\ \widehat{f}(y) \quad \text{pour presque tout } y.$$

Il s'ensuit que $\widehat{G} \ = \ m\,\widehat{f} \ = \ \widehat{h}$ presque partout, donc $G = h$ presque partout, donc $h \in H$.

Réciproquement, pour tout $h \in H$, il existe des complexes c_k $(k \in \mathbb{Z})$ formant une suite de l^2 tels que

$$h \ = \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, f_k \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}).$$

En passant à la transformée de Fourier et avec les mêmes justifications que ci-dessus, on obtient

$$\widehat{h} \ = \ m\,\widehat{f}$$

avec $m(.) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{-ik.}$ qui est dans L^2_{loc} et est $2\pi-$périodique. $\square$

Propriété(s) 10.1.6. *Si les $f_k = f(.-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ $(f \in L^2(\mathbb{R}))$ vérifient la condition de Riesz et si on définit φ par*

$$\widehat{\varphi}(y) \ = \ \frac{\hat{f}(y)}{\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(y+2k\pi)|^2}}$$

alors les fonctions $\varphi(.-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ forment une base orthonormée de l'adhérence de l'enveloppe linéaire des f_k $(k \in \mathbb{Z})$ (notée H).

Preuve. On a
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(y+2k\pi)|^2 \;=\; 1 \quad \text{pour presque tout } y \in \mathbb{R}$$
donc les fonctions $\varphi(.-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ sont orthonormées, vu le résultat 10.1.4.

Posons
$$G(y) \;=\; \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y+2k\pi)|^2}.$$
Comme on a
$$\widehat{\varphi} \;=\; \frac{\widehat{f}}{G}, \quad \widehat{f} \;=\; G\widehat{\varphi}$$
avec $G, 1/G \;\in\; L^2_{loc}$ et $2\pi-$ périodiques, l'utilisation de la propriété précédente permet de conclure. □

10.2 Construction à partir d'une AMR

Donnons à présent la définition d'une analyse multirésolution.

Définition 10.2.1. *Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite croissante de sous-espaces linéaires fermés V_j $(j\in\mathbb{Z})$ de $L^2(\mathbb{R})$ telle que*

1. $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j \;=\; \{0\}$, $\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R})$
2. *les espaces V_j sont reliés par des dilations diadiques, c'est-à-dire $\forall j\in\mathbb{Z}$ on a $f\in V_j \;\Leftrightarrow\; f(2.)\in V_{j+1}$*
3. *V_0 est invariant par translations entières, c'est-à-dire $\forall k\in\mathbb{Z}$ on a $f\in V_0 \;\Leftrightarrow\; f(.-k)\in V_0$*
4. *l'espace V_0 est engendré par les translatés d'une seule fonction : il existe $g\in V_0$ tel que les $g(.-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ forment une base de Riesz de V_0.*

Remarquons aussi que la troisième condition énoncée dans la définition est bien sûr vérifiée lorsque la quatrième l'est.

Rappelons aussi que la fonction φ de $L^2(\mathbb{R})$ définie par
$$\widehat{\varphi}(y) \;=\; \frac{\widehat{g}(y)}{\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(y+2k\pi)|^2}}$$
est telle que les translatés $\varphi(.-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ forment une base orthonormée de V_0. Vu la définition de l'analyse multirésolution on obtient aussi que pour tout $j\in\mathbb{Z}_0$, les fonctions $2^{j/2}\varphi(2^j.-k)$ $(k\in\mathbb{Z})$ forment également une base orthonormée de V_j.

Remarque 10.2.2. • *La propriété (2) d'une analyse multirésolution est équivalente à*
$$\forall j,k\in\mathbb{Z} \text{ on a } f\in V_j \;\Leftrightarrow\; f(2^k.)\in V_{j+k}$$
• *Les propriétés (2) et (3) d'une analyse multirésolution impliquent que si $f\in V_0$ alors quel que soit j, la fonction $x\mapsto f(2^jx-k)$ appartient à V_j pour tout k.*

Preuve. • De fait, si $k \in \mathbb{N}$, alors, de proche en proche, on obtient

$$f \in V_j \;\Leftrightarrow\; f(2.) \in V_{j+1} \;\Leftrightarrow\; \ldots \;\Leftrightarrow\; f(2^k.) \in V_{j+k}$$

et si k est négatif, en utilisant ce qui précède avec $-k$, on obtient

$$f(2^k.) \in V_{j+k} \;\Leftrightarrow\; f(2^{k-k}.) = f(.) \in V_j.$$

• Si on définit g par $g(x) = f(2^j x - k)$ alors $g \in V_j$ si et seulement si $g(2^{-j}.) \in V_0$. Comme on a $g(2^{-j}x) = f(x-k)$, on conclut. □

A présent, montrons comment on construit une base orthonormée d'ondelettes à partir d'une analyse multirésolution (AMR). Faisons un **premier pas** et notons bien la propriété suivante. Nous reprenons les notations installées dans celle-ci.

Propriété(s) 10.2.3. *Soit V_j ($j \in \mathbb{Z}$) une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a*

$$f \;=\; \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Q_j(f) \quad \textit{dans } L^2(\mathbb{R})$$

et

$$\|f\|^2 \;=\; \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \|Q_j(f)\|^2.$$

Preuve. Ce résultat a été démontré au chapitre précédent. □

Rappelons alors que pour tout j, l'image de $L^2(\mathbb{R})$ par Q_j est W_j et établissons la propriété suivante (d'ailleurs directe), un **deuxième pas**.

Propriété(s) 10.2.4. *Soit V_j ($j \in \mathbb{Z}$) une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Si ψ est un élément de $L^2(\mathbb{R})$ tel que les fonctions $\psi(.-k)(k \in \mathbb{Z})$ constituent une base orthonormée de W_0, alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les fonctions $\psi_{j,k}(.) = 2^{j/2}\psi(2^j.-k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) constituent une base orthonormée de W_j.*

Vu la propriété 10.2.3, on en déduit alors que les fonctions

$$\psi_{j,k}(.) \;=\; 2^{j/2}\psi\left(2^j.-k\right) \;\; j,k \in \mathbb{Z}$$

forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve. Notons tout d'abord que vu les propriétés (2) et (3) d'une analyse multirésolution, les fonctions $\psi_{j,k}$ ($k \in \mathbb{Z}$) appartiennent à W_j quel que soit j. De fait, d'une part puisque $\psi \in W_0 \subset V_1$ la fonction ψ^* définie par $\psi^*(x) = \psi(x/2)$ appartient à V_0 et par conséquent la fonction $x \mapsto \psi^*(2^{j+1}x - 2k)$ appartient à V_{j+1} quel que soit k. Comme on a $\psi^*(2^{j+1}x-2k) = \psi(2^jx-k)$, on a donc $\psi_{j,k} \in V_{j+1}$ quel que soit k. D'autre part, on a

$$< \psi_{j,k}, f > \;=\; 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} \psi(2^jx-k)\,\overline{f(x)}\;dx \;=\; 2^{-j/2} \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,\overline{f(2^{-j}(t+k))}\;dt.$$

Cela étant, si $f \in V_j$ alors la fonction $x \mapsto f(2^{-j}x)$ appartient à V_0 donc aussi la fonction $x \mapsto f(2^{-j}(x+k))$. Comme ψ est orthogonal à tous les éléments de V_0, le produit scalaire précédent est nul.

Par ailleurs, les fonctions $\psi_{j,k}(.) = 2^{j/2}\psi(2^j. - k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont bien orthonormées. De fait, un changement de variable naturel montre qu'elles sont de norme 1 et orthogonales pour une échelle fixée. Pour des échelles différentes, il suffit de se rappeler que les espaces W_j sont orthogonaux et que $\psi_{j,k} \in W_j$ pour tous j, k.

Il reste ainsi à montrer que les fonctions $\psi_{j,k}(.) = 2^{j/2}\psi(2^j. - k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ forment bien une base de W_j. Soit donc $f \in W_j$. On a $f \in V_{j+1}$ donc $g(.) = f(2^{-j}.) \in V_1$. La fonction g est aussi orthogonale à V_0 comme on le voit avec un changement de variable naturel et en utilisant le fait que f est orthogonal à V_j. On a donc $g \in W_0$ et par conséquent

$$g(x) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} < g, \psi(. - k) > \psi(x-k) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R})$$

donc aussi

$$g(2^j x) \;=\; f(x) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} < g, \psi(. - k) > \psi(2^j x - k) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R})$$

et on conclut. □

Le travail qui reste à faire est alors clair : construire une telle fonction ψ à partir d'une AMR. Ce sera le **troisième et dernier pas**. Une telle fonction ψ est appelée *l'ondelette mère* ou simplement *l'ondelette* et encore *mother wavelet*.

Propriété(s) 10.2.5. *Soit V_j $(j \in \mathbb{Z})$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. On reprend les autres notations de cette section.*

- *Il existe une fonction localement de carré intégrable et $2\pi-$ périodique m_0 telle que*

$$\widehat{\varphi}(2y) \;=\; m_0(y)\,\widehat{\varphi}(y) \quad \textit{pour presque tout } y.$$

- *La fonction ψ définie par*

$$\widehat{\psi}(2y) \;=\; e^{-iy}\,\overline{m_0(y+\pi)}\,\widehat{\varphi}(y),$$

est telle que les fonctions $\psi(. - k), k \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de W_0.

Preuve. Cf l'annexe. □

10.3 Construction d'une AMR à partir d'un père

La section précédente contient la définition d'une analyse multirésolution ainsi que la construction standard d'une base orthonormée d'ondelettes à partir de celle-ci.

Il est donc important de pouvoir construire des analyses multirésolutions. Une méthode standard consiste à partir d'une fonction g de L^2 dont les translatés entiers vérifient la condition de Riesz et de définir les V_j de la manière suivante :

$$V_0 \;=\; \overline{span\{g(. - k) : k \in \mathbb{Z}\}} \quad \text{et} \quad V_j \;=\; \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(2^{-j}.) \in V_0\} \quad (j \in \mathbb{Z}_0).$$

Dans ces conditions, la suite V_j $(j \in \mathbb{Z})$ est une suite de sous-espaces vectoriels fermés de L^2 qui vérifient la condition (2) pour être une analyse multirésolution. De fait, quel que soit j, par définition on a $h(.) = f(2.) \in V_{j+1}$ si et seulement si $h(2^{-j-1}.) = f(2^{-j}.) \in V_0$; et par définition encore $f(2^{-j}.) \in V_0$ signifie que $f \in V_j$.

Bien sûr, la condition (3) est également satisfaite, ainsi que la (4).

Ainsi, pour vérifier que la suite V_j $(j \in \mathbb{Z})$ constitue bien une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, il suffit de trouver des conditions pour que

$$V_j \subset V_{j+1}$$

pour tout j et que

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} \;=\; L^2(\mathbb{R}), \quad \text{et} \quad \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j \;=\; \{0\}.$$

La proposition 10.3.3 qui va suivre donne des conditions sur φ (construit à partir de g par « orthonormation ») pour avoir ces propriétés. Avant de l'énoncer et de la démontrer, énonçons un lemme technique qui s'avérera très utile.

Lemme 10.3.1. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a*

$$\begin{aligned} \|P_j(f)\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\widehat{\varphi}(2^{-j}y)\,\overline{\widehat{f}}(y+2^j2\pi k)\overline{\widehat{\varphi}}(2^{-j}y+2\pi k)\;dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(y)\right|^2\,\left|\widehat{\varphi}(2^{-j}y)\right|^2\;dy \;+\; R_j(f) \end{aligned}$$

avec

$$R_j(f) \;=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\widehat{\varphi}(2^{-j}y)\,\overline{\widehat{f}}(y+2^j2\pi k)\overline{\widehat{\varphi}}(2^{-j}y+2\pi k)\;dy$$

et

$$\lim_{j\to+\infty} R_j(f) \;=\; 0.$$

Preuve. Cf l'annexe.□

Etablissons encore une propriété qui s'avère très utile et instructive.

Proposition 10.3.2. *Supposons avoir une fonction φ de L^2 donc les translatés entiers sont orthonormés et une fonction m_0, localement dans L^2 et 2π prériodique vérifiant*

$$\widehat{\varphi}(2y) \;=\; m_0(y)\,\widehat{\varphi}(y) \quad \textit{pour presque tout } y.$$

Alors

$$|m_0(y)|^2 \;+\; |m_0(y+\pi)|^2 = 1 \quad \textit{pour presque tout } y$$

et dès lors m_0 est borné.

Preuve. On a en effet

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(2y+2k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y+k\pi)\,\widehat{\varphi}(y+k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y)\,\widehat{\varphi}(y+2k\pi)|^2 \;+\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y+(2k+1)\pi)\,\widehat{\varphi}(y+(2k+1)\pi)|^2 \\ &= |m_0(y)|^2 \;+\; |m_0(y+\pi)|^2\,. \end{aligned}$$

□

Voici enfin les conditions sur φ promises.

Proposition 10.3.3. *(1) On a*

$$V_j \subset V_{j+1}\ \forall j \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \exists m_0\ 2\pi - \textit{périodique et dans } L^2_{loc} \textit{ telle que } \widehat{\varphi}(2.) = m_0(.)\,\widehat{\varphi}(.).$$

(2) Si $\widehat{\varphi}$ est continu en 0 et si $V_j \subset V_{j+1}$ pour tout j, alors

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} \;=\; L^2(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad |\widehat{\varphi}(0)| \;=\; 1.$$

(3) On a toujours

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j \;=\; \{0\}.$$

Preuve. (1) Vu la définition des V_j, on vérifie directement que $V_j \subset V_{j+1}$ pour tout j si et seulement si $V_{-1} \subset V_0$. De fait, bien sûr on a $V_j \subset V_{j+1}$ pour tout j implique $V_{-1} \subset V_0$. Et réciproquement, on a $f \in V_j$ si et seulement si $f(2^{-j-1}.) \in V_{-1}$; dès lors si $V_{-1} \subset V_0$ et si $f \in V_j$, alors $f(2^{-j-1}.) \in V_{-1} \subset V_0$ c'est-à-dire $f \in V_{j+1}$.

Cela étant, supposons avoir l'inclusion. On a alors $\varphi(./2) \in V_{-1} \subset V_0$ donc il existe une fonction m, $2\pi-$périodique et L^2_{loc} telle que $\widehat{\varphi(./2)} = 2\widehat{\varphi}(2.) = m\,\widehat{\varphi}$ car les transaltés de φ forment une base orthonormée de V_0.

Réciproquement, si $f \in V_{-1}$, alors $f(2.) \in V_0$ donc il existe une fonction m qui est $2\pi-$ périodique et dans L^2_{loc} telle que $\widehat{f(2.)} = m\widehat{\varphi}$ donc $2\widehat{f}(y/2) = m(y)\widehat{\varphi}(y)$. Dès lors

$$2\widehat{f}(y) = m(2y)\widehat{\varphi}(2y) = m(2y)m_0(y)\widehat{\varphi}(y)$$

avec $y \mapsto m(2y)m_0(y)$ $2\pi-$ périodique et dans L^2_{loc} puisque m_0 est borné. Il s'ensuit que $f \in V_0$.

(2) Rappelons que la propriété 9.3.3 affirme que l'union des espaces V_j est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\lim_{j\to+\infty} P_j(f) = f$ quel que soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Cela étant, pour tout j, avec $f \in \mathcal{D}$, le lemme 11.2.2 donne

$$\|P_j(f)\|^2 \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(y)\right|^2 \left|\widehat{\varphi}(2^{-j}y)\right|^2\, dy \;+\; R_j(f)$$

avec

$$R_j(f) \;=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\widehat{\varphi}(2^{-j}y)\,\overline{\widehat{f}}(y+2^j2\pi k)\overline{\widehat{\varphi}}(2^{-j}y+2\pi k)\, dy$$

et $\lim_{j\to+\infty} R_j(f) = 0$. On peut alors conclure. De fait, si on a la densité, alors

$$\lim_{j\to+\infty}\left(\|P_j(f)\|^2 \;-\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(y)\right|^2 \left|\widehat{\varphi}(2^{-j}y)\right|^2\, dy\right) \;=\; 0$$

implique

$$\|f\|^2 \;=\; \frac{1}{2\pi}\lim_{j\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(y)\right|^2 \left|\widehat{\varphi}(2^{-j}y)\right|^2\, dy \;=\; |\widehat{\varphi}(0)|^2\,\|f\|^2$$

quel que soit $f \in \mathcal{D}$. En prenant $f \neq 0$, on obtient $|\widehat{\varphi}(0)| = 1$. Et réciproquement : si $|\widehat{\varphi}(0)| = 1$ alors

$$\lim_{j\to+\infty}\|P_j(f)\|^2 \;=\; \|f\|^2$$

quel que soit $f \in \mathcal{D}$. Comme $P_j(f)$ et $f - P_j(f)$ sont orthogonaux, on a

$$\|P_j(f) - f\|^2 \;=\; \|f\|^2 - \|P_j(f)\|^2$$

donc aussi

$$\lim_{j \to +\infty} P_j(f) \;=\; f$$

quel que soit $f \in \mathcal{D}$. Mais on a encore ce résultat pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$. En effet pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\widetilde{f} \in \mathcal{D}$ tel que

$$\left\| f - \widetilde{f} \right\| \;\leq\; \varepsilon.$$

Dès lors

$$\begin{aligned} \|P_j(f) - f\| &= \left\| P_j(f) - P_j(\widetilde{f}) + P_j(\widetilde{f}) - \widetilde{f} + \widetilde{f} - f \right\| \\ &\leq \left\| f - \widetilde{f} \right\| + \left\| P_j(\widetilde{f}) - \widetilde{f} \right\| + \left\| \widetilde{f} - f \right\| \\ &\leq 2\varepsilon + \left\| P_j(\widetilde{f}) - \widetilde{f} \right\|, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

(3) Cf l'annexe.□

Rappelons que m_0 est appelé *filtre* et que la relation

$$\boxed{\widehat{\varphi}(2.) = m_0(.)\,\widehat{\varphi}(.)}$$

est appelée *relation d'échelle (scaling relation).*

10.4 Construction à partir d'un filtre

On a vu comment construire des ondelettes à partir d'une AMR [2]. On a vu ensuite comment construire une AMR à partir d'une père et on a introduit au passage la relation d'échelle et le filtre m_0.

Nous allons maintenant voir comment on peut construire un père à partir d'une filtre. Cela a été exploité par I. Daubechies pour construire des ondelettes à support compact régulières (mais pas C_∞, cela n'est pas possible). Dans ce cours, il n'est pas possible de voir en détail toutes les preuves. On renvoie alors à la première partie du cours Math0512 ; le syllabus de 2024-2025 est disponible sur demande.

Vu ce qui précède, il est clair que la fonction d'échelle φ (père des ondelettes) est fortement reliée au filtre m_0 puisque

$$\widehat{\varphi}(2.) \;=\; m_0(.)\widehat{\varphi}(.).$$

Notons que si cette égalité est vraie en 0 et que $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ alors

$$m_0(0) \;=\; 1.$$

Par ailleurs, on a la propriété suivante, très aisée à démontrer.

Propriété(s) 10.4.1. *Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(. + 2k\pi)|^2 = 1$ pp. Si m_0, fonction 2π-périodique et L^2_{loc} vérifie $\widehat{\varphi}(2.) \;=\; m_0(.)\widehat{\varphi}(.)$ alors*

$$|m_0(y)|^2 \;+\; |m_0(y+\pi)|^2 \;=\; 1 \qquad \textit{pour presque tout } y.$$

2. En fait, sous de faibles hypothèses, il a été démontré par S. Mallat (CHECK) que toute base othonormée d'ondelttes provnenait d'une AMR.

Preuve. De fait, on a successivement

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(2y+2k\pi)|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y+k\pi)|^2 \, |\hat{\varphi}(y+k\pi)|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y+2k\pi)|^2 \, |\hat{\varphi}(y+2k\pi)|^2 \; + \; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y+(2k+1)\pi)|^2 \, |\hat{\varphi}(y+(2k+1)\pi)|^2 \\
&= |m_0(y)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(y+2k\pi)|^2 \; + \; |m_0(y+\pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(y+\pi+2k\pi)|^2 \\
&= |m_0(y)|^2 \; + \; |m_0(y+\pi)|^2.
\end{aligned}$$

□

On peut en fait obtenir φ à partir de m_0, comme le montre la propriété suivante. Les hypothèses sont naturelles si on se souvient de la proposition 10.3.3.

Propriété(s) 10.4.2. *Si $\widehat{\varphi}$ est continu en 0 et tel que $\widehat{\varphi}(0) = 1$ alors*

$$\widehat{\varphi}(y) \; = \; \prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}y) \quad \textit{pour presque tout } y.$$

Preuve. Pour tout $J \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\widehat{\varphi}(y) \; = \; m_0\left(\frac{y}{2}\right) \, \widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right) \; = \; m_0\left(\frac{y}{2}\right) \, m_0\left(\frac{y}{4}\right) \, \widehat{\varphi}\left(\frac{y}{4}\right) \; = \ldots = \prod_{j=1}^{J} m_0\left(2^{-j}y\right) \, \widehat{\varphi}\left(2^{-J}y\right).$$

Un passage à la limite sur J et l'utilisation de l'hypothèse donne immédiatement le résultat.□

Cela étant, il faut alors donner des conditions suffisantes sur une fonction L^2_{loc} et 2π-périodique m_0 pour que le produit infini ci-dessus existe et définisse une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ qui va servir d'ondelette père.

Commençons par examiner ce qu'il en est de la convergence du produit infini des dilatés d'une fonction périodique et L^2_{loc}, cf la propriété 10.4.4.

Proposition 10.4.3. *Soit m_0 une fonction 2π-périodique qui vérifie*

$$|m_0(y)|^2 \; + \; |m_0(y+\pi)|^2 \; = \; 1 \quad \textit{pour presque tout } y.$$

Si le produit infini

$$\prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}y)$$

converge ponctuellement pour presque tout y alors sa limite appartient à $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve. Le résultat est dû à Stéphane Mallat et une preuve peut aussi être lue dans le livre *Ten lectures on wavelets* d'I. Daubechies (Chapitre 6) et aussi dans le syllabus 2024-2025 de la première partie du cours MATH0512.

Remarquons que l'égalité vérifiée par m_0 implique que cette fonction est bornée, donc est localement intégrable et de carré intégrable. □

Vu la proposition 10.3.3 on pourrait alors penser que si, en plus $m_0(0) = 1$ alors la fonction φ définie par

$$\widehat{\varphi}(y) \;=\; \prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}y)$$

est un père pour une analyse multirésolution. Il n'en est rien ... comme le montre le cas de

$$m_0(y) \;=\; \frac{1+e^{-3iy}}{2}$$

(cf I. Daubechies page 177) : les translatés de φ ne vérifient pas la condition de Riesz.

Ci-dessous figure un résultat de S. Mallat et I. Daubechies (chacun ayant prouvé le résultat séparément avec une condition suffisante différente) donnant des conditions suffisantes sur le filtre pour qu'effectivement on obtienne, cette fois, une fonction φ ad hoc pour construire une analyse multirésolution. Pour des compléments d'information voir notamment le syllabus 2024-2025 relatif à la première partie du cours MATH0512.

Proposition 10.4.4. *Soit m_0 une fonction 2π-périodique, $C_\infty(\mathbb{R})$ et telle que*

$$m_0(0) \;=\; 1, \quad |m_0(y)|^2 + |m_0(y+\pi)|^2 \;=\; 1 \text{ pp.}$$

Si (Mallat)

$$\inf_{|y|\geq \pi/2} |m_0(y)| \;>\; 0$$

ou si m_0 se factorise comme suit (Daubechies)

$$m_0(y) \;=\; \left(\frac{1+e^{iy}}{2}\right)^N L(y)$$

où $N \in \mathbb{N}_0$ et où L, 2π-périodique, dans $C_\infty(\mathbb{R})$ vérifie $\sup_{y\in\mathbb{R}} |L(y)| \;<\; 2^{N-1/2}$ alors la fonction φ définie par

$$\widehat{\varphi}(y) \;=\; \prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}y)$$

appartient à $L^2(\mathbb{R})$, est telle que les fonctions $\varphi(.-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ soient orthonormées, vérifie la relation $\widehat{\varphi}(2.) = m_0(.)\widehat{\varphi}(.)$, l'égalité $\widehat{\varphi}(0) = 1$ et $\widehat{\varphi} \in C_\infty(\mathbb{R})$.

10.5 Exemples d'ondelettes

10.5.1 Les splines

Cet exemple inclut la base classique de Haar.

Pour $n = 0$, on définit V_0 par

$$V_0 \;=\; \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \forall k \in \mathbb{Z},\; f = \text{ constante sur } [k, k+1[\right\}$$

et pour $n \in \mathbb{N}_0$,

$$V_0 \;=\; \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \;\text{ et }\; \forall k \in \mathbb{Z},\; f_{[k,k+1[} = \;\text{polynôme de degré }\; \leq n \right\}.$$

On pose aussi

$$g \;=\; \underbrace{\chi_{[0,1]} * \cdots * \chi_{[0,1]}}_{n+1\;\;\text{facteurs}}.$$

<u>Exercices</u>
(1) Montrer que g et les espaces V_j $(j \in \mathbb{Z})$ définis par

$$V_j \;=\; \left\{ f \in L^2(\mathbb{R} : f(2^{-j}.) \in V_0 \right\}$$

forment une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$.
(2) Déterminer m_0.

10.5.2 Les ondelettes de Littlewood-Paley

Soit une fonction $\theta \in C_\infty(\mathbb{R})$ à support compact, à valeurs dans $[0,1]$, paire, égale à 1 sur $[-2\pi/3, 2\pi/3]$, nulle sur le complémentaire de $[-4\pi/3, 4\pi/3]$ et telle que $\theta^2(x) + \theta^2(2\pi - x) = 1$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$. On définit

$$g \;=\; \frac{1}{2\pi}\,\mathcal{F}^+\theta,$$

V_0 comme l'adhérence de l'enveloppe linéaire des $g(. - k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$V_j \;=\; \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f(2^{-j}.) \in V_0 \right\}.$$

<u>Exercice</u>
Montrer que g et les espaces V_j $(j \in \mathbb{Z})$ définis par

$$V_j \;=\; \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f(2^{-j}.) \in V_0 \right\}$$

forment une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$.

10.5.3 Les ondelettes de Shannon (ou plutôt l'analyse multirésolution de Shannon)

Cet exemple est bien sûr à rapprocher de l'analyse des signaux bornés en fréquence de Shannon-Nyquist.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on définit V_j par

$$V_j \;=\; \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \;:\; supp(\widehat{f}) \subset [-2^j\pi, 2^j\pi] \right\}$$

où $supp(g)$ désigne le support de g et $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier négative de f. On définit aussi le sinus cardinal normalisé $\sin_\pi$ par

$$\sin_\pi(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

<u>Exercices</u>
(1) Montrer que les espaces V_j $(j \in \mathbb{Z})$ sont fermés et que les translatés entiers de $\varphi := \sin_\pi$ forment une base orthonormée de V_0.

(2) Montrer que les espaces V_j $(j \in \mathbb{Z})$ forment une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$.
(3) Montrer que dans $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\varphi(x) = \varphi(2x) \; + \; \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \varphi(2x - 2k - 1)$$

Suggestion : Poser $F(x) = \varphi(x) - \varphi(2x)$. Déterminer la transformée de Fourier de cette fonction et la développer en série trigonométrique de Fourier. Comparer avec la transformée de Fourier de la série du second membre.
(4)) Déterminer m_0.

10.5.4 Les ondelettes de Meyer

Voir le pdf en annexe.

10.5.5 Les ondelettes de I. Daubechies

Voir [2] et aussi le syllabus 2024-2024 de la première partie (F. Bastin) du cours MATH0512.

10.5.6 Illustrations

Voir les pdf en annexe.

10.6 L'algorithme de base (Stéphane Mallat)

Pour la programmation, on utilise la transformation en ondelettes discrètes. L'algorithme de Mallat décrit celle-ci en utilisant l'analyse multirésolution.

Cet algorithme n'est pas présenté ni analysé dans les présentes notes car il relève plutôt du domaine de l'analyse numérique. De nombreux ouvrages le détaillent car à l'heure actuelle, il est devenu classique.

Toutefois, explicitons tout de même ici la façon dont se présente le fait que [3] pour tout j, W_j est le complément orthogonal du V_j dans V_{j+1}. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ représente un signal, son approximation $P_{j+1}(f)$ à l'échelle $j+1$ se décompose comme suit

$$P_{j+1}(f) \; = \; P_j(f) + Q_j(f)$$

car $P_{j+1} - P_j = Q_j$ (cf 9.3.1).

On reprend le filtre m_0 défini par

$$m_0 \; : \; y \mapsto \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} < \varphi(./2), \varphi_{0,k}(.) > \; e^{-iky}$$

et pour tout k on pose

$$\alpha_k \; = \; \frac{1}{2} < \varphi(./2), \varphi_{0,k}(.) > .$$

3. On suppose que les espaces V_j $(j \in \mathbb{Z})$ forment une AMR de L^2 et on reprend les notations utilisées et les résultats des constructions obtenus précédemment.

Notons également m_1 la fonction $y \mapsto e^{-iy}\overline{m_0(y+\pi)}$; on a

$$\begin{aligned}
m_1(y) &= e^{-iy} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\alpha_k}\, e^{i(y+\pi)k} \\
&= e^{-iy} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \overline{\alpha_k}\, e^{iyk} \\
&= e^{-iy} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \overline{\alpha_{-k}}\, e^{-iyk} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \overline{\alpha_{-k}}\, e^{-iy(k+1)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+1} \overline{\alpha_{-k+1}}\, e^{-iyk}.
\end{aligned}$$

Pour tout k, on pose

$$\beta_k = (-1)^{k+1}\overline{\alpha_{-k+1}}.$$

Comme

$$\widehat{\psi}(2y) = m_1(y)\,\widehat{\varphi}(y)$$

on a donc aussi

$$\beta_k = \frac{1}{2} < \psi(./2), \varphi_{0,k} > .$$

Cela étant, remarquons que quels que soient les entiers j, l, k, on a

$$\begin{aligned}
< \varphi_{j,k}, \varphi_{j+1,l} > &= 2^j \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^j x - k)\,\overline{\varphi(2^{j+1}x - l)}\; dx \\
&= 2^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{t-2k}{2}\right) \overline{\varphi(t-l)}\; dt \\
&= 2^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \overline{\varphi(x+2k-l)}\; dx \\
&= 2^{-1/2} < \varphi(./2), \varphi_{0,l-2k} > \\
&= \sqrt{2}\,\alpha_{l-2k},
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que passer d'une échelle à l'autre se fait avec les mêmes coefficients (ceux du filtre m_0), quelle que soit cette échelle. De la même manière,

$$\begin{aligned}
< \psi_{j,k}, \varphi_{j+1,l} > &= 2^j \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \psi(2^j x - k)\,\overline{\varphi(2^{j+1}x - l)}\; dx \\
&= 2^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{t-2k}{2}\right) \overline{\varphi(t-l)}\; dt \\
&= 2^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{2}\right) \overline{\varphi(x+2k-l)}\; dx \\
&= 2^{-1/2} < \psi(./2), \varphi_{0,l-2k} > \\
&= \sqrt{2}\,\beta_{l-2k}.
\end{aligned}$$

Revenons alors aux $P_{j+1}(f)$, $P_j(f)$ et $Q_j(f)$. Pour tous j, k, notons $A_{j,k}$ le coefficient numéro k du développement de $P_j(f)$ dans la base orthonormée $\varphi_{j,l}$ $(l \in \mathbb{Z})$ et $D_{j,k}$ le coefficient numéro k du développement de $Q_j(f)$ dans la base orthonormée $\psi_{j,l}$ $(l \in \mathbb{Z})$; on a donc

$$A_{j,k} \; = < P_j(f), \varphi_{j,k} > = < f, \varphi_{j,k} > \qquad \text{et} \qquad D_{j,k} \; = < Q_j(f), \psi_{j,k} > = < f, \psi_{j,k} > .$$

Cela étant, pour tous j, k, comme $P_{j+1}(f) = P_j(f) + Q_j(f)$, on a successivement (synthèse de $A_{j+1,k}$)

$$\begin{aligned} A_{j+1,k} &= \; < P_{j+1}(f), \varphi_{j+1,k} > = < P_j(f), \varphi_{j+1,k} > + < Q_j(f), \varphi_{j+1,k} > \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(A_{j,l} < \varphi_{j,l}, \varphi_{j+1,k} > + D_{j,l} < \psi_{j,l}, \varphi_{j+1,k} > \right) \\ &= \sqrt{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(A_{j,l} \, \alpha_{k-2l} \; + \; D_{j,l} \, \beta_{k-2l} \right). \end{aligned}$$

De la même manière, comme $V_j, W_j \subset V_{j+1}$, on obtient $A_{j,k}$ et $D_{j,k}$ à partir des $A_{j+1,l}$ $(l \in \mathbb{Z})$ comme suit

$$\begin{aligned} A_{j,k} &= \; < f, \varphi_{j,k} > \\ &= \; < f, \sum_{l=-\infty}^{+\infty} < \varphi_{j,k}, \varphi_{j+1,l} > \varphi_{j+1,l} > \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \overline{< \varphi_{j,k}, \varphi_{j+1,l} >} < f, \varphi_{j+1,l} > \\ &= \sqrt{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \overline{\alpha_{l-2k}} \, A_{j+1,l} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_{j,k} &= \; < f, \psi_{j,k} > \\ &= \; < f, \sum_{l=-\infty}^{+\infty} < \psi_{j,k}, \varphi_{j+1,l} > \varphi_{j+1,l} > \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \overline{< \psi_{j,k}, \varphi_{j+1,l} >} < f, \varphi_{j+1,l} > \\ &= \sqrt{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \overline{\beta_{l-2k}} \, A_{j+1,l}. \end{aligned}$$

Lorsque φ est à support compact, seul un nombre fini de coefficients

$$< \varphi(./2), \varphi_{0,k} >$$

sont non nuls et le filtre m_0 est donc un polynôme trigonométrique, ce qui rend les calculs numériques plus rapides et fiables puisque les séries précédentes sont en fait des sommes finies.

Chapitre 11

Annexe

11.1 Espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel et soit $\|.\|$ une norme sur E. Les voisinages de $e_0 \in E$ sont les ensembles V de E pour lesquels il existe $r > 0$ tel que

$$\{e \in E \ : \ \|e - e_0\| \leq r\} \ \subset \ V.$$

On désigne par $b(e_0, r)$ la boule centrée en e_0 et de rayon r, c'est-à-dire $\{e \in E \ : \ \|e - e_0\| \leq r\}$. On parle alors d'espace normé $(E, \|.\|)$.

Une suite e_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de l'espace normé $(E, \|.\|)$ est dite *convergente* s'il existe $e \in E$ tel que $\lim_{m \to +\infty} \|e_m - e\| = 0$. On dit que e est limite de la suite et on montre directement son unicité. Elle est dite *de Cauchy* si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\|e_p - e_q\| \leq \varepsilon$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p, q \geq M$. Une suite convergente est toujours de Cauchy et si la réciproque est vraie, on dit que l'espace $(E, \|.\|)$ est *de Banach*.

Soient E, F deux espaces vectoriels, soient $\|.\|_E, \|.\|_F$ des normes sur E, F respectivement et soit T un opérateur linéaire défini sur E et à valeur dans F. Par définition (cf topologie), cet opérateur est *continu* en $e \in E$ lorsque, pour tout voisinage W de Te dans l'espace normé $(F, \|.\|_F)$, il existe un voisinage V de e dans l'espace normé $(E, \|.\|_E)$ tel que $TV \subset W$. L'opérateur est dit continu sur $(E, \|.\|_E)$ s'il est continu en tout point de E.

Cela étant donné la particularité de la topologie considérée, on peut traduire la continuité d'une autre manière.

Propriété(s) 11.1.1. *Soient E, F deux espaces vectoriels, soient $\|.\|_E, \|.\|_F$ des normes sur E, F respectivement et soit T un opérateur linéaire défini sur E et à valeur dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) T est continu
(2) si une suite e_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers e dans $(E, \|.\|_E)$, alors la suite Te_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers Te dans $(F, \|.\|_F)$
(3) T est continu en 0
(4) il existe $C > 0$ tel que $\|Te\|_F \leq C\|e\|_E$ quel que soit $e \in E$.

Preuve. Montrons l'équivalence de (1) et (2). Il est direct de voir que (1) $\Rightarrow$ (2). Supposons alors que (2) soit correct mais qu'il existe $e \in E$ en lequel T n'est pas continu. Il existe donc un voisinage W de Te dans $(F, \|.\|_F)$ qui ne contient aucune image d'un voisinage V de e dans $(E, \|.\|_E)$. Il existe donc $r > 0$ tel que, $\forall m \in \mathbb{N}_0$, la boule $b(e, 1/m)$ n'est pas incluse dans $b(Te, r)$; pour tout m, soit donc $e_m \in b(e, 1/m)$ tel que $\|Te_m - Te\|_F > r$. Par construction, la suite e_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers e dans $(E, \|.\|_E)$ donc, par hypothèse (2), on doit avoir $\lim_{m\to+\infty} \|Te_m - Te\|_F = 0$. Mais comme $\|Te_m - Te\|_F > r$ pour tout m, il est clair qu'on a une contradiction.

Maintenant, si T est continu en 0 (c'est-à-dire (3)), il est clair qu'on a (2) avec $e = 0$. Soit alors une suite e_m ($m \in \mathbb{N}_0$) qui converge vers e dans $(E, \|.\|_E)$. La suite $e_m - e$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge donc vers 0 dans $(E, \|.\|_E)$, donc la suite $T(e_m - e) = Te_m - Te$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers 0 dans $(F, \|.\|_F)$, ou encore la suite Te_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers Te dans $(F, \|.\|_F)$. On a donc montré que (2) est correct.

Il est évident que (1) $\Rightarrow$ (3).

Il reste donc à relier le point (4) aux précédents. D'une part il est clair que (4) $\Rightarrow$ (2). Supposons alors T continu en 0, ce qui est équivalent à dire que si une suite converge vers 0 dans $(E, \|.\|_E)$ alors la suite des images converge vers 0 dans $(F, \|.\|_F)$. Si (4) n'est pas correct, alors pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe $e_m \in E$ tel que $\|Te_m\|_F > m\|e_m\|_E$. Pour tout m, puisque $\|Te_m\|_F$ est strictement positif on obtient

$$\frac{1}{m} \ > \ \left\| \frac{e_m}{\|Te_m\|_F} \right\|_E \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

En posant

$$e_m^* \ = \ \frac{e_m}{\|Te_m\|_F} \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

on obtient $\lim_{m\to+\infty} \|e_m^*\|_E \ = \ 0$ et $\|Te_m^*\|_F = 1$ pour tout m, ce qui contredit l'hypothèse sur la convergence.$\square$

11.2 A propos d'ondelettes ...

11.2.1 Construction de l'ondelette mère à partir d'une AMR

Propriété(s) 11.2.1. *Soit V_j ($j \in \mathbb{Z}$) une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. On reprend les autres notations de cette section.*

- *Il existe une fonction localement de carré intégrable et $2\pi-$ périodique m_0 telle que*

$$\widehat{\varphi}(2y) \ = \ m_0(y)\,\widehat{\varphi}(y) \quad \textit{pour presque tout } y.$$

- *La fonction ψ définie par*

$$\widehat{\psi}(2y) \ = \ e^{-iy}\,\overline{m_0(y+\pi)}\,\widehat{\varphi}(y),$$

est telle que les fonctions $\psi(. - k), k \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de W_0.

Preuve. Procédons par étapes.

Etape 1

On construit φ à partir de g (cf la propriété 10.1.6 et le rappel en-dessous de la définition d'une analyse multirésolution). On a donc les fonctions $\varphi(. - k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) qui forment une base orthonormée de V_0.

Cette fonction φ est appelée *l'ondelette père* ou encore la *fonction d'échelle* (les termes utilisés sont en fait *father wavelet and scaling function*). Cette appellation va prendre tout son sens vu les relations que l'on va obtenir à l'étape 2.

Etape 2

On construit *le filtre* associé à l'analyse multirésolution, noté m_0, de la manière suivante. Comme $\varphi(./2) \in V_{-1} \subset V_0$ et que les fonctions $\varphi_{0,k}(.) = \varphi_(. - k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ forment une base orthonormée de V_0, on a

$$\varphi(x/2) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} < \varphi(./2), \varphi_{0,k} > \varphi_{0,k}(x) \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R})$$

donc

$$2\widehat{\varphi}(2y) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} < \varphi(./2), \varphi_{0,k} > e^{-iky}\, \widehat{\varphi}(y)$$

dans $L^2(\mathbb{R})$ et presque partout pour une sous-suite. On continue alors comme dans un autre résultat (cf 10.1.5) : comme la suite $< \varphi(./2), \varphi_{0,k} >$ $(k \in \mathbb{Z})$ est un élément de l^2, la fonction

$$m_0 \;:\; y \mapsto \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} < \varphi(./2), \varphi_{0,k} > e^{-iky}$$

est définie par une convergence dans L^2_{loc}, est $2\pi-$périodique et on a aussi la convergence presque partout. On obtient ainsi

$$\widehat{\varphi}(2y) \;=\; m_0(y)\, \widehat{\varphi}(y) \quad \text{pour presque tout } y.$$

Cette égalité est appelée *relation d'échelle (ou encore scaling relation).*

Notons aussi que cette relation d'échelle associée au fait que les fonctions $\varphi(. - k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont orthonormées donne

$$\begin{aligned}
1 \;&=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(2y + 2k\pi)|^2 \\
&=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y + k\pi)\, \widehat{\varphi}(y + k\pi)|^2 \\
&=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y)\, \widehat{\varphi}(y + 2k\pi)|^2 \;+\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y + (2k+1)\pi)\, \widehat{\varphi}(y + (2k+1)\pi)|^2 \\
&=\; |m_0(y)|^2 \;+\; |m_0(y + \pi)|^2
\end{aligned}$$

Etape 3

Caractérisons l'appartenance à W_0 en termes de transformation de Fourier et de fonctions $2\pi-$ périodiques. Montrons que

$$f \in W_0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists P \in L^2_{loc},\ \pi - \text{périodique tel que } \widehat{f}(2y) \;=\; e^{-iy}\, P(y)\, \overline{m_0(y + \pi)}\, \widehat{\varphi}(y).$$

Plusieurs développements doivent être faits. Allons-y.

Une fonction f appartient à V_1 si et seulement si $f(./2)$ appartient à V_0 donc si et seulement s'il existe $m \in L^2_{loc}$ et $2\pi-$périodique tel que

$$\widehat{f(./2)}(y) \;=\; 2\widehat{f}(2y) \;=\; m(y)\, \widehat{\varphi}(y) \quad \text{pour presque tout } y$$

(mêmes développements que précédemment, cf la propriété 10.1.5). Par ailleurs, une fonction f est orthogonale à V_0 si et seulement si f est orthogonal à $\varphi(. - k)$ pour tout k.

Il s'ensuit que f appartient à W_0 si et seulement s'il existe $m \in L^2_{loc}$ et $2\pi-$périodique tel que

$$\widehat{f}(2y) \;=\; m(y)\,\widehat{\varphi}(y) \quad \text{pour presque tout } y$$

et, pour tout k,

$$\begin{aligned}
0 \;=\; < f, \varphi(.-k) > \;&=\; \frac{1}{2\pi} < \widehat{f}, e^{-ik\cdot}\widehat{\varphi} > \\
&=\; \frac{1}{\pi} < \widehat{f}(2.), e^{-ik2\cdot}\widehat{\varphi}(2.) > \\
&=\; \frac{1}{\pi} < m\widehat{\varphi}, e^{-ik2\cdot} m_0 \widehat{\varphi} > \\
&=\; \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{2iky}\, m(y)\, \overline{m_0(y)}\, |\widehat{\varphi}(y)|^2 \;dy \\
&=\; \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{2iky}\, m(y)\, \overline{m_0(y)} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(y+2j\pi)|^2 \;dy \\
&=\; \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{2iky}\, m(y)\, \overline{m_0(y)}\; dy \\
&=\; \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{2iky} \left(m(y)\overline{m_0(y)} + m(y+\pi)\overline{m_0(y+\pi)} \right) \;dy.
\end{aligned}$$

Comme la fonction $y \mapsto m(y)\overline{m_0(y)} + m(y+\pi)\overline{m_0(y+\pi)}$ appartient à L^1_{loc} (et même à L^2_{loc} puisque m_0 est borné) et est $\pi-$périodique les égalités

$$\int_0^{\pi} e^{2iky} \left(m(y)\overline{m_0(y)} + m(y+\pi)\overline{m_0(y+\pi)} \right) \;dy \;=\; 0 \quad \forall k$$

sont équivalentes à

$$m(y)\overline{m_0(y)} + m(y+\pi)\overline{m_0(y+\pi)} \;=\; 0 \quad \text{pour presque tout } y \in [0,\pi]. \qquad (*)$$

Si y est fixé, on peut voir la relation précédente comme étant une équation linéaire en les deux inconnues $m(y)$ et $m(y+\pi)$. Comme

$$1 = |m_0(y)|^2 + |m_0(y+\pi)|^2$$

on obtient donc que m vérifie l'égalité (*) ci-dessus si et seulement s'il existe $c(y) \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{pmatrix} m(y) \\ m(y+\pi) \end{pmatrix} \;=\; c(y) \begin{pmatrix} \overline{m_0(y+\pi)} \\ -\overline{m_0(y)} \end{pmatrix}$$

avec

$$c(y) \;=\; m(y)m_0(y+\pi) - m(y+\pi)m_0(y).$$

Procédons alors par analyse-synthèse. Si $m \in L^2_{loc}$ est $2\pi-$périodique et vérifie (*) alors on a

$$m(y) \;=\; c(y)\,\overline{m_0(y+\pi)} \quad \text{pour presque tout } y \in [0,\pi]$$

et

$$m(y) \;=\; m((y-\pi)+\pi) \;=\; -c(y-\pi)\,\overline{m_0(y-\pi)} = \; -c(y-\pi)\,\overline{m_0(y+\pi)}$$

pour presque tout $y \in [\pi, 2\pi]$ donc finalement

$$m(y) \;=\; \Big(m(y)m_0(y+\pi) - m(y+\pi)m_0(y) \Big)\, \overline{m_0(y+\pi)} \quad \text{pour presque tout } y \in [0,2\pi].$$

Si on pose

$$P(y) \;=\; e^{iy}\left(m(y)m_0(y+\pi) - m(y+\pi)m_0(y)\right)$$

alors P est $\pi-$périodique et dans L^2_{loc} et on a

$$m(y) \;=\; e^{-iy}\,P(y)\,\overline{m_0(y+\pi)} \quad \text{pour presque tout } y \in [0, 2\pi].$$

Et réciproquement, si P est $\pi-$périodique et dans L^2_{loc} alors la fonction m définie par

$$m(y) \;=\; e^{-iy}\,P(y)\,\overline{m_0(y+\pi)}$$

est $2\pi-$périodique, appartient à L^2_{loc} et est telle que

$$m(y)\overline{m_0(y)} + m(y+\pi)\overline{m_0(y+\pi)} \;=\; 0 \quad \text{pour presque tout } y \in [0, \pi].$$

Etape 4 Nous arrivons enfin à la construction d'une base orthonormée de W_0 sous forme de translatés entiers d'une seule fonction ψ. Vu la caractérisation

$$f \in W_0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists P \in L^2_{loc},\ \pi - \text{périodique tel que } \widehat{f}(2y) \;=\; e^{-iy}\,P(y)\,\overline{m_0(y+\pi)}\,\widehat{\varphi}(y),$$

le fait que l'on doit avoir $\psi \in V_1$ et les résultats qui précèdent (liens entre Fourier et base de Riesz notamment), il semble naturel de définir ψ par

$$\widehat{\psi}(2y) \;=\; e^{-iy}\,\overline{m_0(y+\pi)}\,\widehat{\varphi}(y).$$

Comme $\varphi \in L^2$ et comme m_0 est borné, la fonction ψ est donc bien définie et appartient à L^2.

Montrons donc que les fonctions $\psi(.-k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ forment une base orthonormée de W_0.

D'une part ces fonctions sont bien normées car (calculs maintenant habituels, utilisant l'orthonormalité des translatés de φ)

$$\begin{aligned}
\|\psi(.-k)\|^2 \;=\; \int_{\mathbb{R}} |\psi(x-k)|^2\,dx \;&=\; \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\,dx \\
&=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(y)|^2\,dy \\
&=\; \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(2t)|^2\,dt \\
&=\; \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} |m_0(t+\pi)|^2\,|\widehat{\varphi}(t)|^2\,dt \\
&=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |m_0(t+\pi)|^2\,dt \\
&=\; \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} |m_0(t+\pi)|^2\,dt \;+\; \int_{\pi}^{2\pi} |m_0(t+\pi)|^2\,dt\right) \\
&=\; \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} |m_0(t+\pi)|^2\,dt \;+\; \int_0^{\pi} |m_0(t)|^2\,dt\right) \\
&=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(|m_0(t+\pi)|^2 + |m_0(t)|^2\right)\,dt \\
&=\; 1
\end{aligned}$$

et orthogonales car (cf la propriété 10.1.4)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\psi}(2y+2k\pi)\right|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y+k\pi+\pi)|^2 \, |\widehat{\varphi}(y+k\pi)|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y+2k\pi+\pi)|^2 \, |\widehat{\varphi}(y+2k\pi)|^2 \\
&\qquad + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y+(2k+1)\pi+\pi)|^2 \, |\widehat{\varphi}(y+(2k+1)\pi)|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y+\pi)|^2 \, |\widehat{\varphi}(y+2k\pi)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |m_0(y)|^2 \, |\widehat{\varphi}(y+\pi+2k\pi)|^2 \\
&= |m_0(y+\pi)|^2 + |m_0(y)|^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Cela étant, d'une part pour tout entier k on a

$$\widehat{\psi(.-k)}(2y) = e^{-ik2y}\,\widehat{\psi}(2y) = e^{-ik2y}\,e^{-iy}\,\overline{m_0(y+\pi)}\,\widehat{\varphi}(y)$$

donc, vu la caractérisation des éléments de W_0, on a bien $\psi(.-k) \in W_0$, car $y \mapsto e^{-ik2y}$ est $\pi-$périodique et L^2_{loc}. Il s'ensuit que l'adhérence de l'enveloppe linéaire de ces translatés est dans W_0, espace vectoriel fermé.

D'autre part, encore vu la caractérisation de W_0, si $f \in W_0$, il existe $P \in L^2_{loc}$ et $\pi-$périodique tel que (cf 10.1.5)

$$\widehat{f}(2y) = P(y)\,\widehat{\psi}(2y)$$

donc

$$\widehat{f}(y) = P(y/2)\,\widehat{\psi}(y)$$

donc (cf 10.1.5) f est dans l'adhérence de l'enveloppe linéaire des translatés de ψ puisque $y \mapsto P(y/2)$ est dans L^2_{loc} et $2\pi-$périodique.

Finalement, on a obtenu que W_0 est l'adhérence de l'enveloppe linéaire des translatés de ψ (orthonormés !), donc on conclut.

□

11.2.2 Lemme technique

Lemme 11.2.2. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a*

$$\begin{aligned}
\|P_j(f)\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\widehat{\varphi}(2^{-j}y)\,\overline{\widehat{f}}(y+2^j 2\pi k)\overline{\widehat{\varphi}}(2^{-j}y+2\pi k)\; dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\widehat{\varphi}(2^{-j}y)\,\overline{\widehat{f}}(y)\overline{\widehat{\varphi}}(2^{-j}y)\; dy \;+\; R_j(f)
\end{aligned}$$

avec

$$R_j(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\widehat{\varphi}(2^{-j}y)\,\overline{\widehat{f}}(y+2^j 2\pi k)\overline{\widehat{\varphi}}(2^{-j}y+2\pi k)\; dy$$

et

$$\lim_{j\to+\infty} R_j(f) \; = \; 0.$$

Preuve. Puisque les fonctions $\varphi_{j,k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ forment une base orthonormée de V_j, on a

$$P_j(f) \; = \; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} < f, \varphi_{j,k} > \varphi_{j,k} \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R})$$

et

$$\|P_j(f)\|^2 \; = \; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |< f, \varphi_{j,k} >|^2 \, .$$

Cela étant, explicitons chaque terme de cette série. Quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\widehat{\varphi_{j,k}}(y) \; = \; 2^{-j/2} \, e^{-iy2^{-j}k} \, \widehat{\varphi}(2^{-j}y)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} < f, \varphi_{j,k} > \; &= \; \frac{1}{2\pi} < \widehat{f}, \widehat{\varphi_{j,k}} > \\ &= \; \frac{2^{-j/2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) \, e^{-iy2^{-j}k} \, \widehat{\varphi}(2^{-j}y) \; dy \\ &= \; \frac{2^{-j/2}}{2\pi} \int_0^{2^{j+1}\pi} e^{-iy2^{-j}k} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y + 2^{j+1}l\pi) \, \widehat{\varphi}(2^{-j}y + 2\pi l) \; dy. \end{aligned}$$

Les complexes $\sqrt{2\pi} < f, \varphi_{j,k} >$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont donc les coefficients du développement en série trigonométrique de Fourier de la fonction $2^{j+1}\pi$−périodique

$$M_j \; : \; y \mapsto \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y + 2^{j+1}l\pi) \, \widehat{\varphi}(2^{-j}y + 2\pi l);$$

il s'ensuit que

$$\|P_j(f)\|^2 \; = \; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |< f, \varphi_{j,k} >|^2 \; = \; \frac{1}{2\pi} \, \|M_j\|^2_{L^2([0,2^{j+1}\pi])} \, .$$

Explicitons cette norme pour faire apparaître le membre de droite de l'égalité de l'énoncé. Par une succession de développements naturels, on a

$$\begin{aligned} &\|M_j\|^2_{L^2([0,2^{j+1}\pi])} \\ &= \; < M_j, M_j >_{L^2([0,2^{j+1}\pi])} \\ &= \; \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2^{j+1}\pi} \widehat{f}(y + 2^{j+1}l\pi) \, \widehat{\varphi}(2^{-j}y + 2\pi l) \, \overline{\widehat{f}}(y + 2^{j+1}p\pi) \, \overline{\widehat{\varphi}}(2^{-j}y + 2\pi p) \; dy \\ &= \; \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{2^{j+1}l\pi}^{2^{j+1}(l+1)\pi} \widehat{f}(t) \, \widehat{\varphi}(2^{-j}t) \, \overline{\widehat{f}}(t - 2^{j+1}l\pi + 2^{j+1}p\pi) \, \overline{\widehat{\varphi}}(2^{-j}t - 2l\pi + 2\pi p) \; dt \\ &= \; \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{2^{j+1}l\pi}^{2^{j+1}(l+1)\pi} \widehat{f}(t) \, \widehat{\varphi}(2^{-j}t) \, \overline{\widehat{f}}(t + 2^{j+1}p\pi) \, \overline{\widehat{\varphi}}(2^{-j}t + 2\pi p) \; dt \\ &= \; \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) \, \widehat{\varphi}(2^{-j}t) \, \overline{\widehat{f}}(t + 2^{j+1}p\pi) \, \overline{\widehat{\varphi}}(2^{-j}t + 2\pi p) \; dt. \end{aligned}$$

On peut donc conclure pour les premières égalités.

Il reste à montrer que

$$\lim_{j\to+\infty} R_j(f) \ = \ 0.$$

Comme $\widehat{\varphi}$ est borné, on obtient déjà

$$|R_j(f)| \ \leq \ C \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(y)\right| \left|\widehat{f}(y+2^j 2\pi k)\right| \ dy.$$

Ensuite, comme $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ est l'espace de Schwarz, c'est-à-dire des fonctions à « décroissance » rapide), quel que soit $N \in \mathbb{N}$, il existe $R_N > 0$ tel que

$$\left|\widehat{f}(y)\right| \ \leq \ R_N\,(1+|y|)^{-N} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, on obtient

$$|R_j(f)| \ \leq \ C_N C_M \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|y|)^N\,(1+|y+2^j 2\pi k|)^M} \ dy.$$

En utilisant l'inégalité

$$\frac{1}{1+|a+b|} \ \leq \ \frac{1+|a|}{1+|b|}, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

on obtient ensuite

$$\begin{aligned} |R_j(f)| \ &\leq \ C_N C_M \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|y|)^M}{(1+|y|)^N\,(1+2^j 2\pi|k|)^M} \ dy \\ &\leq \ C_N C_M \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|y|)^M}{(1+|y|)^N\,(2^j 2\pi|k|)^M} \ dy. \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $M = 2$ et $N = 4$, on a finalement

$$|R_j(f)| \ \leq \ C^*\,2^{-2j} \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{|k|^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|y|)^2} \ dy$$

et par conséquent

$$\lim_{j\to+\infty} R_j(f) = 0.$$

□

11.2.3 Preuve du point (3) de la proposition 10.3.3

(3) Soit f un élément de l'intersection de tous les espaces V_j, $j \in \mathbb{Z}$. Cela étant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que

$$\left\|f - \tilde{f}\right\| \ \leq \ \varepsilon.$$

Pour tout j, on obtient alors

$$\begin{aligned}\|f\| = \|P_j(f)\| &= \left\|P_j(f) - P_j(\tilde f) + P_j(\tilde f)\right\| \\ &\leq \left\|P_j(f) - P_j(\tilde f)\right\| + \left\|P_j(\tilde f)\right\| \\ &\leq \left\|f - \tilde f\right\| + \left\|P_j(\tilde f)\right\| \\ &\leq \varepsilon + \left\|P_j(\tilde f)\right\|.\end{aligned}$$

On va montrer que

$$\lim_{j\to-\infty} \left\|P_j(\tilde f)\right\| = 0$$

donc on aura

$$\|f\| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

et on pourra conclure que $f = 0$.

Soit $R > 0$ tel que $[-R, R]$ contienne le support de $\tilde f$. Par construction des V_j, pour tout j, les fonctions $\varphi_{j,k} = 2^{j/2}\varphi(2^j. - k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) forment une base orthonormée de V_j donc on a

$$\left\|P_j(\tilde f)\right\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|< \tilde f, \varphi_{j,k} >\right|^2.$$

Explicitons :

$$\begin{aligned}\left\|P_j(\tilde f)\right\|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\int_{\mathbb{R}} \tilde f(x)\, \overline{\varphi_{j,k}(x)}\; dx\right|^2 \\ &= 2^j \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\int_{-R}^{R} \tilde f(x)\, \overline{\varphi(2^j x - k)}\; dx\right|^2 \\ &\leq 2^j \left\|\tilde f\right\|_\infty^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-R}^{R} \left|\varphi(2^j x - k)\right|\; dx\right)^2 \\ &\leq 2^j \left\|\tilde f\right\|_\infty^2 2R \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-R}^{R} \left|\varphi(2^j x - k)\right|^2\; dx \\ &= \left\|\tilde f\right\|_\infty^2 2R \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-2^jR-k}^{2^jR-k} |\varphi(t)|^2\; dt \\ &= \left\|\tilde f\right\|_\infty^2 2R \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-2^jR+k}^{2^jR+k} |\varphi(t)|^2\; dt.\end{aligned}$$

Cela étant, si on prend j assez petit pour que les intervalles $[-2^jR+k, 2^jR+k]$ ne s'intersectent pas (par exemple $j \leq J$ avec $2^JR < (1/2)$) et si on définit les ensembles S_j par

$$S_j = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left[-2^jR + k, 2^jR + k\right]$$

on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-2^jR+k}^{2^jR+k} |\varphi(t)|^2\; dt = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2\; \chi_{S_j}(t)\; dt.$$

Comme

$$\lim_{j\to-\infty} \chi_{S_j}(t) \;=\; 0$$

pour presque tout t et comme $\varphi \in L^2$, le théorème de Lebesgue donne

$$\lim_{j\to-\infty} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 \; \chi_{S_j}(t)\; dt \;=\; 0.$$

En reprenant la majoration

$$\left\| P_j(\tilde{f}) \right\|^2 \;\leq\; \left\| \tilde{f} \right\|_\infty^2 \, 2R \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-2^jR+k}^{2^jR+k} |\varphi(t)|^2 \; dx \;=\; \left\| \tilde{f} \right\|_\infty^2 \, 2R \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 \; \chi_{S_j}(x)\; dx$$

on obtient donc bien finalement que

$$\lim_{j\to-\infty} \left\| P_j(\tilde{f}) \right\| \;=\; 0.$$

□

Chapitre 12

Suggestions d'exercices

12.1 Divers

12.1.1 Listes via les pages web relatives au cours

Voir les listes de ce cours.
Voir les références des années antérieures du cours d'analyse de bloc 2 math et physique.

12.1.2 Autres

1. Calculs pour montrer que d'autres suites sont orthonormées totales : Legendre, Laguerre, Hermite. Voir le syllabus de Jean Schmets (NB : pour la totalité de Legendre, utiliser la transfo de Fourier L^1de $f\chi_{[-1,1]}$).
2. On donne $g \in L^1(\mathbb{R})$ et on considère l'équation différentielle
$$D^2 f - f \; = \; g$$
Montrer que la seule solution f qui appartienne à $L^1(\mathbb{R}) \cap C_2(\mathbb{R})$ est la fonction
$$f \; = \; \frac{1}{2}\, g * e^{|\cdot|}$$
3. Si f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, déterminer la transformée de Fourier de leur produit au moyen des transformées de Fourier des deux fonctions f, g.
4. Soit la fonction f définie par
$$f(x) \; = \; \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Calculer sa transformée de Fourier.
5. a) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * g = f$ quel que soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
b) Dans $L^1(\mathbb{R})$, résoudre l'équation $f * f = f$.

6. Pour tout $r > 0$, on définit

$$q_r(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/(4t)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$q_t * q_s \;=\; q_{t+s} \quad \forall t, s > 0.$$

7. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $x \mapsto x\mathcal{F}_x^- f$ soit intégrable. Montrer qu'il existe une fonction $g \in C_1(\mathbb{R})$ qui est égale presque partout à f.

8. Soit une fonction intégrable f. Montrer que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-itx^2}\, dx \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, e^{-ixt}\, dt.$$

En déduire que f est impair si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-itx^2}\, dx \;=\; 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

9. Pour tout naturel non nul n, soit g_n la fonction caractéristique de l'intervalle $[-n, n]$.
a) Déterminer l'expression explicite de $g_n * g_1$ pour tout n.
b) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \|g_n * g_1\|_1 \;=\; +\infty.$$

10. Soit la fonction f définie par $f(x) = x - x^3$ et on considère l'espace $L^2([-1, 1])$.
a) Déterminer le développement de f en série trigonométrique de Fourier.
b) En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

11. Soit un réel non entier α.
a) Prouver que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour $x \in [-\pi, \pi[$ et prolongée par $2\pi-$périodicité est égale à

$$\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\left(1 \;+\; 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\cos(nx)\right).$$

b) En déduire que

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pi) \;=\; \frac{1}{\alpha\pi} \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi^2(\alpha^2 - n^2)}.$$

c) Démontrer que la série

$$g(x) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

converge pour tout $x \in]-1,1[$. Montrer ensuite que $g \in C_1(]-1,1[)$ et déterminer explicitement sa dérivée.
d) En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

12. Trouver toutes les fonctions de classe C^2 sur $[0,2\pi]$ qui vérifient

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad |D^2 f(x)| \leq |f(x)|,\ \forall x \in [0,2\pi].$$

13. Sommation de Poisson, comme application des séries trigonométriques

12.2 Ondelettes

1. Voir les exemples d'analyse multirésolution, section 10.5.
2. On donne
$$m_0(y) = \frac{1+e^{-3iy}}{2} = e^{-3iy/2}\cos\left(\frac{3y}{2}\right).$$

- Montrer que pour tout y, on a

$$\prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(2^{-j}y\right) = e^{-3iy/2}\ \frac{\sin(3y/2)}{3y/2} = \frac{1-e^{-3iy}}{3y}.$$

- On définit alors $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ par

$$\widehat{\varphi}(y) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}y).$$

Montrer que $m_0(0)=1$, que $|m_0(y)|^2 + |m_0(y+\pi)|^2 = 1$ pour tout y mais que certains translatés entiers de φ ne sont pas orthogonaux.

3. Voici quelques éléments développés dans la section 10.6 (Algorithme de Mallat), section dans laquelle on explicite un peu le passage d'une échelle à l'autre ; ici, on utilise les notations de cette section.

L'idée est d'expliciter $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ en termes des coefficients d'approximation $A_{j,k}$ et de détail $D_{j,k}$. Deux choses sont à considérer : d'une part obtenir les $A_{j+1,k}$ à partir des $A_{j,k}$ et $D_{j,k}$ et d'autre part, obtenir les $A_{j,k}$ et $D_{j,k}$ à partir des $A_{j+1,k}$. La clef du passage de l'échelle $j+1$ à l'échelle j sont les relations

$$\widehat{\varphi}(2y) = m_0(y)\,\widehat{\varphi}(y) \quad \text{et} \quad \widehat{\psi}(2y) = m_1(y)\,\widehat{\varphi}(y)$$

qui traduisent que V_j et W_j sont inclus dans V_{j+1}. La clef du passage de l'échelle j à l'échelle $j+1$ est la relation

$$\widehat{\varphi}(y) = \left(\overline{m_0(y)} + \overline{m_0(y+\pi)(y)}\right)\,\widehat{\varphi}(2y) + \left(\overline{m_1(y)} + \overline{m_1(y+\pi)(y)}\right)\,\widehat{\psi}(2y)$$

qui s'obtient en décomposant $\varphi \in V_0$ dans la base orthonormée de $V_{-1} \oplus W_{-1}$ formée des fonctions $\varphi_{-1,k}$ et $\psi_{-1,k}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Rappelons les relations obtenues dans la section 10.6 : pour tous j, k, on a

$$A_{j+1,k} \;=\; \sqrt{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(A_{j,l}\, \alpha_{k-2l} \,+\, D_{j,l}\, \beta_{k-2l}\right),$$

$$A_{j,k} \;=\; \sqrt{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \overline{\alpha_{l-2k}}\, A_{j+1,l}$$

et

$$D_{j,k} \;=\; \sqrt{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \overline{\beta_{l-2k}}\, A_{j+1,l}$$

avec

$$m_0(y) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k\, e^{-iky} \quad \text{et} \quad \beta_k = (-1)^{k+1}\overline{\alpha_{-k+1}}\ \forall k.$$

On considère alors l'analyse multirésolution des splines de « niveau » zéro, c'est-à-dire le cas des fonctions constantes par morceaux. Dans ce cas on a $\varphi = \chi_{[0,1]}$.
- Déterminer m_0 et ψ.
- On donne la fonction $f = \chi_{[0,1/2[} + 2\chi_{[1/2,1]}$. On a $f \in V_1$; décomposer cette fonction en termes d'éléments de base de V_0 et de W_0.
- On donne la fonction $F = 2\chi_{[0,1]} - 3\chi_{[1/4,1/2]} + \chi_{[3/2,1]}$. On a $f \in V_2$; décomposer cette fonction en termes d'éléments de base de V_1, W_1 puis de V_0, W_0, W_1.

12.3 Suggestions

Ondelettes, exercice 2, cas des splines

Rappelons les données.

Pour $n = 0$ (cas classique de la base de Haar), on définit V_0 par

$$V_0 \;=\; \left\{f \in L^2(\mathbb{R}) : \forall k \in \mathbb{Z},\ f = \text{ constante sur } [k, k+1[\right\}$$

et pour $n \in \mathbb{N}_0$,

$$V_0 \;=\; \left\{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \in C^{n-1}(\mathbb{R}) \ \text{ et } \ \forall k \in \mathbb{Z},\ f_{[k,k+1[} = \text{ polynôme de degré } \leq n\right\}.$$

On pose aussi

$$g \;=\; \underbrace{\chi_{[0,1]} * \cdots * \chi_{[0,1]}}_{n+1 \text{ facteurs}}.$$

Cas $n = 0$. Dans ce cas, il est direct de voir que les translatés entiers de $\chi_{[0,1]}$ sont orthonormés. Cela étant, on a

$$\widehat{\chi_{[0,1]}}(y) \;=\; \int_0^1 e^{-ixy}\, dx \;=\; \frac{1}{-iy}\left(e^{-iy} - 1\right) \;=\; e^{-iy/2}\, \frac{\sin(y/2)}{y/2}.$$

Notons que l'on a donc aussi, vu la caractérisation de l'orthonormalité des translatés entiers,

$$1 \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\chi_{[0,1]}}(y + 2k\pi)|^2 \;=\; 4\sin^2(y/2) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(y + 2k\pi)^2}$$

Le filtre m_0 s'obtient alors directement (avoir montré auparavant que l'on a bien une analyse multirésolution) :

$$m_0(y) = \frac{\widehat{\chi_{[0,1]}}(2y)}{\widehat{\chi_{[0,1]}}(y)} = e^{-iy/2}\frac{\sin(y)}{2\sin(y/2)} = e^{-iy/2}\cos(y/2) = \frac{1-e^{-iy}}{2}.$$

L'ondelette correspondante est celle de Haar $\psi = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$.

Cas $n > 0$. Dans ce cas, on n'a plus l'orthogonalité des translatés. Pour montrer que les translatés de g vérifient bien la condition de Riesz puis déterminer le père et le filtre, on peut procéder de la manière suivante. Vu sa définition, la fonction g est à support compact (c'est en fait $[0, n+1]$) et régulière (C^{n-1}) ; elle est donc bornée, intégrable, donc aussi de carré intégrable. Vu la forme de la transformée de Fourier de g, la fonction G obtenue par (2π-) périodisation de g, à savoir

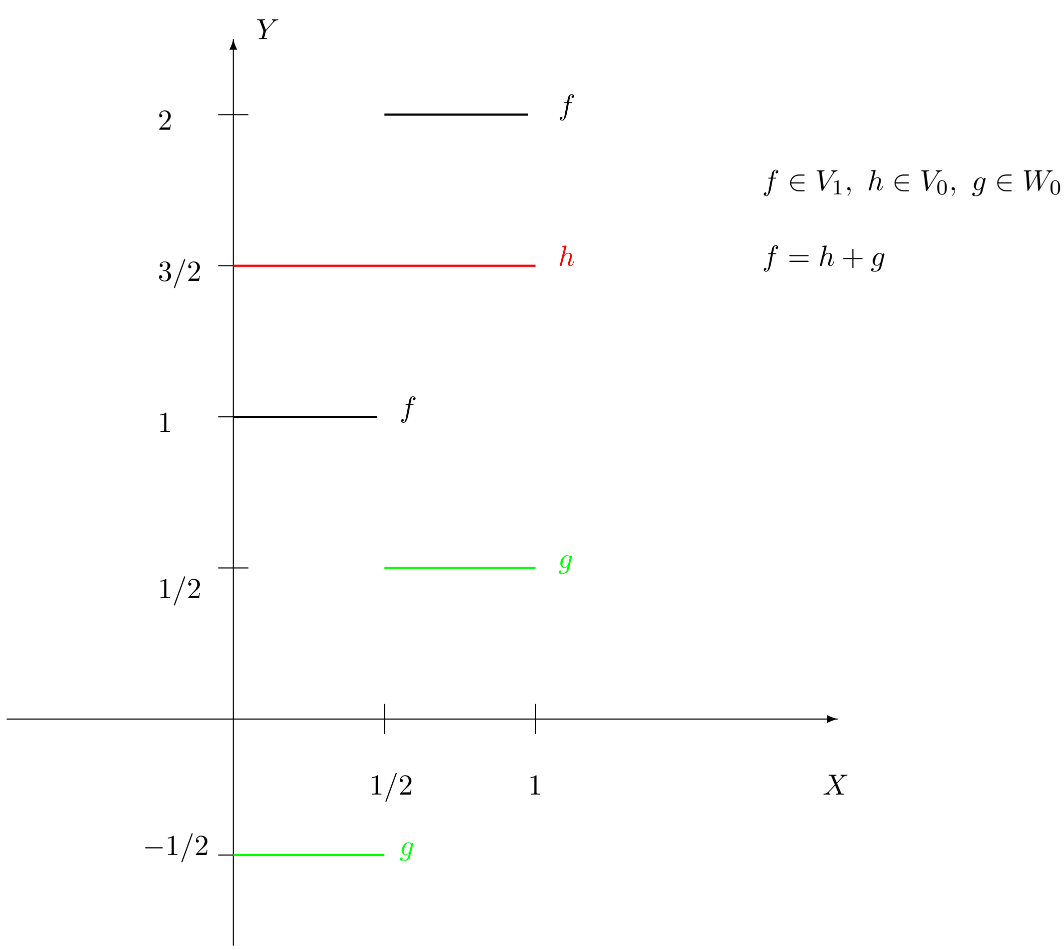
$$G(y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\chi_{[0,1]}}^{n+1}(y+2k\pi)\right|^2 = 4^{n+1}\sin^{2(n+1)}(y/2)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(y+2k\pi)^{2(n+1)}}$$

est localement dans L^2 et même bornée car elle est continue sur $]0,2\pi[$ et se prolonge continûment en 0 et en 2π. En fait c'est un polynôme trigonométrique. De fait, les coefficients de Fourier de son développement en série trigonométrique de Fourier s'obtiennent de la manière suivante. COMPLETER

Ondelettes, exercice 3

On obtient

$$f = \frac{3}{2}\varphi_{0,0} + \frac{1}{2}\psi_{0,0} = h + g$$



Bibliographie

[1] Albert Boggess, Francis J. Narcowich, *A first course in wavelets with Fourier analysis*, Prentice Hall 2001.

[2] Ingrid Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, CBMS 61, 1992.

[3] Eugenio Hernandez, Guido Weiss, *A first course on wavelets*, Studies in advanced mathematics, CRS Press, 1996.

[4] Stéphane Mallat, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of* $L^2(\mathbb{R})$, Trans. Amer. Math. Soc. 315(1), 1989, 69-88.

[5] Yves Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, I, (II, III,) Hermann, Paris, 1990.

[6] Samuel Nicolay, syllabus des cours d'analyse de première et de seconde année (bachelier en sciences mathématiques), disponible via la page web de S. Nicolay.

[7] Jean Schmets, *Analyse mathématique. Introduction aux espaces fonctionnels.* Université de Liège. (Syllabus disponible via les archives indiquées dans les pages web relative au cours MATH0247, Analyse, 2BP)

[8] Quelques exercices trouvés via internet